CIME Summer Schools

63

Gianfranco Capriz
Guido Stampacchia (Eds.)

New Variational Techniques in Mathematical Physics

Bressanone, Italy 1973

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

Gianfranco Capriz • Guido Stampacchia (Eds.)

New Variational Techniques in Mathematical Physics

Lectures given at a Summer School of the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Bressanone (Bolzano), Italy,
June 17-26, 1973

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10958-4 e-ISBN: 978-3-642-10960-7
DOI:10.1007/978-3-642-10960-7
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma 1974
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E.)

II Ciclo - Bressanone - dal 17 al 26 giugno 1973

« NEW VARIATIONAL TECHNIQUES IN MATHEMATICAL PHYSICS »

Coordinatori: Proff. G. Capriz, G. Stampacchia

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

PROBLÈMES A FRONTIÈRE LIBRE LIÉS A' QUESTIONS D'HYDRAULIQUE

CLAUDIO BAIOCCHI

Corso tenuto a Bressanone dal 17 al 26 giugno 1973

PROBLÈMES A' FRONTIÈRE LIBRE LIÉS A' QUESTIONS D'HYDRAULIQUE.

par C. Baiocchi - Université de Pavie et Laboratoire d'Analise Numérique du C.N.R. de Pavie.

N.1.- L'étude du mouvement des liquides à travers des matériaux poreux conduit en général à des "problèmes à frontière libre". Un cas typique peut être schématisé sous la forme suivante: sur une base imperméable deux bassins d'eau, de niveaux différents, sont en communication à travers une digue en matérieau poreux. L'eau filtre du niveau le plus élevé au niveau le moins élevé; et on veut déterminer la "partie mouillée" de la digue, ainsi que les grandeurs physiques (telles que la pression, la vitesse, le débit...) associées au mouvement.

On se bornera au cas plus simple (pour une description générale, ainsi que pour plus de détails sur le plan physique, ou consultera par exemple les textes 6 , 13 , 16 , 18); précisément on envisagera le cas correspondant à un fluxe stationnaire, irrotationnel, incompressible; le matérieau composant la digue est supposé isotrope, homogène et ne donnant pas lieu à des phénomènes de capillarité. On considèrera comme "Problème modèle" le cas où la digue est à base horizontale et à parois verticales planes et parallèles (la fig. 1 est

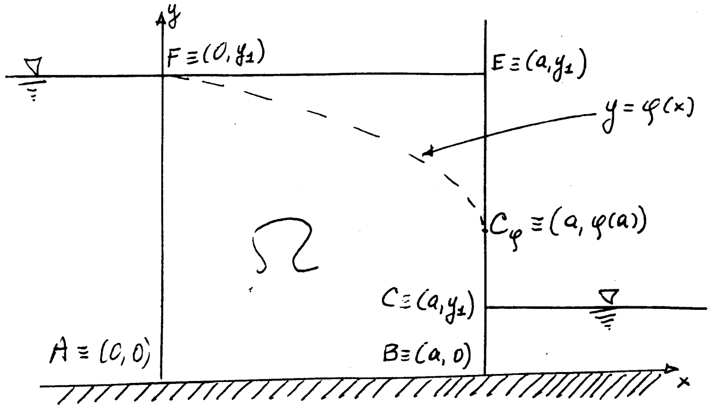

FIGURE N. 1

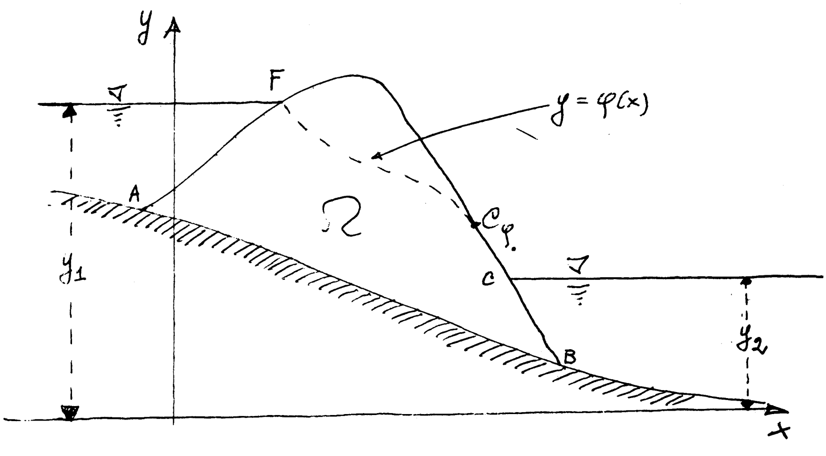

FIGURE N. 2

une section orthogonale aux parois: a est l'épaisseur de la digue, y_1 et y_2 sont les hauteurs des deux bassins).

Plus en général on désignera par D une section verticale de la digue (cf. fig. 2; dans la fig. 1 on a $D=]0,a[\times]0,y_1[$) et on supposera que, dans la direction orthogonale à la figure la digue est infiniment étendue et à section constante (de façon à étudier un problème bidimensionnel).

On désignera par Ω la "partie mouillée" de D; par $y=\varphi(x)$ l'équation du "bord supérieur" de Ω ; par $p(x,y)$, $\vec{V}(x,y)$ respectivement la pression et la vitesse de l'eau dans le point (x,y) de Ω (x axe horizontal, y axe vertical); par $u(x,y)$ la "hauteur piézométrique", à savoir:

$$u(x,y) = y + \frac{p(x,y)}{\gamma} \tag{1.1}$$

γ étant le poids spécifique du liquide. La loi de DARCY (cf. toujours les textes cités plus haut) assure que u est un "potentiel de vitesse", à savoir que l'on a:

$$\vec{V}(x,y) = -\tilde{k} \text{ grad } u \tag{1.2}$$

où $\tilde{k} = \frac{\gamma}{\mu} k$, μ étant la viscosité du liquide et k étant le coefficient de perméabilité [1].

---

[1] Sous les hypothèses faites k (et donc $\tilde{k}$) est constant; plus en général k est une fonction de (x,y) si la digue n'est pas homogène, et un tenseur symétrique si la digue n'est pas isotrope.

L'incompressibilité du liquide et la loi de continuité donnent alors

$$(1.3) \qquad \operatorname{div} \tilde{k} \operatorname{grad} u = 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

(en particulier u est harmonique dans Ω si le matérieau est homogène isotrope).

À la relation (1.3) on doit ajouter des conditions aux limites. D'abord, le long des parties de $\partial\Omega$ qui sont des lignes de courant doit s'annuller la dérivée normale de u:

$$(1.4) \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } AB\ ;$$

$$(1.5) \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } FC\ ;$$

ensuite, le long des parties de $\partial\Omega$ à contact avec l'athmosphère on doit avoir $p(x,y)=0$ donc (cf. (1.1)) $u=y$:

$$(1.6) \qquad u(x,y) = y \qquad \text{sur } FC_\varphi\ ;$$

$$(1.7) \qquad u(x,y) = y \qquad \text{sur } C_\varphi C\ ;$$

finalement, le long des parois à contact avec les bassins, la pression est donnée par la pression de l'eau qui est en haut; (1.1) donne:

$$(1.8) \qquad u(x,y) = y_1 \qquad \text{sur } AF;$$

$$(1.9) \qquad u(x,y) = y_2 \qquad \text{sur } BC.$$

Il s'agit d'un classique problème à frontière libre; sur un domaine inconnu Ω on doit résoudre le problème aux limites (1.4), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), (1.9) pour l'équation (1.3): on a donc des conditions surhaboundantes (cf. (1.5) et (1.6)) sur la partie incomme $\partial\Omega \cap D$ de la frontière de Ω.

N.2.- Une des premières méthodes proposées dans la litérature speécialisée pour la resolution du problème (1.3),....(1.9) est basée sur la théorie des fonctions de variable complexe et s'appuie sur la transformation:

(2.1) $x+iy \to p+iq \; ; \quad p = -\frac{\partial u}{\partial x} \, , \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}$

(transformation qui est conforme si le coefficient $\tilde{k}$ dans (1.3) est constant; (p,q) est le "plan de l'odographe"). Par exemple (pour plus de détails et de généralité cf. 16 , 18) dans le cas du Problème modèle illustré en fig. 1 le domaine Ω se transforme en un domaine Ω' du plan (p,q), dont le bord $\partial\Omega'$ est parfaitement connu et, sauf pour ce qui concerne la position sur $\partial\Omega'$ des points A',B' transformés de A,B,Ω' est indépendent de a, y_1, y_2; cela fornit au problème deux dégrés de liberté (en accord avec ce qui se passe sur le plan (x,y), où l'on peut choisir comme paramètres $\frac{y_1}{a}$, $\frac{y_2}{a}$, tout étant invariant par homotéties). A partir de cette famille à deux paramètres de domains Ω' la transformation $p+iq \to x+iy$ inverse de (2.1) fornit une famille de solutions Ω . Toutefois les paramètres que l'on peut se donner à priori sont ceux du plan de l'odographe (et non $\frac{y_1}{a}$, $\frac{y_2}{a}$); on ne sait pas démontrer la biunivocité de la corrèspondence entre les paramètres physiques et ceux de l'odographe; et d'ailleurs on aurait bésoin de "beaucoup de régularité" pour justifier les passages du plan physique à celui de l'odographe et viceversa!

Une méthode plus récente (2) est basée sur les considérations suivantes (on se borne toujours, pour simplifier, au cas du Problème modèle). A toute courbe "régulière" $y=\varphi_o(x)$ on associe le "sous-graphe " $\Omega_o=\{(x,y)\,|\,0<x<a;\ 0<y<\varphi_o(x)\}$; et sur Ω_o on résoud dans l'inconnue u_o le problème mêlé correspondant à (1.3), (1.4), (1.7), (1.8), (1.9) et <u>une seulement</u> entre (1.5) et (1.6); puis on modifie φ_o de façon à remplire l'autre entre (1.5) et (1.6); et on itère le procédé. Par exemple si pour évaluer u_o on impose (1.5), on posera $\varphi_1(x)=u_o(x,\varphi_o(x))$; le problème sera résolu (à savoir (1.6) aussi sera vérifiée) si l'on a $\varphi_1\equiv\varphi_o$; donc le problème à frontière libre correspond à trouver les points fixes de la transformation $\varphi_o \to \varphi_1$. Si, au contraire, on avait choisi (1.6) pour la détermination de u_o, on cherchera à minimiser, par rapport à φ_o, une convenable norme de la trace sur $y=\varphi_o(x)$ de la dérivée normale de u_o; plus en général on pourrait minimiser, par rapport au triplet Ω_o, φ_o, u_o une

---

(2) que l'on peut d'ailleurs appliquer à la resolution numérique d'une vaste classe de problèmes à frontière libre; cf. |11| pour une vue d'ensemble sur ces procédés.

fonctionelle du type:

$$\int_{\Omega_0} \frac{1}{2}\tilde{k}\ |\text{grad}\ u_0|^2 dx\, dy + \int_0^{y_1} [u_0(0,y)-y_1](u_0)_x(0,y)\,dy -$$
$$- \int_0^{y_2} |u_0(0,y)-y_2|(u_0)_x(a,y)\,dy - \int_{y_2}^{\varphi_0(a)} [u_0(a,y)-y](u_0)_x(a,y)\,dy$$
$$- \int_0^{a} [u_0(x,\varphi_0(x))-\varphi_0(x)]\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu_{\varphi_0}}\ (x,\varphi_0(x))\,dx \qquad ([3]).$$

Il s'agit de procédés qui peuvent être adaptés à la re solution numérique des problèmes envisagés ([4]) et qui, de ce point de vue, ont donné des résultats satisfaisants; toutefois, du point de vue théorique, on ne sait pas justifier ces procé- dés (par exemple on ne connait ni existence ni unicité de points fixes pour la transofrmation $\varphi_0 \rightarrow \varphi_1$; on ne connait pas l'unicité du point de minimum pour les fonctionnelles considérées, et on nesait pas si le minimum vaut zéro....).

N.3.- Par moyen d'un convénable changement de fonction inconnue j'ai donné en 1971 un théorème d'existence et unicité de la solution du Problème modèle, en ramenant ce problème à une inéquation variationnelle (cf. 1). Pour décrire ce résultat

([3]) Pour un traitement numérique basé sur ces idées cf. 17 .

([4]) Tout en rencontrant des difficultés de programmation non indifférentes: on doit resoudre une famille de problèmes mêlés sur des domaines qui, à chaque étape, varient en fonction de l'étape précédente.

il faut d'abord préciser le problème, en particulier pour ce qui concerne la régularité de la courbe $y=\varphi(x)$ et de la fonction $u(x,y)$ (de façon à donner un sens précis aux relations (1.3)...(1.9)). Pour faire ça il est commode ([5]) de faire usage, outre que du potentiel de vitesse u, de la "fonction de courant" $v(x,y)$ liée à u par:

$$(3.1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{dans} \quad \Omega \; ([6]);$$

et de remplacer les condition de type Neumann sur u (cf. (1.4), (1.5)) par des conditions de constance sur v; v étant déterminée à une constante additive près, ou traduira (1.5) par:

$$(3.2) \qquad v=0 \qquad \text{sur} \qquad FC_\varphi$$

et (1.4) en imposant l'existence d'une constante q ([7]) telle que:

$$(3.3) \qquad v=q \qquad \text{sur} \qquad AB$$

Ceci étant, on appellera <u>solution faible du Problème modèle</u> une quintuple $\{\varphi, \Omega, u, v, q\}$ telle que:

(3.4) $\varphi : x \to \varphi(x)$ est continue de $[0,a]$ dans $]y_2, y_1]$, décroissante et telle que $\varphi(0)=y_1$.

([5]) Mais non indispensable; dans |1| on a travaillé en termes de u, sans introduire v; la présentation donnée ici suit l'exposé |2|.

([6]) A' savoir $x+iy \to u+iv$ est holomorphe dans Ω; l'existence d'un telle v équivaut à (1.3) lorsque $\hat{k}$ est constant.

([7]) à un coefficient dimensionnel près le paramètre q fournit le débit de la digue.

(3.5) $\quad \Omega = \{(x,y) \mid 0<x<a; \quad 0<y<\varphi(x)\}$

(3.6) $\quad u,v \in C^{0}(\bar{\Omega}) \cap H^{1}(\Omega)$ (8); $q \in \mathbb{R}$

(3.7) $\left\{ \begin{array}{l} u,v \text{ satisfont (3.1) au sens de } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ et (1.6), (1.7),} \\ \text{(1.8), (1.9), (3.2), (3.3) au sens de } C^{0}(\bar{\Omega}) \end{array} \right.$

<u>Remarque 3.1</u>.- On va appeller <u>faible</u> une telle solution car, du point de vue physique, une solution sera acceptable seulement si elle satisfait d'autres relations, soit

qualitatives, soit quantitatives; par exemple la pression doit être positive dans Ω donc (cf. (1.1)):

(3.8) $\qquad u(x,y)>y \quad$ dans Ω;

et d'ailleurs φ,u,v devraient être "plus régulières"; on obtiendra des propriétés de ce type comme conséquence de la définition de solution faible.

<u>Remarque 3.2</u>.- Pour ce qui concerne la valeur de q on obtiendra la formule explicite:

(3.9) $$q = \frac{y_1^2-y_2^2}{2a}$$

connue sous le nom de "formule de DUPUIT" et usuellement obtenue comme formule approchée (et déduite en supposant que la courbe y= (x) est une parabole).

Un'idée naturelle pour étudier le problème consiste à prolonger u,v à $\bar{D}$ tout entier ($\bar{D}$, fermeture de D, est $[0,a]\times[0,y_1]$) en posant:

---

(8) Notations usuelles: u,v sont des fonctions continues sur la fermeture $\bar{\Omega}$ de Ω et dont les dérivées distributionnelles sont de carré sommable sur Ω.

$$(3.10)\quad \tilde{u}(x,y)=\begin{cases} u(x,y) & \text{pour } (x,y)\in\overline{\Omega} \\ y & \text{pour } (x,y)\in\overline{D}\setminus\overline{\Omega}\end{cases} ;\quad \tilde{v}(x,y)=\begin{cases} v(x,y) & \text{pour } (x,y)\in\overline{\Omega} \\ 0 & \text{pour } (x,y)\in\overline{D}\setminus\overline{\Omega}\end{cases}$$

et à voir si $\tilde{u},\tilde{v}$ satisfont un "problème bien posé" dans D; ça serait suffisant car, grâce au principe du maximum, on démontre aisément la validité de (3.8) et donc, connaissant $\tilde{u}$, on obtiendrait Ω en posant:

$$(3.11)\qquad \Omega=\{(x,y)\mid (x,y)\in D\ ;\quad u(x,y)>y\}.$$

Toutefois ce n'est pas le cas: aucun problème au limites sur $\tilde{u},\tilde{v}$ ne semble être bien posé; il faut donc encore transformer le problème.

Remarquons maintenant que l'on a:

$$(3.12)\qquad \tilde{u},\tilde{v}\in C^0(\overline{D})\cap H^1(D)$$

et que de (3.1) on déduit:

$$(3.13)\qquad (-\tilde{v})_y=(y-\tilde{u})_x;\quad (-\tilde{v})_x+(y-\tilde{u})_y=\chi_\Omega$$

où $(\ )_y$ et $(\ )_x$ désignent les dérivées partielles et χ_Ω est la fonction caractéristique de Ω. La première de (3.13) assure qu'il a un sens de considérer des intégrales curvilignes du type:

$$(3.14)\qquad w(P)=\int_F^P -\tilde{v}\,dx+(y-\tilde{u})\,dy\qquad \forall\, P\in\overline{D}$$

et l'on aura:

$$(3.15)\qquad w_x=-\tilde{v}\ ;\qquad w_y=y-\tilde{u};$$

donc, grace à (3.12) et à la deuxième de (3.13):

$$(3.16)\qquad w\in C^1(\overline{D})\cap H^2(D)$$

(3.17) $\Delta w = \chi_\Omega \qquad (\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$

Remarquons tout de suite que le valeurs de w sur ∂D sont connues: en effet on a (cf. (3.10), (3.15), (1.7), (1.8), (1.9)):

$$(3.18)\begin{cases} w = 0 & \text{dans } \bar{D}' \setminus \bar{\Omega} \quad \text{(donc sur FE)} \\ w_y = y - \tilde{u} = y - y_1 & \text{sur FA ;} \quad w_y = y - \tilde{u} = 0 \quad \text{sur EC} \\ w_y = y - \tilde{u} = y - y_2 & \text{sur CB} \end{cases}$$

et d'après (3.15), (3.3):

(3.19) $w_x = -\tilde{v} = -q$ sur AB; donc $w_{xx} = 0$ sur AB;

donc si l'on définit g sur ∂D par la formule:

$$(3.20)\begin{cases} g = 0 \quad \text{sur} \quad FE \cup EC \ ; \quad g = \dfrac{(y-y_2)^2}{2} \quad \text{sur CB;} \\ g = \dfrac{(y-y_1)^2}{2} \quad \text{sur AF;} \quad g \text{ linéaire sur AB} \end{cases}$$

on aura nécessairement

(3.21) $w|_{\partial D} = g$

<u>Remarque</u> 3.3.- De (3.20) on tire que la pente de g sur AB est donnée par $\frac{g(B)-g(A)}{a} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{2a}$; donc de (3.19), (3.21), on tire la validité de (3.9).

La connaissance de w fournirait automatiquement $\{\varphi, \Omega, u, v, q\}$; en effet on a vu que q est donnée par (3.9); d'après (3.11), (3.15) on tire

(3.22) $\Omega = \{(x,y) \mid (x,y) \in D;\ w_y(x,y) < 0\}$

et, encore de (3.15), on aura aussi:

(3.23) $u = y - w_y|_\Omega \ ; \quad v = -w_x|_\Omega \ ;$

finalement de (3.22) on évaluera φ par la formule:

(3.24) $\varphi(x) = \max\{y \mid (x,y) \in \bar{\Omega}\}$ $\quad 0 \leq x \leq a$

La caractérisation (3.22) de Ω n'est toute‿fois pas encore suffisante: en effet, si l'on cherche à combiner (3.17), (3.22) de façon à faire disparaître l'inconnue Ω on tombe sur l'équation non linéaire:

(3.25) $\Delta w \in H(-w_y)$

où $t \to H(t)$ est le graphe maximal monotone associé à la fonction de Heaveside; et le problème (3.25), (3.21) n'est pas bien posé (9).

En effet on peut faire mieux: de (3.18), (3.14) on déduit que l'on a identiquement:

(3.26) $w(x,y) = \int_y^{y_1} [\tilde{u}(x,t) - t]\,dt$ $\quad \forall (x,y) \in \bar{D}$

et alors, grâce à (3.8), on aura:

(3.27) $w(x,y) \geq 0$ $\quad$ dans $\bar{D}$

(3.28) $\Omega = \{(x,y) \mid (x,y) \in D;\ w(x,y) > 0\}$.

Maintenant la combinaison de (3.17), (3.28) donne:

(3.29) $\Delta w \in H(w)$

et le problème (3.29), (3.21) est bien posé: il admet une et une seule solution dans $H^1(D)$ (cf. par ex. le cours de M. MOREAU dans ce meme volume) donc (on a déjà vu que à partire

---

(9) Par exemple il admet comme solution la solution w du problème $\Delta w = 1$; $w_{|\partial D} = g$; ce qui donnerait (cf. (3.22)) $\Omega = D$.

de w on évaluait $\{\varphi,\Omega,u,v,q\}$):

(3.30) $\left\{\begin{array}{l}\text{le problème modèle admet au plus une solution}\\ \text{faible}\end{array}\right.$

Remarque 3.4.- On peut présenter le problème (3.29), (3.21) sous forme de problème de minimum en posant:

$$(3.31)\left\{\begin{array}{l}\mathcal{K}^+=\{z\,|\,z\in H^1(D);\ z_{|\partial D}=g\}\quad (g \text{ donnée par } (3.20))\\ J^+(z)=\frac{1}{2}\int_D |\text{grad } z|^2 dx\,dy+\int_D z^+\,dx\,dz\quad (t^+=\frac{|t|+t}{2})\end{array}\right.$$

et alors w est l'unique solution de:

$$(3.32)\quad w\in\mathcal{K}^+;\ J^+(w)\leq J^+(z)\qquad \forall z\in\mathcal{K}^+ ;$$

d'ailleurs (3.22) n'est pas la seule formulation variationnelle que l'on peut tirer des reinseignements que l'on a sur w; par exemple si l'on pose:

$$(3.33)\quad \mathcal{K}=\{z\,|\,z\in\mathcal{K}^+;\ z\geq 0\};\quad J(z)=\int_D\{\frac{1}{2}|\text{grad } z|^2+z\}dx\,dy$$

grâce à (3.27) on a aussi:

$$(3.34)\quad w\in\mathcal{K};\quad J(w)\leq J(z)\qquad \forall z\in\mathcal{K}$$

ou bien l'inéquation variationnelle équivalente:

$$(3.35)\quad w\in\mathcal{K};\ a(w,\,z-w)\geq L(z-w)\quad \forall z\in\mathcal{K}$$

avec $a(\xi,\mu)=\int_D \text{grad }\xi.\ \text{grad }\mu\, dx\,dy$ et $L(\xi)=-\int_D \xi\,dx\,dy$

Du point de vue numérique c'est la présentation (3.34) qui semble être la meilleure; d'ailleurs on a intérêt à exploiter beucoup de formulations car, voulant généraliser la méthode à des problèmes plus compliqués, on devra choisir, suivant le cas, l'une ou l'autre voie.

Pour ce qui concerne l'existence d'une solution faible du problème modèle on doit maintenant démontrer que, partant de l'unique solution w du problème (3.35) (par exemple; ou équivalentement de (3.34); ou de (3.32)) les formules (3.28), (3.24), (3.23), (3.9) fournissent une solution. Je n'entrerai pas dans les détails (pour lesquels je renvoye à 1), en me bornant ici à souligner que les phases essentielles de la démonstration sont

a) grâce aux théorèmes de régularité des solutions des inéquations variationnelles (cf. 14) la solution w de (3.35) satisfait:

(3.36) $\qquad w \in W^{2,p}(D) \qquad$ pour tout p fini;

en particulier on a (3.16); Ω défini par (3.28) est ouvert; et on a (3.17).

b) grâce à (3.36) on peut appliquer le principe du maximum à w_x, w_y et démontrer qu'il s'agit de fonctions non positives; d'ici on tire que Ω est borné supérieurement par une fonction φ qui satisfait (3.4).

Une fois obtenu le théorème d'existence et unicité des solutions faibles, se pose le problème de la régularité; toujours sans entrer dans les détails je me bornerai à remarquer que, en adaptant un discours de Caccioppoli (cf. |15|) on peut démontrer la relation:

$\varphi : x \to \varphi(x)$ est analytique sur $]0,a[$ (10)

et que, pour ce qui concerne la régularité de u,v, de (3.36) et (3.23) ou a $u,v \in W^{1,p}(\Omega)$ pour tout p fini; il s'agit d'une régularité optimale car on peut démontrer (cf. toujours |1|) que les relations $u,v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ sout fausses.

N.4.- On termine cet exposé par quelques considérations à caractère numérique et par une vue d'ensemble sur les généralisation de la méthode.

Pour ce qui concerne la résolution numérique des inéquations variationnelles on connaît des nombreux procédés à la fois mathématiquement rigoureux et pratiquement efficaces (cf. par ex. |12|). Dans |10| on a étudié l'inéquation variationnelle (3.35) par discrétisation en différences finies, et resolvant le problème discret par la méthode de S.O.R. et projection; la comparaison avec les méthodes "traditionnelles" indiquées au N.2 a montré un gain sensible à la fois du point de vue simplicité de programmation et du point de vue rapidité d'exé-

---

(10) Pour un traitement systématique du problème de la regularité de la "ligne de détachement" pour les solutions d'inéquations avec obstacle on consultera la conférence de D. KINDERLEHRER sur ce meme cours CIME.

cution (cf. toujours |10|). Il est toutefois à remarquer que la méthode est "correcte" mathématiquement dans le sens l'on obtient une suite $\{w_h\}$ de solutions approchées qui converge, dans une topologie convénable, vers la solution w de (3.35); mais si l'on prend, comme "approximation" de Ω , l'ensemble de positivité Ω_h de w_h (analoguement à (3.28)) la convergence de w_h à w n'assure pas, à priori, la convergence de Ω_h à Ω. Cette difficulté a été surmontée en |5| où l'on a montré que l'on a:

(4.1) $\qquad \Omega = \text{intérieur de } \liminf_{h \to 0^+} \Omega_h \; .$

Passons maintenant à quelques généralisations. Le cas de digues à perméabilité variable (à savoir dans lequel le coefficient $\tilde{k}$ figurant dans (1.3) n'est pas constant) pose de nombreuses difficultés. Dans |3|,|4| on a traité le cas où $\tilde{k}(x,y)$ est constant par morceaux par rapport à une des variables et constant par rapport à l'autre [11]; dans |7| on traite le cas de $\tilde{k}(x,y)$ de la forme $k_1(x).k_2(y)$ mais sous des hypothèses restrictives sur la régularité de k_1,k_2.

Le cas où l'on a plusieurs liquides immiscibles de densités différentes peut aussi être traité par la meme méthode; dans |3|,|4| on étudie le problème de la débouchée à la

---

[11] Ce qui correspond à digues en plusieures couches, horizontales ou verticales, de matérieaux différents.

mer d'une lame phréatique (on a donc, outre que l'usuelle surface libre, une surface de séparation entre la terre mouillée par l'eau douce et la terre mouillée par l'eau de mer); (3.25) est remplacée par une inéquation à "double obstacle", les deux frontières libres étant obtenues comme frontières des zones de contact avec les deux obstacles.

Dans |3|,|4| on a aussi étudié le cas où la parois à contact avec le premier bassin est imperméable le long du morceau $[c,y_1]$ avec $0<c<y_1$. Dans ce cas la valeur de q n'est plus une fonction explicite des données (à savoir on n'a plus une formule du type (3.9)) et la condition aux limites sur w pour ce qui concerne le morceau $\{(0,y)|c<y<y_1\}$, au lieu d'être de type dérivée tangentielle (cf. (3.18)) est de type dérivée normale. Sur la partie restante de ∂D, supposant connue la valeur de q, on peut évaluer les valeurs $g_q(x,y)$ de la trace de w; on peut alors construire, pour tout $q \in \mathbb{R}$, un convexe $\mathcal{K}_q^+$ du type (3.31) et la solution w_q du problème de minimum correspondant (analogue à (3.32)); les inéquations associées resolvent des problèmes aux limites de type mêlé (au lieu que de Dirichlet) pour lesquels, en général, la validité de (3.36) est fausse; dans |4| on a montré l'existence et unicité de une valeur q^* de q en correspondence à laquelle la solution w_{q^*} satisfait (3.36); ce qui a permis encore

de conclure avec un théorème de existence et unicité. Un algorithme numérique (à caractère physique-euristique) entroduit dans |3| pour l'approximation de q^*, à été complètement justifié dans |5|.

Pour ce qui concerne la possibilité de adapter la méthode à des digues de géométrie plus compliquée on peut remarquer que, si la parois adjacente au bassin de droite n'est pas verticale, devient fausse l'une des relations fondamentales de la méthode, à savoir la validité de (3.27), (3.28); donc on va supposer que la parois de droite est verticale [12].

Sous ces restrictions les relations obtenues au N.3 restant encore valables jusqu'à (3.18) inclue; toutefois (3.18) (et l'analogue de (3.19) qui donne $w_x=-q$ sur AB) fournissent pour w, au lieu que des données de Dirichlet, des données du type "dérivée oblique". L'étude théorique des inéquations correspondentes, dans le cas général, n'à pas encore été abordé; dans 3 , 4 on s'est borné aux cas particuliers correspondents à: base horizontale et parois inclinée; ou base inclinée et

---

[12] Des essais numériques faits avec parois de droite inclinée suggèrent que la méthode devrait marcher aussi dans ce cas, quitte à introduire des solutions "a plusieures paramètres"; par exemple, outre à la valeur du débit q, l'abscisse s du point C (on a s=a si la parois est verticale; cf., pour plus de details, |5|).

parois verticale ([13]). Il s'agit encore d'étudier une famille d'inéquations ([14]) dépendante du paramètre q, la bonne valeur du paramètre étant à individuer par moyen d'une "condition de régularité" de type (3.36). Dans |4| on est arrivé jusqu'au théorème d'unicité; le théorème d'existence a été donné dans |8| par une méthode "numérique", en passant à la limite sur des "solutions approchées".

D'autres problèmes analogues, tels que le problème modèle en présence de évaporation et le problème de l'eau qui filtre à travers les parois perméables d'un canal, ont été récemment étudiés par la méthode ici proposée (cf. respectivement 19 et 20).

Je voudrais finalment conclure en rappellant que la méthode décrite dans le N.3 pour transformer un problème à frontière libre dans une inéquation variationnelle (ou éventuellement dans une famille, à un ou plusieurs paramètres, d'inéquations) semble avoir un domaine d'applicabilité plus ample que

---

([13]) Plus récemment, dans |9| , on est arrivé à traiter le cas où le parois et la base sont toutes les deux inclinées; il s'agit d'un problème de "dérivée oblique qui saute", donc de type non variationnel.

([14]) Qui traduisent un problème de dérivée oblique, donc la forme a (ξ,μ) qui intervient dans (3.35) n'est plus symétrique et le problème n'est plus équivalent à un problème de minimum.

celui relatif aux mouvements de filtration; elle a en effet été adaptée à la résolution de problèmes à frontière libre qui sourgissent dans l'étude de problèmes de fluxe de fluides compressibles autour d'un obstacle (sans ou avec sillage) et, dans un contexte un peu différent (problème d'évolution au lieu que stationnair) à l'étude d'un problème de type Stéfan; mais pour ces problèmes je renvoye au cours de M. DUVAUT dans ce meme volume.

C. Baiocchi

B I B L I O G R A P H I E

1 C. BAIOCCHI- Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica. Annali di Matematica XCII (1972) p.107-127; note prêliminaire aux C. R. Acad. Sc. Paris, 273 (1971), p.1215-1217.

2 C. BAIOCCHI - Sur quelques problèmes à frontière libre. Astérique, 2 et 3 (1973), p. 69-85.

3 C. BAIOCCHI, V. COMINCIOLI, L. GUERRI, G. VOLPI - Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: numerical approach. Calcolo, X (1973), p.1-86.

4 C. BAIOCCHI, V. COMINCIOLI, E. MAGENES, G.A. POZZI - Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: existence and uniqueness theorems. Annali di Matematica XCII (1973), 1-82.

5 C. BAIOCCHI, E. MAGENES - Problemi di frontiera libera in idraulica. Atti del Convegno intern. "Metodi valutativi nella Fisica Matematica", Acc. dei Lincei, Roma, 1972.

6 J. BEAR - Dynamics of fluids in porous media. Amer. Els. Publ., New York, 1972.

7 V. BENCI - Su un problema di filtrazione attraverso un mezzo poroso. A paraitre aux Annalid di Matematica.

8 V. COMINCIOLI - A theoretical and numerical approach to some free boundary problems. A paraitre aux Annali di Matematica.

9 V. COMINCIOLI - Travail en préparation.

10 V. COMINCIOLI - L. GUERRI - G. VOLPI - Analisi numerica di un problema di frontiera libera connesso col moto di un fluido attraverso un mezzo poroso. Pubbl. n.17 du L.A.N., Pavia, 1971.

11 C.W. CRYER - On the approximate solution of free boundary problems using finite differences. J.A.C.M. 17 (1970) p.379-411.

12 R. GLOWINSKI - J.L. LIONS- R. TREMOLIERES - Résolution numérique des inéquations de la Mécanique et de la Physique. Livre à paraitre près DUNOD.

13 M.E. HARR - Groundwater and seepage. Mc Graw Hill, New York 1962.

14 H. LEWY, G. STAMPACCHIA - On the regumarity of the solution of a variational inequality. Comm. P.A.M. 22 (1969), p.153-188.

15 C. MIRANDA - Su un problema di frontiera libera. Symp. Math. 2 (1968), p.71-83.

16 U. MUSKAT - The flow of homogeneous fluid through porous media. Mc Graw Hill, New York 1937.

17 S.T. NEUMANN, P.A. WITHERSPOON - Finite element method of analysing steady seepage with a free surface, Wather Resources Research , 6 (1970), 889-897.

18 P. Ya. POLUBARINOVA-KOCHINA - The theory of groundwater movement (translaté du russe). Princeton University Press, Princeton 1962.

19 G.A. POZZI - On a free boundary problem arising from fluid through a porous medium, in the presence of evaporation. Travail à paraître.

20 S. TORELLI - Su un problema di filtrazione da un canale. Travail à paraitre.

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C. I. M. E.)

INTEGRALES CONVEXES DUALES

CHARLES CASTAING

Corso tenuto a Bressanone dal 17 al 26 giugno 1973

INTEGRALES CONVEXES DUALES

par

CHARLES CASTAING

(Univ. de Montpellier)

Introduction. Dans la première partie de ce papier on démontre deux théorèmes de dualité des intégrales convexes. Dans la deuxième partie, on donne deux théorèmes de fermeture directement liés au problème de râfle d'un convexe étudié par Moreau ([7], prop. 8.i).

En ce qui concerne l'étude systématique des intégrales convexes et leurs applications, on renvoie aux travaux de Rockafellar ([8], [9], [10], [11]), Castaing ([3]) et Valadier ([12]) .

I - Théorèmes de dualité des intégrales convexes

Notations. Soient T un espace localement compact polonais muni d'une mesure de Radon positive μ, E un espace de Banach réflexif, E' son dual fort. Une application v de T dans un espace topologique est dite μ-mesurable si elle est Lusin μ-mesurable ([1]). Si f est une fonction convexe semi-continue inférieurement sur E à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ non partout étale à $+\infty$, sa duale g est définie par

$$g(x') = \sup_{x \in E} [\langle x', x \rangle - f(x)] \quad (x' \in E')$$

Si K est un convexe fermé non vide de E, on désigne par $\delta(., K)$