Convergenze

a cura di
G. Anzellotti, L. Giacardi, B. Lazzari

Gabriele Lolli

Guida alla teoria degli insiemi

Springer

Gabriele Lolli
Dipartimento di Matematica
Università degli studi di Torino

ISBN 978-88-470-0768-0
e-ISBN 978-88-470-0769-7

Springer fa parte di Springer Science+Business Media
springer.com

Progetto grafico della copertina: Valentina Greco, Milano
Fotocomposizione e impaginazione: LE-TEX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig, Germania
Stampa: Grafiche Porpora, Segrate, Milano

Stampato in Italia

Springer-Verlag Italia Srl, Via Decembrio 28, I-20137 Milano

Prefazione

L'insegnante si trova in genere in difficoltà a proposito degli argomenti di teoria degli insiemi, dello spazio e dell'enfasi da dare loro nella propria preparazione e nel proprio lavoro, per un semplice motivo, che all'università molto difficilmente gli, o le, sono state chiarite le idee ed è stata fornita una preparazione di base adeguata. Di fronte alle riforme prima imposte poi ritirate, il docente dovrebbe decidere con la sua testa cosa fare, ma mancano le conoscenze necessarie, e soprattutto la sensibilità per il ruolo che gli argomenti di teoria degli insiemi dovrebbero o potrebbero svolgere.

Un sintomo delle incertezze dominanti sta nella terminologia stessa, che talvolta si riferisce alla "teoria degli insiemi" e altre volte a una non ben specificata "insiemistica", senza che ci sia chiarezza sulla differenza e sugli eventuali motivi della distinzione. Con "insiemistica" sembra si voglia alludere a un complesso di argomenti non governati da una teoria e senza un obiettivo caratterizzante[1], un dominio di conoscenze dai confini incerti, quasi non si trattasse di una teoria definita. Ma cosa si intende con "insiemistica"?

Nell'insiemistica rientrano in genere due temi: il primo riguarda le operazioni booleane di unione, intersezione e complemento, tra i sottoinsiemi di un universo fissato. Ma le proprietà di queste operazioni non sono altro che le proprietà dei connettivi logici, disgiunzione, congiunzione e negazione. Con questa osservazione non si vuole suggerire che oltre alla teoria degli insiemi si debba anche studiare la logica proposizionale delle tavole di verità – con le quali purtroppo si identifica la logica – ma semplicemente ricordare che basta saper parlare bene, con proprietà, per padroneggiare le particelle logiche e quindi le relazioni booleane tra insiemi. Sarebbe meglio dedicarsi alla cura della lingua. Dopo una sufficiente esperienza di uso naturale e non enfatizzato, si può eventualmente osservare che si è imparata, o che conviene imparare una parola nuova.

[1] L'aggettivo "insiemistico" è invece usato regolarmente col significato di "in termini di insiemi", o "nell'ambito della teoria degli insiemi", e simili.

Le difficoltà, se ci sono, sono difficoltà di rappresentazione: *vedere* insiemi sulla pluralità di oggetti che ci circondano. La *new math* è crollata sul singoletto, e giustamente: distinguere un oggetto x dall'insieme $\{x\}$ il cui unico elemento è x è qualcosa che ha senso solo nel mondo dei concetti, non in quello dell'esperienza; è imposto da ragioni superiori, non è la base su cui poggiare quelle ragioni. Non parliamo della differenza tra l'insieme vuoto $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$, un insieme che non è vuoto ma che contiene solo il vuoto[2]. Lo stesso ostacolo per i non matematici, e per i principianti, sta nel concepire o vedere l'insieme $\mathscr{P}(x)$ dei sottoinsiemi di un insieme x, che non esiste in natura neanche se x è concreto, e prima ancora due insiemi non disgiunti, che non si possono fisicamente isolare.

L'altro contenuto dell'insiemistica comprende la definizione di funzione, con i necessari preliminari, che iniziano dalle coppie ordinate, dal prodotto cartesiano e dalle relazioni. Quindi vengono le diverse definizioni relative alle funzioni, come immagine e controimmagine, restrizione, iniettività, suriettività ecc.

Ma questo è linguaggio, dove è la teoria?

Inoltre è un linguaggio estremamente estrinseco e preliminare, come imparare a denotare vertici, spigoli e facce quando si parla di poliedri. Un livello matematico superiore nel quale interviene il linguaggio insiemistico è quello dell'algebra, intesa come teoria delle strutture. Anche in questo caso tuttavia la presenza del linguaggio insiemistico è ancillare; delle strutture interessano infatti le proprietà algebriche, o topologiche, *matematiche* insomma[3]. Come se la teoria degli insiemi non fosse matematica. Questa idea si rafforza *ab absentia*, per la congiura del silenzio. Nella *vulgata* la teoria degli insiemi avrebbe un carattere elementare e propedeutico, e perciò stesso povero di applicazioni.

Il problema non riguarda solo l'insegnante, pure il matematico medio che fa ricerca si trova in stato di ignoranza rispetto al contenuto e al valore degli argomenti di teoria degli insiemi. Si può tranquillamente affermare, sulla base di molta esperienza, che i matematici non sanno cosa è la teoria degli insiemi.

D'altra parte la disciplina non è presente nei normali curricula e l'ignoranza è inevitabile, anzi programmata. La preparazione universitaria di chi fa ricerca non è molto diversa da quella degli insegnanti, a parte l'approfondimento degli argomenti verso i quali si orienta il lavoro di tesi nell'indirizzo scelto. La strutturazione attuale dei piani di studio perpetua la trasmissione di diverse lacune; nel caso della teoria degli insiemi questa circostanza dipende da una reale difficoltà, tecnica ma con intrecci politici, perché la teoria è una teoria un po' speciale, e diversa dalle altre: non è possibile studiarla a fondo e padroneggiarla senza usare alcuni strumenti e concetti della lo-

[2] Quale dei due potrebbe essere un "vuoto a rendere"?

[3] Solo quando, raramente, si prende in considerazione la cardinalità, di strutture e loro sottoinsiemi, occorre finalmente un po' di teoria degli insiemi. Oppure quando si vogliano studiare sottoinsiemi definibili, ma qui andiamo nel difficile.

gica matematica. La mancanza di una intuizione collaudata richiede che ci si appoggi in modo più sostanziale che per altri argomenti sulle definizioni e in generale sul linguaggio, che è la cosa più concreta a disposizione. Questo peraltro è uno degli aspetti interessanti del suo insegnamento, anche pre-universitario: l'opportunità di introdurre al pensiero astratto e alla capacità di formalizzazione. Si tratterebbe comunque di concetti molto elementari e, questi sì, propedeutici a tutta la matematica: la distinzione tra il linguaggio in cui si parla e ciò di cui si parla, la considerazione dei termini e delle formule come oggetti reali separati dalla loro denotazioni, la possibilità di ragionare matematicamente a entrambi i livelli.

Lo studio della logica tuttavia è quasi ovunque bandito dal filone principale dei curricula matematici, con diverse conseguenze negative, una delle quali riguarda proprio la comprensione corretta della teoria degli insiemi.

Le presentazioni di una teoria ingenua, o informale (*naive set theory*) sono infide, perché inevitabilmente selettive negli argomenti che riescono a coprire, per quanto possano essere ben meditate. Non si vede perché debba esistere una teoria degli insiemi naive e non un'algebra naive o una analisi naive. *Naive Set Theory* è il titolo infelice e ambiguo di un fortunato e bel libro di Paul Halmos[4]. Il libro è dedicato alla teoria assiomatica degli insiemi, ma non formalizzata. Halmos avrebbe preteso che il suo termine *naive* fosse chiaro e di senso univoco, o individuasse un nuovo stile, come mostra il suo apprezzamento per il fatto che la traduzione tedesca conserva nel titolo l'aggettivo come neologismo, ma così non è. In altri settori, come la fisica naive, il termine denota una impostazione non educata, diversa da quella scientifica. Non pare sia questa l'intenzione di Halmos: "naive" significa per lui soltanto che, come per ogni teoria non formalizzata, non viene descritta, né usata, ma neanche studiata, la sintassi del linguaggio[5].

La prima difficoltà che si frappone a una conoscenza e valutazione corretta della teoria degli insiemi, cioè l'idea imprecisa di un'insiemistica, è di tipo minimalista, considera gli insiemi solo un linguaggio, o una grammatica, come diceva Bourbaki.

Una seconda difficoltà, questa invece massimalista, dipende dalla circostanza che tale teoria ha un ruolo fondazionale; si presenta come una teoria entro la quale si può svolgere, volendo, tutta la matematica, con una appropriata definizione di tutti gli enti classici.

---

[4] P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, Van Nostrand, New York, 1960; trad. it. *Teoria elementare degli insiemi*, Feltrinelli, Milano, 1970.

[5] Ad esempio non si sottilizza sul fatto che $\in$ è un *simbolo* di relazione e non una relazione (*insieme* di coppie), sicché non si può parlare di una struttura $\langle x, \in \rangle$, dove x è un insieme; è come mettere nella stessa pentola la carne e un sacchetto del supermercato, un errore di tipo. Si deve invece definire la restrizione $\in\restriction x^2 = \{\langle u, v\rangle \colon u, v \in x, u \in v\}$, che è una relazione costruita con $\in$, e considerare $\langle x, \in\restriction x^2\rangle$. Minuzie formalistiche, ma andando avanti con le omissioni non si riesce a spiegare cosa è un modello della teoria degli insiemi.

Si chiama "riduzionismo" la posizione filosofica che identifica la fondazione della matematica con la realizzazione di una soluzione di questo tipo. La teoria degli insiemi è considerata l'erede dei sistemi come quelli di Gottlob Frege (1848–1925) e di Bertrand Russell (1872–1970), che ambivano a una fondazione *logica* della matematica. Questi tentativi sono considerati falliti, nella loro ambizione di definire tutti gli enti matematici solo in termini logici, dimostrandone anche l'esistenza logica[6]. La teoria degli insiemi sarebbe allora per i filosofi un ripiego con meno pretese, ma pur sufficiente per le esigenze dei matematici, in quanto si accontenterebbe di postulare quello che serve per le loro costruzioni, troncando la ricerca all'indietro delle giustificazioni.

Le discussioni sullo stato della teoria degli insiemi come proposta fondazionale non sono esaurite. Ma quest'aura filosofica non ne facilita la fruizione didattica, vuoi per le riserve di chi la considera fuori dalla matematica, vuoi per la preoccupazione di chi la considera troppo difficile, comunque lontana dai problemi dell'insegnamento – sincera o pelosa che sia questa ritrosaggine.

Eppure esiste una teoria degli insiemi, con un contenuto matematico ben definito, e con origini e motivazioni che risalgono a esigenze intrinseche allo sviluppo della matematica.

Se si volesse riassumere in una parola il campo della teoria si potrebbe dire che è lo studio (matematico) dell'infinito. Il che comporta – non ci si lasci turbare dalla grandezza del tema – che per complemento sia anche lo studio del finito. Dal che discende un interesse specifico non solo culturale degli insegnanti per il contenuto di questa teoria.

Continuiamo a menzionare in particolare gli insegnanti, tra i laureati in matematica, perché sono quelli più abbandonati a sé stessi. Ma si potrebbe dire che il contenuto che viene proposto in questo libro rappresenta quello che dovrebbe conoscere non un matematico attivo – che dovrebbe conoscere molto di più – ma un laureato in matematica; o piuttosto quello che dovrebbe ricordare dai suoi studi universitari.

Non si può certo avere la pretesa di porre rimedio alla situazione con alcune lezioni. L'esposizione che segue si propone come un aiuto a chi individualmente voglia colmare una grave lacuna della sua cultura. Naturalmente per imparare qualsiasi argomento bisogna studiare, in modo sistematico, svolgendo le dimostrazioni e risolvendo gli esercizi. I libri di testo e i corsi dedicati servono a questo scopo. Le presenti lezioni sono solo una guida per orientarsi nello studio individuale e non sostituiscono un manuale istituzionale[7]. Tanto

---

[6] Russell ha a lungo cercato di dimostrare l'esistenza dell'infinito. Dedekind era convinto di averlo fatto.

[7] Un libro di primo livello non molto impegnativo è G. Lolli, *Dagli insiemi ai numeri*, Bollati Boringhieri, Torino, 1994. Altrimenti in inglese la scelta è ampia, segnaliamo: H. B. Enderton, *Elements of Set Theory*, Academic Press, London, 1977, o Y. N. Moschovakis, *Notes on Set Theory*, Springer, New York, 1994. Per la ricca e intelligente scelta di esercizi consigliamo A. Shen e N. K. Vereshchagin, *Basic Set Theory*, Student Mathematical Library, vol. 17, AMS, Providence R. I., 2002.

meno costituiscono una risposta alla difficoltà richiamata in apertura della eventuale trasmissione didattica.

Nel testo vengono indicati gli argomenti di maggior rilievo, che costituiscono lo scheletro della teoria; sono offerti alcuni commenti sui risultati più significativi; vengono segnalati anche temi da non approfondire – pur conoscendone l'esistenza – perché di interesse solo per lo specialista; sono presentate, magari addirittura con pignoleria formale, alcune dimostrazioni che si ritiene siano utili a rilevare la delicatezza e le sottigliezze di certi passaggi critici[8]; sono proposti, come istruzioni per l'uso, alcuni esercizi che potrebbero essere presentati anche a studenti delle scuole secondarie.

All'autore corre l'obbligo di avvertire che la concezione del libro è speculativa, in quanto gli impedimenti sopra descritti ostacolano una sperimentazione preliminare.

Il lettore noterà che non è dato molto spazio all'argomento delle successioni, che potrebbe sembrare strano in un libro sull'infinito matematico, ma il motivo è che si ritiene che un laureato in matematica debba averne una certa esperienza, ed essere in grado di inserirlo nella trattazione più generale. Non spiegheremo ad esempio che un punto di accumulazione di punti di accumulazione è un punto di accumulazione.

Siccome l'intenzione è quella di invogliare proprio a studiare la teoria, e non solo continuare a orecchiarla, o a farne la filosofia, la prima parte dedicata a cenni storici e ai fondamenti della matematica è volutamente schematica[9], e si suggerisce anzi di leggerla in un secondo momento, quando si sa di cosa si parla e non solo per sentito dire; o addirittura di rimandarne l'approfondimento ad altra occasione.

Torino, dicembre 2007 Gabriele Lolli

---

[8] Per capirli, è spesso sufficiente la spiegazione informale, ma quando si studia una teoria, oltre al contenuto bisogna anche apprezzare il tipo di ragionamento coinvolto, che è diverso da teoria a teoria. A un livello avanzato, è la dimostrazione il vero oggetto della matematica.

[9] Alcune nozioni definite nella seconda parte sono date per note.

Indice

Prima parte

1
Storia

1.1 Funzioni

Dati i sospetti e le preclusioni accennate nella presentazione, sarà bene ricordare che le radici della teoria degli insiemi affondano in un terreno squisitamente matematico, e in un terreno importante, anzi proprio quello che viene comunemente chiamato *mainstream* della disciplina, precisamente nello studio delle funzioni.

Il primo libro nel quale sono stati presentati gli elementi della nascente teoria degli insiemi è il trattato di Emile Borel (1871–1956) del 1898 intitolato "Teoria delle funzioni"[1]. Nella prima relazione generale sulla teoria degli insiemi[2], commissionatagli dalla *Deutsche Mathematische Vereinigung*, Arthur Moritz Schoenflies (1853–1928) vedeva la sorgente della teoria nel tentativo di chiarificazione di due concetti collegati, quello di argomento e quello di funzione. Per il primo, equivalente a quello di variabile indipendente, egli notava come fosse stato a lungo legato al concetto intuitivo e non ulteriormente definito del continuo geometrico, mentre ora gli argomenti variavano su insiemi di valori o di punti qualunque.

Per quel che riguarda il concetto di funzione, Schoenflies tracciava le grandi linee della evoluzione ottocentesca, a partire da Fourier (J.-B. Joseph Fourier, 1768–1830) e dalla sua affermazione che una funzione arbitraria può essere rappresentabile da una serie trigonometrica; dava il giusto rilievo alla definizione di Dirichlet (Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859), in cui il concetto generale di funzione è equivalente, detto in breve, a quello di una *Tabelle* arbitraria, antesignano della moderna definizione insiemistica; ricordava come l'esempio di Bernhard Riemann (1826–1866) di una funzione rappresentabile analiticamente ma discontinua in ogni punto razionale e continua in ogni

---

[1] E. Borel, *Leçons sur la Théorie des Fonctions*, Paris, 1898.

[2] A. Schoenflies, *Die Entwikelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Achter Band, Leipzig, 1900.

punto irrazionale avesse messo i matematici di fronte a possibilità per fondare le quali le rappresentazioni disponibili non erano sufficienti[3].

Nello studio generale delle proprietà delle funzioni, e in particolare della loro rappresentazione in serie, si era venuti a considerare come critici i punti di discontinuità o di minimo o massimo; si ricordi che nel Settecento una funzione con una discontinuità di prima specie in un punto, o con un punto di non derivabilità, o comunque definita da due espressioni diverse in due sottointervalli non era propriamente considerata una funzione, ma due. Quando si passò a considerare infiniti punti critici fu immediatamente evidente il ruolo cruciale della loro distribuzione spaziale, e iniziò lo studio degli insiemi infiniti di punti sulla retta, il vero inizio della teoria degli insiemi. Il primo lavoro di Georg Cantor (1845–1918) riguardava l'unicità della rappresentazione di Fourier per funzioni prima con un numero finito e poi con un numero infinito di punti critici[4].

1.2 Topologia della retta

Nello studio degli insiemi di punti Cantor mise le basi della topologia della retta, introducendo il concetto di insieme derivato (insieme dei punti di accumulazione) di un insieme, quindi quelli di insieme chiuso, perfetto, denso in sé, isolato, l'aderenza e la coerenza di un insieme e così via. Altri analisti contribuirono a questo arricchimento, Paul du Bois-Reymond (1831–1889) e Hermann Hankel (1839–1873) tra gli altri. Ma Cantor aveva uno strumento da lui inventato che gli permetteva uno studio più fine e più fecondo, l'iterazione transfinita dell'insieme derivato.

> La descrizione delle mie ricerche nella teoria degli aggregati ha raggiunto uno stadio in cui la loro continuazione viene a dipendere da una generalizzazione del concetto di intero positivo al di là dei limiti attuali[5].

Un nome che deve essere ricordato, non solo per i suoi contributi individuali, di cui parleremo, ma per i suggerimenti e le indicazioni, l'incoraggiamento e il sostegno dati a Cantor è quello di Richard Dedekind (1831–1916)[6].

---

[3] La più semplice funzione di Dirichlet, che vale 1 sui razionali e 0 sugli irrazionali ed è ovunque discontinua, è rappresentabile analiticamente come $\chi(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(\cos(2\pi n!\,x))^m$.

[4] Maggiori informazioni storiche, in particolare sul percorso di Cantor, si trovano in G. Lolli, *Dagli insiemi ai numeri*, cit. e nei riferimenti bibliografici ivi contenuti.

[5] Nel 1883, nel quinto di una serie di lavori sugli insiemi di punti della retta, in G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (a cura di E. Zermelo), Springer, Berlin, 1932, p. 165.

[6] L'epistolario pubblicato da J. Cavaillès e E. Noether (disponibile in francese in J. Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Hermann, Paris, 1962, e in italiano, a cura di P. Nastasi, nel n. 6 di *Note di Matematica, Storia, Cultura*, Pristem/Storia) è una lettura accessibile, interessante e toccante.

Nello stesso tempo che elaborava i concetti e i risultati matematici Cantor doveva inventare la terminologia e costruire il linguaggio; ad esempio furono introdotti allora per la prima volta simboli speciali per l'unione e per l'intersezione, e in seguito per il prodotto, anche se diversi da quelli ora universalmente adottati. La stessa parola "insieme" non era di uso consolidato, in tedesco si usava *Menge* ma anche *Punktmannigfaltigkeit*, o varietà di punti, in italiano "aggregato" o "gruppo".

1.3 Numeri infiniti

Gli argomenti che hanno fatto diventare matematica e indipendente la teoria degli insiemi sono tuttavia altri, e precisamente i cardinali e gli ordinali infiniti. La elaborazione di questa teoria non è un seguito diretto dello studio degli insiemi di punti della retta, anche se trova ivi la sua motivazione e le sue origini. Gli insiemi di punti non sono insiemi astratti nel senso che verrà a stabilirsi, ma insiemi i cui elementi sono oggetti matematici supposti già definiti e conosciuti in modo indipendente o prioritario, i numeri reali in questo caso. I cardinali e gli ordinali infiniti non c'erano ancora. Per arrivare ad essi Cantor ha avuto l'intuizione creativa di considerare insiemi astratti, o insiemi in sé, prescindendo dalla natura dei loro elementi.

Prima della introduzione dei numeri cardinali infiniti peraltro, la scoperta della possibilità di considerare infiniti diversi, di diversa potenza[7], nasce in Cantor con la dimostrazione che l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri reali non possono essere messi in corrispondenza biunivoca, di nuovo un fatto di genuino interesse analitico. Invece con i numeri naturali possono essere messi in corrispondenza biunivoca i numeri razionali, come anche (ed è stata per molti una sorpresa) i numeri algebrici[8]. Per il risultato sui reali Cantor, dopo una prima dimostrazione che sfruttava la continuità della retta, ha inventato il metodo diagonale, con una formulazione astratta che non dipende dalla natura degli enti e sarà quindi generalizzabile.

Secondo Schoenflies, la teoria degli insiemi è diventata una disciplina matematica proprio quando Cantor ha presentato il numerabile (cioè la cardinalità dell'insieme dei numeri naturali) come un ben definito concetto matematico, insieme alla classificazione degli insiemi infiniti secondo la potenza, e con la dimostrazione che i numeri algebrici sono numerabili, mentre il continuo non lo è.

La cardinalità definita con le corrispondenze biunivoche rivelava comportamenti inaspettati dell'infinito – al di là del fenomeno da lungo tempo notato come non più che una curiosità, che il tutto può essere equivalente a una sua

[7] "Potenza" è sinonimo di "cardinalità".

[8] Una dimostrazione sarà data in 3.7. I numeri algebrici sono le soluzioni delle equazioni algebriche a coefficienti interi.

parte – quale l'equipotenza del quadrato e di un suo lato[9]. Le prime osservazioni riguardavano sempre il continuo dei numeri reali. Per generalizzare, occorreva come si è detto un salto logico, quello di non considerare più gli insiemi, come erano stati fino ad allora, solo uno strumento linguistico – analogo ai predicati – di analisi di una realtà particolare autonoma oppure come un modo di riferirsi ai sistemi numerici abituali nella loro totalità – l'insieme dei numeri interi, razionali, ... – ma come un concetto in sé. Intuizione tanto più ardita quanto più vuoto di qualsiasi determinazione è il concetto di insieme.

La spinta è stata data dalla volontà di proseguire la catena dei numeri che si usano nella scansione di un processo: dopo aver ripetuto un'azione per

$$1, 2, \ldots, n \quad \text{volte, indefinitamente}$$

immaginare una tappa di assestamento, a uno stadio infinito chiamato ω, con un risultato che il processo dovrebbe effettivamente raggiungere invece di vederlo come limite,

$$1, 2, \ldots, n \quad \text{volte, } \ldots \omega\,,$$

e riprendere con

$$1, 2, \ldots, n \quad \text{volte, } \ldots \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots$$

La prosecuzione porta nel transfinito.

I numeri che servono a scandire i processi sono i numeri ordinali. Il primo caso che ha suggerito a Cantor la prosecuzione transfinita è stato il processo di formazione dell'insieme derivato A' di A.

Un insieme A di punti sulla retta come quello dei punti di ascissa $1/n$, per $n \geq 1$, ha come unico punto di accumulazione 0, e quindi $A' = \{0\}$ e $A'' = \emptyset$.

Se si considera l'insieme A dei punti $1/n + 1/m$, per $n, m \geq 1$, l'insieme A' contiene 0 e gli $1/n$, $n \geq 1$, quindi $A'' = \{0\}$ e $A^{(3)} = \emptyset$.

Così per ogni n si possono dare esempi di insiemi che hanno il derivato n-esimo finito, e il derivato $(n + 1)$-esimo vuoto.

Se nel piano in corrispondenza a ogni ascissa $1/n$, cioè sulla retta verticale di ascissa $1/n$, si considera un insieme il cui derivato n-esimo è finito e contiene $1/n$, si ottiene un insieme tale che tutti i suoi $A^{(n)}$ sono non vuoti.

Cantor prende allora a ω l'intersezione di tutti quelli ottenuti, che formano una catena discendente rispetto all'inclusione.

$$A', A'', \ldots, A^{(n)}, \ldots, \bigcap_n A^{(n)}\,.$$

[9] Quadrato e lato curiosamente hanno sempre giocato un ruolo importante nel progresso della matematica, a partire dall'incommensurabilità. Rappresentano il legame tra le diverse dimensioni.

L'intersezione può essere vuota o no; in questo caso si continua

$$A', A'', \ldots, A^{(n)}, \ldots, \bigcap_n A^{(n)}, \left(\bigcap_n A^{(n)}\right)' .$$

Se $\bigcap_n A^{(n)}$ è finito, $(\bigcap_n A^{(n)})'$ è vuoto, altrimenti no e la successione prosegue

$$A', A'', \ldots, A^{(n)}, \ldots, \bigcap_n A^{(n)}, \left(\bigcap_n A^{(n)}\right)', \ldots .$$

Ma bisognava passare dai simboli come ω e $\omega + 1$ a qualcosa che si potesse considerare un ente matematico. Non è stato facile perché erano del tutto nuovi. Dopo qualche indecisione[10], Cantor ha individuato la proprietà del buon ordine come cruciale, e ha definito quindi gli ordinali come particolari tipi di ordine, quelli per i quali ogni sottoinsieme non vuoto ha un minimo, in analogia ai numeri naturali. Il "tipo" è l'astrazione rispetto a isomorfismi. Nel confrontare e classificare ordini a meno di isomorfismo la natura degli elementi perde importanza e interesse; restano i contenitori apparentemente vuoti di contenuto, ma come si vedrà ben diversi l'uno dall'altro.

Con la definizione di ordinale Cantor ritrovava e nello stesso tempo generalizzava la nozione di numero naturale. Nel caso infinito tuttavia i due concetti di numero ordinale e di numero cardinale, che nel finito coincidono, divergono drammaticamente, e permettono anche di distinguere le diverse funzioni del numero, il contare come processo e la determinazione della quantità. Il fenomeno per cui dalla prospettiva dell'infinito si illumina meglio anche il finito si ripete frequentemente. In generale, concetti che in un dominio sono equivalenti e in un altro si scopre che non lo sono danno origine a una divaricazione di problematiche e teorie, che diventano interessanti anche nel vecchio dominio.

Le definizioni di Cantor e dei primi insiemisti, quella di numero ordinale come quella di numero cardinale, facevano uso di concetti e strumenti molto semplici, e considerati non problematici dai matematici; in particolare erano tutte definizione per astrazione da relazioni di equivalenza: un ordinale è una classe di equivalenza di tutti gli insiemi bene ordinati tra loro isomorfi; un cardinale è una classe di equivalenza di tutti gli insiemi tra loro equipotenti, o in corrispondenza biunivoca tra loro[11].

Quindi inizialmente sono i nuovi enti introdotti che rappresentano il contributo importante della teoria, non il modo di trattare la matematica in una prospettiva e con strumenti insiemistici, che all'epoca era al di là di

---

[10] Inizialmente proponeva soltanto di aggiungere in modo formale all'operazione "+1" una operazione di limite, generando simboli.

[11] Presto ci si accorgerà che tali classi sono troppo grandi per essere considerate insiemi, e si dovranno introdurre correzioni logiche, che non modificano tuttavia lo spirito della definizione.

ogni ragionevole aspettativa. In seguito si imparerà a usare in maniera più duttile la logica arricchita dal concetto di insieme, e questo diventerà l'aspetto predominante della infiltrazione degli insiemi nella matematica, che porterà a considerare la teoria degli insiemi una teoria fondazionale, come discuteremo nel secondo capitolo.

All'inizio, non c'è una teoria specifica, ma ci sono solo nuovi enti che affiancano quelli tradizionali, e sono enti matematici non perché siano insiemi o siano definiti con insiemi, ma perché hanno alcune proprietà della matematica tradizionale, precisamente analogie con i sistemi numerici tradizionali. Si potrebbe pensare a un arricchimento dell'aritmetica, con un nuovo tipo di numeri. Per la legittimazione della nozione di cardinalità, Borel chiedeva ad esempio che si provassero teoremi indispensabili, quale la confrontabilità di cardinali (si veda oltre, il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein).

Nello stesso tempo, Cantor aveva prodotto matematica nuova collaterale, per così dire ausiliaria rispetto al suo interesse per i numeri transfiniti, in particolare una messe di risultati sulle relazioni di ordine, alle quali aveva anche trasportato fin dove possibile nozioni topologiche ricavate dall'esperienza con la retta.

1.4 L'assiomatizzazione della teoria

La teoria degli insiemi viene assiomatizzata, per la prima volta da Ernst Zermelo (1871–1953) nel 1908, quindi nella forma definitiva nota come ZF (o ZFC con l'assioma di scelta) da Adolf Abraham Fraenkel (1891–1965) e Thoralf Skolem (1887–1963) nel 1922.

È stato sostenuto, e qualcuno pensa ancora che l'assiomatizzazione sia stata un riparo dai paradossi che si erano scoperti (da parte già di Cantor, quindi di Cesare Burali-Forti (1861–1931) e di Zermelo).

Ma il fatto è che orami tutte le teorie matematiche venivano presentate in forma assiomatica, soprattutto quelle che si riferivano a enti non tradizionali. La consapevolezza dei paradossi è stata uno stimolo a mettere per iscritto i principi che si potevano usare nel trattare l'infinito, ma non l'unico.

L'obiettivo di Zermelo, nel costituire questa teoria autonoma, era quello di avere un contesto unitario per lo studio degli argomenti che erano allora caratteristici della matematica, i concetti di numero, ordine e funzione. Si incominciava a intravedere che questi concetti fondamentali, pur nella loro autonomia, potevano essere presentati in un quadro unitario nel linguaggio che si stava imponendo nel giro di poco più di venti anni (Zermelo era un allievo di David Hilbert (1862–1943)).

C'è chi pensa tuttavia che una teoria fondamentale, come vedremo che viene ad essere considerata la teoria degli insiemi, non debba essere assiomatizzata, perché considera questo tipo di presentazione come un ripiego e un indebolimento delle sue ambizioni. Una teoria assiomatica infatti non determina in modo unico gli enti ai quali si riferisce: ha sempre più di un modello,