Jörg Bewersdorff

Glück, Logik und Bluff

Jörg Bewersdorff

Glück, Logik und Bluff

Mathematik im Spiel –
Methoden, Ergebnisse und Grenzen

5., aktualisierte Auflage

POPULÄR

VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dr. Jörg Bewersdorff
Josef-Mehlhaus-Straße 8
65549 Limburg
mail@bewersdorff-online.de

www.bewersdorff-online.de

1. Auflage August 1998
2., durchgesehene Auflage Februar 2001
3., überarbeitete Auflage 2003
4., durchgesehene und ergänzte Auflage 2007
5., aktualisierte Auflage 2010

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.
Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Umschlagmotiv: Ulrike Weigel, www.corporatedesigngroup.de
Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0775-5

Einführung

Das Abenteuergefühl ist ein Element des Spiels. Wir setzen uns der Ungewissheit des Schicksals aus und erleben, wie wir es durch unsere eigene Tätigkeit in den Griff bekommen.
Alex Randolph, Spieleautor[1]

Die Ungewissheit im Gesellschaftsspiel

Warum spielen wir? Woher rührt der Reiz eines Spiels? Was bringt Menschen dazu, oft stundenlang zu spielen? Wo bleibt die Langweile, wenn immer wieder das gleiche Spiel gespielt wird? Wirklich das gleiche Spiel?

Wirklich gleich bleiben bei einem Spiel nur seine Regeln, Verlauf und Ausgang ändern sich hingegen von Partie zu Partie. Die Zukunft bleibt zunächst im Dunklen – wie im richtigen Leben, aber auch wie im Roman, im Spielfilm und beim sportlichen Spiel. Das sorgt für Unterhaltung und erzeugt zugleich Spannung.

Verstärkt wird die Spannung durch die Möglichkeit zum Gewinn. Jeder Spieler hofft zu gewinnen – um einen materiellen Gewinn zu erlangen, in der Hoffnung auf ein kurzes Glücksgefühl, als Selbstbestätigung oder im Hinblick auf Anerkennung. Egal, um was es „geht", jeder Spieler kann hoffen. Sogar ein Verlierer darf wieder Hoffnung schöpfen, wenn das Spiel weiter geht: „Neues Spiel – neues Glück". Dabei wirkt die Hoffnung auf einen Gewinn oft stärker als das Wissen über schlechte Gewinnchancen. Die Popularität von Kasino- und Lotteriespielen beweist das ständig neu.

Unterhaltung und allseitige Gewinnhoffnung haben dieselbe Basis, nämlich die Abwechslung im Spiel. Durch sie bleiben die Spieler lange im Ungewissen über die weitere Entwicklung einer Partie bis hin zu deren Resultat. Wie aber kommt es zu dieser Ungewissheit? Welche Mechanismen des Spiels verursachen sie? Bereits anhand von Spielen wie Roulette, Schach und Pokern lassen sich drei prinzipiell verschiedene Typen von Ursachen erkennen:

1. Zufall.
2. Vielfältige Kombinationen der möglichen Züge.
3. Unterschiedlicher Informationsstand der einzelnen Spieler.

1. Zufällige Einflüsse treten bei Gesellschaftsspielen in der Hauptsache beim Würfeln auf, ebenso beim Mischen von Spielkarten und -steinen. Der Verlauf einer Partie wird dann im Rahmen der Spielregeln sowohl von Entscheidungen der Spieler, als auch den Ergebnissen zufälliger Prozesse bestimmt. Dominiert der Einfluss des Zufalls gegenüber denen der Spieler, spricht man von Glücksspielen. Bei reinen Glücksspielen ist die Entscheidung eines

---

[1] Zitiert nach Spielbox 1985/1, S. 30. Alex Randolph ist Autor so bekannter Spiele wie Twixt, Geister und Hol's der Geier sowie Mitautor von Sagaland. Die vollständige Liste mit über fünfzig Titeln findet man im jährlich neu erscheinenden Taschenbuch *Spiel* des Friedhelm Merz Verlages, Bonn.

Spielers über die Teilnahme und die Höhe des Einsatzes bereits die wichtigste. Glücksspiele, die um Geld gespielt werden, unterliegen traditionell gesetzlichen Reglementierungen[I, 2].

2. Im Allgemeinen erhalten die Spieler während des Verlaufs einer Partie in genau festgelegten Situationen die Gelegenheit zu handeln. Zur Auswahl stehen dabei bestimmte, durch die Spielregeln fixierte Handlungsmöglichkeiten. Ein Spielabschnitt, der genau eine solche Handlungsmöglichkeit eines Spielers umfasst, wird Zug genannt. Bereits nach wenigen Zügen können sich die erlaubten Möglichkeiten zu einer kaum noch überschaubaren Vielfalt kombinieren, so dass die Konsequenzen eines einzelnen Zuges nur noch schwer zu erkennen sind. Genau diesem Umstand verdanken Schachaufgaben vom Typ „Matt in zwei Zügen" ihre Schwierigkeit. Spiele, bei denen die Ungewissheit ganz auf den vielfältigen Zugmöglichkeiten beruht, werden kombinatorische Spiele genannt. Bekannte Vertreter dieser Klasse von Spielen sind Brettspiele wie Schach, Go, Mühle, Dame, Halma und Reversi. Zu den Spielen, die sowohl kombinatorische wie zufällige Elemente besitzen, gehören Backgammon und „Mensch ärgere dich nicht", wobei der kombinatorische Charakter beim Backgammon deutlich ausgeprägter ist als beim „Mensch ärgere dich nicht".

3. Eine dritte Ursache, die bei Spielern eine Ungewissheit über den weiteren Spielverlauf verursachen kann, entsteht, wenn die Spieler unterschiedliche Informationen über den erreichten Spielstand besitzen und damit ein einzelner Spieler nicht unbedingt die Informationen hat, über die die Spieler insgesamt verfügen. So muss ein Pokerspieler seine Entscheidungen treffen, ohne dass er die Karten seiner Gegner kennt. Man könnte nun argumentieren, dass auch beim Backgammon gezogen werden muss, ohne die künftigen Würfelergebnisse zu kennen. Jedoch besteht zwischen Pokern und Backgammon ein gravierender Unterschied: Die weiteren Würfelergebnisse kennt kein Spieler, hingegen sind die bereits verteilten Karten einem Teil der Spieler bekannt – jeder sieht zunächst nur seine eigenen Karten. Spiele, deren Teilnehmer vorwiegend aufgrund solcher imperfekter Information im Ungewissen über den weiteren Spielablauf sind, werden strategische Spiele genannt; in reiner Form sind sie allerdings sehr selten. Imperfekte Information ist ein typisches Element der meisten Kartenspiele wie Pokern, Skat und Bridge. Bei den Brettspielen Geister und Stratego beruht die imperfekte Information darauf, dass man zunächst nur den Ort, nicht aber den Typ der gegnerischen Steine kennt[3]. Bei Diplomacy[4] und Papier-Stein-Schere[5] ziehen die Spieler gleich-

---

2 Römische Zahlen I, II, ... weisen auf zumeist umfangreichere Anmerkungen am Ende des Buches hin.

3 Geister und Stratego sind Brettspiele für zwei Personen, bei denen jeder Spieler von den Steinen seines Gegners nur die neutrale Rückseite sieht. Zunächst sind einem Spieler also nur die eigenen Spielsteine und die Positionen der gegnerischen Steine bekannt. Bei Geister, das auf einem Schachbrett mit je vier guten und schlechten Geistern auf beiden Seiten gespielt wird, werden nur die geschlagenen Figuren enttarnt. Bei Stratego ist die Schlagkraft einer Figur abhängig vom militärischen Rang. Daher muss eine Figur zum Zeitpunkt eines Schlagabtauschs dem Gegner offen gelegt werden.
Die einfachen Regeln von Geister und eine kommentierte Partie findet man in Spielbox 1984/3, S. 37-39. Taktische Hinweise zu Stratego sind in Spielbox 1983/2, S. 37 f. beschrieben.

4 Diplomacy ist ein Klassiker unter den Gesellschaftsspielen. Erfunden wurde es 1945 von Alan Calhamer. Unter Einschluss von Absprachen, die zwischen den Mitspielern getroffen werden können, sind entscheidende Regionen des Spielplans, der Europa vor dem Ersten Weltkrieg darstellt, unter eigene Kontrolle zu stellen. Der besondere Charakter von Diplomacy rührt daher, dass das Schließen und Aufkündigen von Bündnissen geheim gegenüber Dritten verhandelt werden kann. Einen Überblick über Diplomacy vermittelt ein Artikel in Spielbox 1983/2, S. 8-10 sowie ein vom Erfinder verfasstes Kapitel in David Pritchard (ed.), *Modern board games*, London 1975, S. 26-44.

zeitig, so dass jedem Spieler die Information über den aktuellen Zug der Gegner fehlt. Wie sich die imperfekte Information in einem Spiel konkret auswirkt, lässt sich am besten verdeutlichen, wenn die Spielregeln so abgeändert werden, dass ein neues Spiel mit perfekter Information entsteht. Bei Kartenspielen müssen dazu die Spieler ihre Karten offen auslegen; Poker würde auf diese Weise zur Farce, Skat bliebe immerhin ein kombinatorisch interessantes Spiel ähnlich der halb-offenen Zwei-Personen-Variante. Neben dem Spiel Papier-Stein-Schere, bei dem es sich um ein rein strategisches Spiel handelt, erkennt man auf diese Weise auch Pokern als ein überwiegend strategisches Spiel.

Bild 1 Die drei Ursachen der Ungewissheit in Gesellschaftsspielen: Gewonnen wird mit *Glück, Logik und Bluff*.

Zu fragen bleibt, ob die Ungewissheit über den weiteren Spielverlauf noch auf anderen, bisher nicht erkannten Ursachen beruhen kann. Untersucht man eine Vielzahl von Spielen nach solchen Ursachen, dann stößt man im Wesentlichen auf die folgenden Erscheinungen:

- Das Ergebnis eines Spieles kann von der körperlichen Geschicklichkeit und Leistungsfähigkeit abhängen. Außer den Sport- und Computerspielen, die sicherlich nicht zu den Gesellschaftsspielen gehören, ist beispielsweise Mikado ein Spiel, das manuelle Geschicklichkeit erfordert.
- Die Spielregeln an sich können den Spielern zum Teil unklar sein. Insbesondere in der Lernphase komplizierter Spiele kommt es zu solchen Situationen. In anderen Fällen ergeben sich Zweifelsfälle zwangsläufig aus der Natur des Spiels. So kann es beim Kreuzworträtsel-artigen Spiel Scrabble unklar sein, ob ein Wort zulässig ist oder nicht. Und selbst beim Skat bleibt das in Altenburg tagende Skatgericht bei der Klärung von Streitfragen nicht unbeschäftigt, auch wenn es meist nur mit nebensächlichen Details befasst ist.
- Ein unvollkommenes Gedächtnis vergrößert nicht nur beim Memory die persönliche Ungewissheit. Allerdings ist diese Art der Ungewissheit keine objektive Eigenschaft des betreffenden Spiels.

Im Vergleich zu Zufall, Kombinationsreichtum und unterschiedlichen Informationsständen können die zuletzt genannten Phänomene allesamt vernachlässigt werden. Keins von ihnen

[5] Zwei Spieler entscheiden völlig frei, aber gleichzeitig für je eine der drei Alternativen „Papier“, „Stein“ oder „Schere“. Haben beide Spieler die gleiche Wahl getroffen, endet die Partie unentschieden. Ansonsten übertrifft („schleift“) der „Stein“ die „Schere“, das „Papier“ schlägt („umwickelt“) den „Stein“, und die „Schere“ übertrifft („schneidet“) das „Papier“.

ist als typische und objektive Ursache für die Ungewissheit innerhalb eines Gesellschaftsspiels anzusehen.

Spiel und Mathematik

Will ein Spieler die Gewinnaussichten zu seinen Gunsten verbessern, muss er zunächst versuchen, seine persönliche Ungewissheit möglichst weitgehend zu überwinden, um dann die Konsequenzen seiner möglichen Handlungen abzuwägen. Wie er dabei vorzugehen hat, hängt selbstverständlich davon ab, welche konkreten Ursachen für seine Ungewissheit verantwortlich sind: Will ein Spieler beispielsweise entscheiden, ob er an einem Glücksspiel teilnehmen soll oder nicht, dann muss er die Gewinnchancen dahingehend abschätzen, ob sie im Vergleich zum Einsatz attraktiv sind. Ein Schachspieler dagegen hat zu seinem ins Auge gefassten Zug alle möglichen Gegenzüge zu prüfen und zu jedem von ihnen mindestens eine erfolgreiche Antwort parat zu haben. Ein Pokerspieler schließlich muss versuchen zu ergründen, ob das hohe Gebot seines Gegners auf einem guten Blatt basiert oder ob es sich nur um einen Bluff handelt. Alle drei Probleme lassen sich nicht nur im Einzelfall spielerisch, sondern auch in prinzipieller Hinsicht untersuchen. Welche mathematische Methoden dafür entwickelt wurden, soll im vorliegenden Buch anhand von möglichst plakativen Beispielen vorgestellt werden:

- Glücksspiele können mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung analysiert werden. Diese mathematische Disziplin, die heute in vielfältiger Weise in Natur-, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften angewendet wird, verdankt sogar ihre Entstehung im 17. Jahrhundert dem Wunsch, die Gewinnchancen von Glücksspielen berechnen zu können.
- Für die kombinatorischen Elemente in Spielen gibt es keine einheitliche Theorie. Jedoch können mit den unterschiedlichsten mathematischen Methoden sowohl prinzipielle als auch für Einzelfälle konkrete Resultate erzielt werden.
- Ausgehend von den strategischen Komponenten eines Spieles wurde eine eigene mathematische Disziplin begründet, die so genannte Spieltheorie. Spiele fungieren dort als Modell, auf deren Basis interaktive, ökonomische Prozesse in Abhängigkeit von getroffenen Entscheidungen untersucht werden.

Für alle drei Spieltypen und ihre mathematischen Methoden gilt, dass mit Hilfe von Computern ansonsten unerreichbare Anwendungen realisiert werden können. Aber auch unabhängig von der Entwicklung immer schnellerer Computer hat es bei den betreffenden mathematischen Theorien im 20. Jahrhundert große Fortschritte gegeben. Das mag den einen oder anderen mathematischen Laien vielleicht überraschen – besitzt die Mathematik doch oft völlig zu unrecht den Ruf, ihre Entwicklung sei schon lange abgeschlossen.

Der Ausgangspunkt der **Wahrscheinlichkeitsrechnung** liegt in Fragen wie derjenigen, welcher Spieler in einem Glücksspiel die besten Chancen hat zu gewinnen. Zentraler Begriff ist die Wahrscheinlichkeit, die als Maß für die Gewissheit interpretiert werden kann, mit der ein zufälliges Ereignis eintritt. Für Glücksspiele interessiert natürlich letztlich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass ein bestimmter Spieler gewinnt. Häufig muss aber nicht nur der Gewinn als solches, sondern zugleich auch seine Höhe berücksichtigt werden. Zu berechnen sind dann der durchschnittliche Gewinn und das mit dem Spiel verbundene Risiko. Aber nicht immer muss ein Spiel vollständig analysiert werden, beispielsweise dann, wenn nur unterschiedliche Zugmöglichkeiten gegeneinander abzuwägen sind und das im direkten Vergleich geschehen kann. Bei Wettrennen auf Würfelbasis stellen sich dabei Fragen der Art, wie lange ein Spielstein durchschnittlich dafür braucht, eine bestimmte Wegstrecke zurückzulegen. Besonders kompliziert sind solche Berechnungen dann, wenn wie beim Leiterspiel ein Spielstein auch wieder zurückfallen kann. Auch die Antwort auf die Frage nach der Bevorzugung von bestimmten Feldern beim Monopoly verlangt ähnliche Berechnungs-Techniken. Schwierig zu analysieren sind ebenso solche Glücksspiele, die ausgeprägte kombinatorische Spielelemente beinhalten. Erstmals bewältigt wurden solche Schwierigkeiten bei der Analyse des Black Jacks.

Kombinatorische Spiele, namentlich die traditionsreichen Vertreter Schach und Go, gelten als Spiele mit hohem intellektuellen Anspruch. Schon früh in der Entwicklungsgeschichte der Rechenmaschinen reifte daher der Wunsch heran, in Maschinen ebenbürtige Spielgegner finden zu können. Wie aber lässt sich das realisieren? Dafür benötigt werden Rechenverfahren, mit denen ausreichend gute Züge gefunden werden können. Kann die Güte eines Zuges aber überhaupt eindeutig bewertet werden oder hängt sie nicht immer von der gegnerischen Antwort ab? Immerhin ist der Suchverfahren und Computertechnik umfassende aktuelle Stand der Technik beeindruckend. Ein durchschnittlicher Schachspieler besitzt nämlich gegen die besseren Schachprogramme kaum noch eine Chance. Aber nicht nur Schach war Gegenstand des mathematischen Interesses. Für viele Spiele konnten, zum Teil auf überraschend einfache Weise, sichere Gewinnstrategien gefunden werden. Bei anderen Spielen kann seltsamerweise nur bestimmt werden, welcher Spieler theoretisch stets gewinnen kann, ohne dass bis heute eine Gewinnstrategie konkret bekannt ist. Einige dieser Spiele besitzen sogar Eigenschaften, die kaum eine Hoffnung bestehen lassen, je eine solche Gewinnstrategie zu finden.

In welcher Weise sich strategische Spiele prinzipiell von zufälligen und kombinatorischen Spielen unterscheiden, davon handeln die Grundlagen der **Spieltheorie**. Am Beginn steht eine mathematisch formale Definition eines Spiels. Charakterisiert wird ein Spiel durch seine Regeln, und diese umfassen die folgenden Angaben:

- Die Anzahl der Mitspieler.
- Zu jedem Spielstand die Aussage darüber,
  - wer am Zug ist,
  - welche Zugmöglichkeiten für den betreffenden Spieler bestehen und
  - auf Basis welcher Informationen er seine Entscheidung zu treffen hat.
- Für beendete Partien, wer wie viel gewonnen hat.
- Bei Zufallszügen, wie wahrscheinlich die möglichen Ergebnisse sind.

Als eigenständige Disziplin entstand die Spieltheorie erst 1944, als fast aus dem Nichts eine monumentale Monographie über die Theorie der Spiele erschien. Auch wenn sich dieses Werk an verschiedenen Stellen Spielen wie Schach, Bridge und Pokern widmet, sind für die Spieltheorie wirkliche Gesellschaftsspiele im Vergleich zu ökonomischen Prozessen eigentlich nachrangig. Dass sich Spiele überhaupt als Modell für reale Abläufe eignen, überrascht eigentlich nicht. Schließlich sind viele Spielelemente Konflikten um Geld, Macht oder gar Leben entlehnt. Insofern bietet sich die „Umkehrung“ geradezu an, dass heißt, die Interaktion von Individuen – ob in Konkurrenz oder in Kooperation – auf der Basis eines an Spielen angelehnten Modells zu beschreiben und zu untersuchen. Die weitgehende Idealisierung ist dabei genauso unvermeidbar, wie es bei anderen Modellen der Fall ist, etwa wenn in der Physik eine Masse als auf einen Punkt konzentriert angenommen wird.

Über dieses Buch

Entsprechend der beschriebenen Systematik gliedert sich der nachfolgende Text in drei Teile, in denen nacheinander zufällige, kombinatorische und strategische Spielelemente mathematisch untersucht werden. Jeder der drei Teile umfasst mehrere Kapitel, die jeweils ein abgegrenztes Problem – meist ein einzelnes Spiel oder Spielelement – zum Gegenstand haben.

Um einen möglichst breiten Leserkreis erreichen zu können, wurde bewusst von einer Darstellung abgesehen, wie sie im Hinblick auf Allgemeinheit, Formalismus und Vollständigkeit in Lehrbüchern üblich und angebracht ist. Im Blickpunkt stehen vielmehr Ideen, Begriffe und Techniken, die soweit vermittelt werden, dass sie auf andere Spiele übertragen werden können.

Aufgrund der problemorientierten Themenauswahl differiert das mathematische Niveau bei den verschiedenen Kapiteln zum Teil erheblich. Obwohl Bezüge auf vorangegangene Kapitel zahlreich sind, können die Kapitel oft unabhängig voneinander gelesen werden. Jedes Kapitel beginnt mit einer, manchmal mehr oder weniger rhetorisch gemeinten Frage, die zugleich Natur und Schwierigkeit des im betreffenden Kapitel behandelten Problems offenbart. Dem (der) mathematisch bestens vorgebildeten Leser(in)[6], für den (die) der hier gebotene Überblick in vielen Fällen zu oberflächlich und unvollständig bleiben muss, ermöglicht diese Struktur eine schnelle und gezielte Auswahl der für ihn (sie) interessanten Teile – die angegebene Fachliteratur weist den weiteren Weg. Ebenso zum Weiterlesen anregen sollen die angeführten Zitate sowie die Ausblicke auf mathematische Hintergründe und verwandte, außerhalb des eigentlichen Themenbereichs liegende Probleme und Sachverhalte.

Deutlichen Wert gelegt wird auf die historische Entwicklung, und zwar zum einen, weil zumindest der jüngere Aufschwung der Mathematik weit weniger bekannt ist als der der Naturwissenschaften, zum anderen, weil es durchaus spannend sein kann, persönlichen Irrtum und Erkenntnisgewinn der zeitraffermäßig verkürzten Entwicklung zuordnen zu können. Wie stark die mathematische Forschung auch im – nicht unbedingt repräsentativen – Bereich der Spiele gerade in den letzten Jahrzehnten vorangeschritten ist, macht ein Vergleich mit thematisch ähnlich abgegrenzten, im Detail allerdings oft anders ausgerichteten Zusammenstellungen deutlich, deren Erscheinen vor der Entdeckung vieler der hier beschriebenen Ergebnisse datiert ist:

---

6 *Der* Spieler, *der* Verlierer, *sein* fehlerhafter Zug alle diese Bezeichnungen sind im folgenden genauso wenig geschlechtsspezifisch gemeint wie *der* Hund, *die* Katze und *das* Pferd. Die Möglichkeit, mathematisch-formal in *dem* Spieler nicht *eine* Person, sondern auch in grammatikalischer Sicht geschlechtsneutral *das* Element einer entsprechenden Menge zu sehen, erschien unter dem Blickwinkel der Verständlichkeit genauso wenig sinnvoll wie der ständige Gebrauch doppelter Genera.

- René de Possel, *Sur la théorie mathématique des jeux de hasard et de réflexion*, Paris 1936, Reprint in: Hevre Moulin, *Fondation de la théorie des jeux*, Paris 1979
- R. Vogelsang, *Die mathematische Theorie der Spiele*, Bonn 1963;
- N. N. Worobjow, *Die Entwicklung der Spieltheorie*, Berlin (-Ost) 1975 (russ. Orig. 1973) – Hauptgegenstand ist die Spieltheorie als mathematische Disziplin, jedoch wird für die Theorien von Glücksspielen, kombinatorischen und strategischen Spielen in I. §§2-5 ein Abriss der historischen Entwicklung gegeben[7];
- Richard A. Epstein, *The theory of gambling and statistical logic*, New York 1967 (erweiterte Neuauflage 1977);
- Edward Packel, *The mathematics of games and gambling*, Washington 1981.
- John D. Basley, *The mathematics of games*, Oxford 1989.
- *La mathématique des jeux*, Bibliothèque pour La Science, Paris 1997 – Beiträge zum Thema Spiel und Mathematik der französischen Ausgabe von Scientific American, die nur zum Teil auch in anderen Länderausgaben veröffentlicht wurden.

Nicht versäumen möchte ich es, meinen Dank an all jene auszusprechen, die bei der Entstehung dieses Buchs behilflich waren: Elwyn Berlekamp, Richard Bishop, Olof Hanner, Julian Henny, Daphne Koller, Martin Müller, Bernhard von Stengel und Baris Tan erläuterten mir freundlicherweise ihre Forschungsergebnisse. Bernhard von Stengel verdanke ich darüber hinaus einige Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge und nicht zuletzt die Ermutigung, den Weg zu einer Publikation zu suchen. Angesichts des umfangreichen Quellenstudiums nicht vergessen werden soll die mir zuteil gewordene Unterstützung durch Mitarbeiter der von mir genutzten Bibliotheken – stellvertretend auch für die anderen seien hier nur die Bibliothek des Mathematischen Instituts in Bonn, die Bibliothek des Instituts für Diskrete Mathematik in Bonn sowie die Universitätsbibliotheken Bonn und Bielefeld genannt. Frauke Schindler vom Lektorat des Vieweg-Verlages und Karin Buckler haben viel dazu beigetragen, die Zahl *meiner* Fehler zu verringern. Dem Vieweg-Verlag, namentlich seiner Programmleiterin Ulrike Schmickler-Hirzebruch, habe ich dafür zu danken, diese sicher aus dem üblichen Rahmen fallende Zusammenstellung ins Verlagsprogramm aufgenommen zu haben. Last not least gilt mein ganz besonderer Dank meiner Frau Claudia, deren Verständnis ich in den letzten Jahren leider viel zu oft strapaziert habe.

Vorwort zur zweiten Auflage

Der erfreuliche Umstand, dass die erste Auflage nach nur zwei Jahren vergriffen ist, gibt mir Gelegenheit, zwischenzeitlich entdeckte Druckfehler zu beseitigen. Außerdem konnten einige Literaturverweise und Hinweise auf neuere Untersuchungen ergänzt werden. Danken möchte ich Hans Riedwyl, Jürg Nievergelt und Aviezri S. Fraenkel für ihre Anmerkungen.

Hinweisen möchte ich schließlich noch auf meine Web-Seite www.bewersdorff-online.de, auf der ich Ergänzungen und Korrekturen veröffentliche.

7 Darüber hinaus verdankt der Autor den Ausführungen Worobjows aus Teil I wesentliche Einsichten, wie sie insbesondere auch in die Einführung eingeflossen sind.

Vorwort zur dritten Auflage

Wieder habe ich aufmerksamen Lesern zu danken, die mich freundlicherweise auf Druckfehler in vorangegangenen Auflagen hingewiesen haben: Pierre Basieux, Ingo Briese, Dagmar Hortmeyer, Jörg Klute, Norbert Marrek, Ralph Rothemund, Robert Schnitter und Alexander Steinhansens. In dieser Hinsicht besonders danken möchte ich David Kramer, der derzeit das vorliegende Buch ins Englische übersetzt.

Die Notwendigkeit zu inhaltlichen Ergänzungen ergaben sich aufgrund von einigen zwischenzeitlich publizierten Arbeiten, darunter insbesondere Dean Allemangs Untersuchung über die Misère-Version von Nim-Spielen sowie Elwyn Berlekamps Idee des Environmental Go. Auch der Anregung von Lesern, neuere Ansätze bei Spielbaum-Suchverfahren zu ergänzen, habe ich gerne entsprochen.

Vorwort zur vierten Auflage

Für Hinweise auf Druckfehler habe ich diesmal Benno Grabinger und nochmals David Kramer zu danken. Ergänzt wurde ein Überblick über neue Ansätze zur Untersuchung der Misère-Version von Nim-Spielen, die Thane Plambeck 2005 veröffentlicht hat.

Vorwort zur fünften Auflage

Für Hinweise auf Druckfehler danke ich Winfried Borchardt, Wolfgang Götz und Sophie Rabe. Ergänzt wurden neuere Ergebnisse über die amerikanische Dame-Variante sowie ein Überblick über Machine-Learning- und Monte-Carlo-Ansätze bei der Spielbaumsuche.

JÖRG BEWERSDORFF[8]

[8] Unter mail@bewersdorff-online.de sind Hinweise auf Fehler und Unzulänglichkeiten willkommen. Auch Fragen werden, soweit es mir möglich ist, gerne beantwortet.

Inhaltsverzeichnis

1 Glücksspiele

1.1 Würfel und Wahrscheinlichkeit

Mit einem Würfelpaar kann die Summe 10 durch 5 + 5 oder 6 + 4 erreicht werden. Auch die Summe 5 lässt sich auf zwei Arten, nämlich durch 1 + 4 oder 2 + 3, erzielen. Trotzdem tritt die Würfelsumme 5 in längeren Versuchsreihen erfahrungsgemäß häufiger als die 10 auf. Warum?

Obwohl wir in unserer Umgebung in vielfältiger Weise dem Zufall ausgesetzt sind, waren es maßgeblich Fragen über Glücksspiele, die zu den ersten mathematischen Untersuchungen von zufälligen Erscheinungen führten. Abgesehen davon, dass es höchst attraktiv sein kann, Wege zum Gewinn zu suchen und zu finden, haben Glücksspiele auch den Vorteil, dass bei ihnen der Zufall in genau fixierten Bahnen wirkt. So ist die zufallsbedingte Ungewissheit, eine Sechs zu werfen, einfacher erfassbar als wenn es darum geht, ob am 12. Juli des nächsten Jahres ein Blitz in den Eiffelturm einschlagen wird. Das liegt in erster Linie daran, dass Glücksspiele unter gleichen Bedingungen reproduzierbar sind und theoretische Ergebnisse daher relativ einfach in Versuchsreihen überprüft werden können, wenn sie nicht ohnehin schon als Erfahrungstatsache bekannt sind.

Die ersten systematischen Untersuchungen von Glücksspielen stammen aus der Mitte des 17. Jahrhunderts. Punktuelle Untersuchungen gab es allerdings schon vorher. So wurde bereits im 13. Jahrhundert das eingangs gestellte Problem der Augensummen von Würfeln korrekt gelöst[9], was insofern eine besondere Beachtung verdient, da aus den nachfolgenden Jahrhunderten mehrere fehlerhafte Analysen zum gleichen Thema bekannt sind. Einen universellen Ansatz zur Beschreibung zufälliger Probleme schuf zuerst Jakob Bernoulli (1654-1705) mit seiner *Ars coniectandi*, der Kunst des Vermutens. Ihr Gegenstand ist es nach Bernoulli, „so genau wie möglich die Wahrscheinlichkeit der Dinge zu messen und zwar zu dem Zwecke, dass wir bei unseren Urteilen und Handlungen stets das auswählen und befolgen können, was uns besser, trefflicher, sicherer oder ratsamer erscheint"[10]. Im Auge hatte er dabei nicht nur Glücksspiele sondern auch Probleme des Alltags. Bernoullis Anspruch an eine mathematische Theorie des Zufalls ist noch heute aktuell. So formulierte der bekannte Physiker Richard Feynman (1918-1988) in kaum übertreffbarer Schlichtheit: „Die Theorie der Wahrscheinlichkeit ist ein System, das uns beim Raten hilft".

---

9 R. Ineichen, *Das Problem der drei Würfel in der Vorgeschichte der Stochastik*, Elemente der Mathematik, 42 (1987), S. 69-75; Ivo Schneider, *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933*, Darmstadt 1988, S. 1 und S. 5-8 (kommentierte Quellen). Einen historischen Überblick der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung findet man auch im Anhang des Lehrbuchs B. W. Gnedenko, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*, Berlin 1991.

10 Siehe dazu den umfassenden Nachdruck Jakob Bernoulli, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 107, Frankfurt/M. 1999, S. 233.

Zentrale Bedeutung in Bernoullis Theorie besitzt der Begriff der **Wahrscheinlichkeit**, nach Bernoulli ein „Grad von Gewissheit". Ausgedrückt wird dieser Grad an Gewissheit durch eine Zahl. Wie eine Länge misst auch die Wahrscheinlichkeit etwas, aber was genau und wovon überhaupt? Das heißt, was für Objekte werden gemessen, und welche Ausprägung von ihnen ist Gegenstand der Messung?

Nehmen wir zunächst einen einzelnen Würfel. Über ein einzelnes Würfelergebnis sind Aussagen möglich wie „Das Würfelergebnis ist gleich 5" oder „Die geworfene Zahl ist höchstens gleich 3". Je nach Wurf kann eine solche Aussage wahr oder unwahr sein. Anders ausgedrückt: Das durch die Aussage beschriebene **Ereignis** kann bei einem einzelnen Versuch eintreten oder auch nicht. Dabei tritt der Extremfall des unmöglichen Ereignisses, welches beispielsweise durch die Aussage „Das Würfelergebnis ist gleich 7" repräsentiert wird, nie ein. Dagegen tritt das absolut sichere Ereignis, beschrieben etwa durch die Aussage „Die geworfene Zahl liegt zwischen 1 und 6", in jedem Versuch ein.

Die Ereignisse sind nun die Objekte, die mit den Wahrscheinlichkeiten gemessen werden. Gemessen wird bei einem Ereignis die Gewissheit oder Sicherheit, mit der es in einem einzelnen Versuch eintreten kann.

Wie aber lässt sich diese Sicherheit messen? Messen heißt vergleichen, so messen wir Längen dadurch, dass wir sie mit einem Maßstab, etwa einem Lineal, vergleichen. Bei den Wahrscheinlichkeiten ist das nicht so einfach. Zum einen sind die zu messenden Objekte nicht materiell, zum anderen ist die zu messende Ausprägung, im Gegensatz zu Größen wie Geschwindigkeit, Temperatur oder Helligkeit, nicht direkt wahrnehmbar. Immerhin ist intuitiv klar, wie man die Sicherheit eines Ereignisses abschätzen kann: Man schreitet zur Tat, das heißt, man würfelt, und zwar möglichst oft! Je höher dabei der Anteil der Würfe ist, bei denen das Ereignis eintritt, als desto sicherer ist der Eintritt des Ereignisse in einem einzelnen Versuch anzusehen. Zahlenmäßig wird der gemessene Anteil durch die so genannte **relative Häufigkeit** erfasst, bei der die Zahl der Eintritte durch die Gesamtzahl der Würfe geteilt wird. Ergeben beispielsweise von 6000 Würfen 2029 Würfe mindestens eine Fünf, dann entspricht das einer relativen Häufigkeit von 2029/6000 = 0,338. Die Sicherheit, mindestens eine Fünf zu würfeln, ist damit gemessen, das Messergebnis lautet 0,338. Eine erneute Messung mit derselben oder einer anderen Wurfzahl würde kaum das gleiche, vermutlich aber ein ähnliches Ergebnis erbringen. Ein endgültiger Wert ist aber so nicht zu erhalten, und selbst die Angabe einer Messgenauigkeit ist bereits problematisch. Eindeutig messbar sind nur das absolut sichere Ereignis, das immer die relative Häufigkeit 1 besitzt, sowie das unmögliche Ereignis, für das sich stets die relative Häufigkeit 0 ergibt.

Will man bei unterschiedlichen Ereignissen die Sicherheit vergleichen, mit der sie eintreten, dann muss das nicht unbedingt experimentell geschehen. Möglich ist es vielmehr auch, Symmetrien zu berücksichtigen: So wie die sechs Flächen des Würfels geometrisch vollkommen gleichwertig sind, so ist es nahe liegend, den Eintritt der entsprechenden Ereignisse als gleich sicher anzusehen, das heißt, den sechs Wurfergebnissen die gleiche Wahrscheinlichkeit zu unterstellen. Auf einer Wahrscheinlichkeits-Messskala, die wie bei den relativen Häufigkeiten von der 0 des unmöglichen Ereignisses bis zur 1 des absolut sicheren Ereignisses reicht, ergeben sich dann für die sechs Wurfergebnisse, von denen immer genau eines eintritt, die Wahrscheinlichkeiten 1/6. Bernoulli begründete dies mit den Worten: „Wahrscheinlichkeit ist nämlich der Grad an der Unsicherheit, und sie unterscheidet sich von ihr wie ein Teil vom Ganzen."

Das Ereignis, mindestens eine Fünf zu werfen, umfasst die Würfelergebnisse Fünf und Sechs. Folglich wird ihr die Wahrscheinlichkeit 2/6 = 1/3 zugeordnet. Das Ereignis, eine gerade Zahl zu werfen, erhält entsprechend die Wahrscheinlichkeit 3/6 = 1/2.

Wahrscheinlichkeiten lassen sich immer dann wie beim Würfel finden, wenn ein System gleichmöglicher Fälle vorliegt. Pierre Simon Laplace (1749-1824) erklärte 1812 in seinem *Essai philosophique sur les probabilités* Fälle dann für gleichmöglich, wenn „wir über deren Eintreffen in der gleichen Ungewissheit sind“ und „keinen Grund zu glauben haben, dass einer dieser Fälle eher eintreten werde als der andere“. Sind die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments in diesem Sinne „gleichmöglich“, dann ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nach Laplace wie folgt definierbar: Die Anzahl der Fälle, bei denen das Ereignis eintritt, das heißt, die „günstig“ für das Ereignis sind, geteilt durch die Gesamtzahl der möglichen Fälle. Ist A ein Ereignis, dann entspricht die Definition von Laplace der Formel

$$\text{Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Gesamtzahl der möglichen Fälle}}$$

Auf die engen Beziehungen zwischen den relativen Häufigkeiten innerhalb einer Versuchsreihe und den Wahrscheinlichkeiten wurde bereits hingewiesen: Beide verwenden die Maßskala von 0 bis 1, und bei dem unmöglichen und dem absolut sicheren Ereignis sind ihre Werte immer gleich. Verläuft eine Versuchsreihe „ideal“ in dem Sinne, das gleichmögliche Fälle gleichhäufig eintreten, dann stimmen relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten sogar völlig überein. Bernoulli entdeckte aber noch eine weit interessantere Beziehung, das so genannte **Gesetz der großen Zahlen**. Es besagt, dass bei langen Versuchsreihen die relativen Häufigkeiten ungefähr gleich den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind. Dies ist zugleich die Bestätigung dafür, dass Wahrscheinlichkeiten bei Ereignissen wirklich die Sicherheit messen, wie man sie intuitiv versteht. Übersteigt beispielsweise bei einem Spiel die Gewinnwahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes, dann wird man bei genügend langem Spiel öfter gewinnen als verlieren. Bernoullis Gesetz der großen Zahlen macht sogar Aussagen darüber, wie genau Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten übereinstimmen. Wir werden darauf noch zurückkommen.

2. Würfel 1. Würfel	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

Tabelle 1 Die 36 Kombinationen von zwei Würfeln

Bei einem Würfel ist die Symmetrie der Grund dafür, dass die sechs Werte als gleichmöglich und damit gleichwahrscheinlich angesehen werden können. Es gibt eben keinen Grund dafür, dass – im Sinne von Laplace – ein Würfelwert eher erreicht würde als ein anderer. Bei zwei Würfeln gibt es insgesamt 36 Kombinationen der beiden Würfelwerte. Wichtig ist – und das war in der anfänglichen Fragestellung unterlassen worden –, dass Würfelkombinationen wie 2-3 und 3-2 unterschieden werden! In der Praxis ist der Unterschied zwar häufig nicht zu erkennen, etwa dann, wenn zwei gleichartige Würfel aus einem Becher geworfen werden.

Nimmt man aber zwei unterschiedlich gefärbte Würfel, so werden die Ereignisse 2-3 und 3-2 problemlos unterscheidbar.

Sind nun auch diese 36 Kombinationen gleichmöglich im Laplaceschen Sinne? Zunächst ist zu bemerken, dass es nicht ausreicht, einfach wieder nur auf die Symmetrie der Würfel zu verweisen. So wäre es denkbar, dass zwischen den Werten der beiden Würfel Abhängigkeiten bestehen, wie sie auftreten, wenn zwei Karten aus einem Kartenspiel gezogen werden. Zieht man aus einem Romméblatt mit 52 Karten eine Karte, dann ist die Wahrscheinlichkeit für jeden der 13 Kartenwerte gleich 4/52 = 1/13. Wird aber, ohne dass die erste Karte zurückgesteckt wird, eine weitere Karte gezogen, dann gelten für dessen Kartenwert neue Wahrscheinlichkeiten. So ist eine Wiederholung des zuerst gezogenen Wertes weniger wahrscheinlich, da er nur bei 3 der 51 verbliebenen Karten erreicht wird. Jeder der zwölf anderen Werte besitzt dagegen die Wahrscheinlichkeit von 4/51.

Verursacht wird die Änderung der Wahrscheinlichkeiten dadurch, dass das Kartenspiel aufgrund der ersten Ziehung seinen Zustand verändert hat. Vergleichbares ist bei einem Würfel wenig plausibel, da sein Zustand, anders als der des Kartenspiels, nicht von vorangegangenen Ergebnissen abhängt – Würfel besitzen eben kein „Gedächtnis“. Im Sinne von Laplace ist also, egal wie der erste Wurf ausgeht, kein Grund dafür zu erkennen, welcher Wert beim zweiten Wurf eher erreicht werden könnte als ein anderer. Damit können alle 36 Würfelkombinationen als gleichwahrscheinlich angesehen werden.

Die gestellte Frage lässt sich nun sofort beantworten: Ausgehend von dem Laplaceschen Ansatz ergeben vier der 36 gleichwahrscheinlichen Würfelkombinationen die Summe 5, nämlich 1-4, 4-1, 2-3 und 3-2. Die Summe 10 wird aber nur bei drei Kombinationen erreicht: 4-6, 6-4 und 5-5. Daher ist die Würfelsumme 5 wahrscheinlicher als die 10.

1.2 Warten auf die Doppel-Sechs

Wettet man darauf, in vier Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu erzielen, dann ist erfahrungsgemäß ein Gewinn eher wahrscheinlich als ein Verlust. Wie sieht es aber mit der Variante aus, bei der mit zwei Würfeln mindestens eine Doppel-Sechs erzielt werden muss? Wie viele Versuche müssen eingeräumt werden, damit auch diese Wette empfehlenswert wird? Folgende Überlegung bietet sich an: Da eine Doppel-Sechs als eine von 36 gleichmöglichen Kombinationen nur ein Sechstel so wahrscheinlich ist wie eine Sechs mit einem Würfel, reichen sechsmal so viele Versuche. Somit scheint die Wette, in 24 Versuchen mindestens eine Doppel-Sechs zu erzielen, erfolgversprechend. Sollte man aber tatsächlich so wetten?

Ungefähr wie gerade beschrieben mag im 17. Jahrhundert der Chevalier de Méré (1607-1684) gedacht haben, im Urteil des Mathematikers Blaise Pascal (1623-1662) zwar „ein sehr tüchtiger Kopf“, aber eben kein Mathematiker („ein großer Mangel“). Zu de Mérés Hauptbeschäftigungen gehörte standesgemäß das Glücksspiel, und dabei verblüffte ihn die folgende Beobachtung: Während bei einem Würfel vier Versuche ausreichen, um erfolgversprechend auf mindestens eine Sechs wetten zu können, reicht bei zwei Würfeln die sechsfache Versuchsanzahl nicht! Der zweifellos nahe liegende Schluss, einfach die einzuräumende Versuchszahl entsprechend der geringer gewordenen Wahrscheinlichkeit zu vervielfachen, ist damit unzulässig.

De Méré, der sich sein „Pech“ nicht erklären konnte, wandte sich 1654 Hilfe suchend an den schon zitierten Pascal. Pascal, der damals einen Briefwechsel mit seinem Kollegen Pierre de Fermat (1601-1665) über Gewinnchancen in Glücksspielen führte, nahm de Mérés Problem darin auf. So blieb die Episode zusammen mit einem Teil der Briefe der Nachwelt überliefert[11]. Allgemein gilt der Briefwechsel heute als die Geburtsstunde der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung, auch wenn eine einheitliche Theorie, in deren Mittelpunkt der Begriff der Wahrscheinlichkeit steht, erst später durch Jakob Bernoulli ersonnen wurde. De Mérés Problem bereitete Pascal und Fermat übrigens keine Schwierigkeiten. Eine Erklärung für de Mérés Beobachtung ergibt sich nämlich einfach dadurch, dass man die Zahl der insgesamt möglichen Fälle mit derjenigen Zahl von Fällen vergleicht, bei denen gewonnen wird:

So gibt es insgesamt $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ Möglichkeiten, vier Würfelergebnisse miteinander zu kombinieren. Im Sinne von Laplace sind alle 1296 Würfelergebnisse gleichmöglich und daher gleichwahrscheinlich. Verloren wird, wenn keine Sechs geworfen wird. Dafür gibt es für jeden Wurf fünf Möglichkeiten, was insgesamt $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ Verlustkombinationen ergibt. Ihnen entgegen stehen $1296 - 625 = 671$ Gewinnkombinationen, so dass die Wahrscheinlichkeit eines Gewinnes mit $671/1296 = 0{,}518$ etwas größer ausfällt als die Verlustwahrscheinlichkeit, die nur $625/1296 = 0{,}482$ beträgt.

Bei 24 Würfen mit zwei Würfeln gibt es astronomisch viele Möglichkeiten, nämlich 36^{24}, das ist eine immerhin 38-stellige Zahl! Die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes beträgt $35^{24}/36^{24}$, einfacher zu berechnen in der Form $(35/36)^{24} = 0{,}5086$. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist diesmal kleiner, nämlich gleich 0,4914, genau wie es de Méré erfahren musste.

Die auf Laplace zurückgehende Wahrscheinlichkeitsformel, bei der die Anzahl der für ein Ereignis günstigen Fälle durch die Gesamtzahl aller Fälle geteilt wird, ist zwar im Prinzip sehr einfach, jedoch erweist sie sich in der Praxis oft als unhandlich, etwa wenn es wie im Beispiel astronomisch viele Kombinationsmöglichkeiten gibt. In solchen und ähnlichen Situationen ist es praktischer, die Formeln des so genannten Multipliaktions- beziehungsweise Additionsgesetzes zu verwenden. Beide Gesetze machen für Ereignisse, die in einem logischen Zusammenhang zueinander stehen, Aussagen über deren Wahrscheinlichkeiten. So lautet das **Multiplikationsgesetz** für unabhängige Ereignisse:

> Beeinflusst der Eintritt oder Nicht-Eintritt eines Ereignisses nicht die Wahrscheinlichkeit eines anderen Ereignisses – man nennt diese dann **unabhängig** voneinander –, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse eintreten, gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten.

Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfelpaar zwei gerade Zahlen zu werfen, gleich $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$. Natürlich erhält man das Resultat auch, wenn man die Zahl der günstigen Würfelkombinationen bestimmt: Bei einem einzelnen Würfel wird eine gerade Zahl mit der Wahrscheinlichkeit 1/2, das heißt in 3 von 6 Fällen, erreicht. Damit sind bei $3 \cdot 3 = 9$ der 36 gleichwahrscheinlichen Würfelkombinationen beide Werte gerade, was die Wahrscheinlichkeit $9/36 = 1/4$ ergibt. Wichtig ist, dass die günstigen Fälle beider Ereignisse nur deshalb zu gleichwahrscheinlichen Ergebnissen kombiniert werden können, weil sich die beiden Würfel gegenseitig nicht beeinflussen.

---

[11] Ivo Schneider (siehe Kapitel 1.1, Fußnote 9), S. 3 f. und S. 25-40.

Würfelt man einmal mit einem Würfelpaar, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, keine Doppel-Sechs zu erzielen, 35/36. Dass in 24 Versuchen nie eine Doppel-Sechs erscheint, ist daher aufgrund des Multiplikationsgesetzes mit der Wahrscheinlichkeit $(35/36)^{24}$ zu erwarten. Wie erhält man nun aus dieser Verlustwahrscheinlichkeit die gesuchte Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn? Dabei hilft das **Additionsgesetz**, das folgendermaßen lautet:

> Schließen sich zwei Ereignisse gegenseitig aus, das heißt, können die beiden Ereignisse in einem Versuch keinesfalls beide eintreten, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass eines der Ereignisse eintritt, gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.

Zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine gerade Zahl oder eine Fünf zu werfen, gleich $3/6 + 1/6 = 4/6 = 2/3$. Gewürfelt werden kann nämlich sowohl eine Zwei, Vier oder Sechs, als auch eine Fünf. So wie die Anzahlen der günstigen Fälle zu addieren sind, so müssen auch die Wahrscheinlichkeiten addiert werden. Ein Sonderfall des Additionsgesetzes liegt dann vor, wenn die beiden Ereignisse zueinander komplementär sind, das heißt, sich einerseits gegenseitig ausschließen und andererseits zum sicheren Ereignis ergänzen. Die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten ist immer gleich 1. Folglich ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, in 24 Versuchen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppel-Sechs zu werfen, gleich $1 - (35/36)^{24}$.

Mit Hilfe von Additions- und Multiplikationsgesetz ist noch ein interessanter Ausblick auf die allgemeine Situation des de Méré'schen Problems möglich: Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich p, so ergibt sich bei einer Versuchsreihe von m Versuchen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis mindestens einmal eintritt, mittels der Formel $1 - (1 - p)^m$. Um eine günstige Gewinnaussicht zu erhalten, muss dieser Wert mindestens gleich ½ sein. Das trifft dann zu, wenn die Anzahl m der Versuche mindestens

$$\frac{\ln 2}{-\ln(1-p)}$$

beträgt[12]. Näherungsweise ist dieser Bruch gleich $\ln 2 / p$ mit dem natürlichen Logarithmus $\ln 2 = 0{,}6931\ldots$, wobei sich der exakte Wert ergibt, wenn zusätzlich noch durch $1 + p/2 + p^2/3 + p^3/4 + \ldots$ geteilt wird[13]. Diese Korrektur ist insbesondere dann wichtig, wenn die Wahrscheinlichkeit p nicht allzu klein ist. Beispielsweise ist bei der Wahrscheinlichkeit von $p = 1/6$ durch 1,094 zu teilen. Hingegen kann bei kleineren Wahrscheinlichkeiten problemlos die Näherung $\ln 2 / p$ verwendet werden, so dass die notwendige Versuchszahl etwa umgekehrt proportional mit der Wahrscheinlichkeit wächst – so, wie es de Méré als allgemeines Gesetz anscheinend fast selbstverständlich voraussetzte.

Völlig abwegig war de Mérés Intuition also nicht. Zudem wurde sein Trugschluss in späterer Zeit noch oft übertroffen. Unter anderem wird nicht selten vermutet, bereits bei drei Versuchen mit einem Würfel beziehungsweise bei 18 Versuchen mit einem Würfelpaar betrage die Chance auf einen Treffer, das heißt eine Sechs beziehungsweise Doppel-Sechs, bereits 50%. Dabei wird schlicht übersehen, dass einige Würfelergebnisse im Verlauf der 18 Versuche mehrfach auftreten können, so dass dann insgesamt weniger als die Hälfte der mög-

---

12 Die Bedingung $1 \quad (1 \quad p)^m \geq ½$ wird dazu in der Form $(1 \quad p)^m \leq ½$ logarithmiert. Zu beachten ist, dass beide Logarithmen negativ sind.

13 Die Potenzreihe des natürlichen Logarithmus beträgt

$$\ln(1-p) = -p - \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} - \ldots$$

lichen Ergebnisse eintreten. Einen Fall, bei dem de Mérés Fehleinschätzung in spektakulärer Weise übertroffen wurde, erwähnt der amerikanische Glücksspielexperte John Scarne in seinem Buch *Complete guide to gambling*[14]: So soll ein Spieler – sich selbst im Vorteil wähnend – 1952 innerhalb von zwölf Stunden insgesamt 49000 Dollar bei Wetten darauf verloren haben, in jeweils 21 Würfen mindestens eine Doppel-Sechs zu erzielen. Tatsächlich ist die Gewinnwahrscheinlichkeit in Höhe von $1 - (35/36)^{21} = 0{,}4466$ deutlich geringer, als man vermutlich schätzen würde.

1.3 Lottotipps – „gleicher als gleich“?

Eine statistische Auswertung der insgesamt 1433 deutschen Lotto-Ausspielungen, die vom Oktober 1955 bis Anfang 1983 erfolgten, ergibt, dass – ohne Berücksichtigung der Zusatzzahlen – bei 76,4% der Ausspielungen mindestens eine der Zahlen von 1 bis 10 gezogen wurde. Getippte Zahlenreihen, die keine der Zahlen 1 bis 10 enthielten, hatten also allein aufgrund dieser Tatsache in 76,4% der Fälle keine Chance, einen Haupttreffer mit „Sechs Richtigen“ zu erzielen. Sollte man deshalb immer mindestens eine der Zahlen 1 bis 10 in seinem Lotto-Tipp berücksichtigen?

Das Zahlenlotto, das in Deutschland und in einigen anderen Ländern in der Form „6 aus 49“ gespielt wird, gehört heute zu den populärsten Glücksspielen. Und das nicht nur beim Publikum, sondern auch beim Staat, dessen Gewinn in der ungefähren Höhe des halben Einsatzes schon vor der Ziehung sicher ist. Entstanden ist das Lotto übrigens im 16. Jahrhundert in der Stadt Genua, wo damals jährlich fünf Senatoren per Los bestimmt wurden. Gleichzeitig konnte auf die zur Auswahl stehenden 110 Namen gewettet werden. Mit der Zeit verselbstständigte sich das Spiel und wurde dabei abstrahiert. Statt auf Namen setzte man nun auf Zahlen. Dem Siegeszug des Lottos konnten sich selbst die Regierungen des ehemaligen Ostblocks nicht entziehen[15]. Auch dort wurde das ursprünglich als kapitalistisch gebrandmarkte Spiel veranstaltet.

Aufgrund seiner Beliebtheit wurde das Lotto auch zum Gegenstand vieler Publikationen. In einem Lotto-Buch[16] wird die in der Fragestellung zitierte Auswertung wie folgt kommentiert:

> So gesehen muß man feststellen, daß Lotto eigentlich unlogisch ist. Wenn man darüber nachdenkt, ist es ganz einfach. Es haben nicht alle Zahlen beziehungsweise alle möglichen „Anfangszahlen“[17], die von 1 bis 44, die gleichen Chancen.
> Weil das so ist, haben nicht alle Tippreihen im Lottospiel die gleichen Chancen.
> ... wer Lotto spielt und dabei Reihen zusammenstellt, die mit einer Anfangszahl 11 und höher beginnen, verschenkt mehr als drei Viertel der Chancen, einen Sechser zu treffen. Selbst dann, wenn das Glück ihm eigentlich hold wäre. Er kann den Sechser deshalb nur

---

[14] John Scarne, *Complete guide to gambling*, New York 1974, S. 16.

[15] Die Entwicklung des Lottos in der DDR wird beschrieben in Wolfgang Paul, *Erspieltes Glück 500 Jahre Geschichte der Lotterien und des Lotto*, Berlin 1978, S. 190-192.

[16] Rolf B. Alexander, *Das Taschenbuch vom Lotto*, München 1983; Zitate: S. 26, S. 68 f.

[17] Mit „Anfangszahl“ ist die kleinste Zahl einer getippten Sechser-Reihe gemeint.

> in einem knappen Viertel aller Ausspielungen treffen, weil seine Spielreihe nach der Formel „6 aus 49“ schlicht unvollständig ist. Der Spieler, der hohe Anfangszahlen für seine Reihe wagt, gleicht dem Lotteriespieler, der mit einem Viertellos die auf ein ganzes Los entfallende Million gewinnen will. Er kann sie einfach nicht bekommen.

Fast ist man geneigt, den Argumenten Glauben zu schenken und seine Tippreihen immer mit einer der Zahlen 1 bis 10 anfangen zu lassen. Andererseits ist aber jede Zahl und damit auch jede Lottoreihe theoretisch „gleichmöglich“, wie Laplace formulierte. Und warum sollten gerade die Zahlen von 1 bis 10 und nicht andere Zehner-Gruppen wie

- 34 bis 43 oder
- 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44 und 49 oder
- 11, 16, 17, 22, 23, 25, 29, 32, 36 und 48

eine besondere Rolle spielen? Alles gut und schön, aber vielleicht doch nur graue Theorie? Schließlich kann das Ergebnis der statistischen Untersuchung doch nicht einfach ignoriert werden! Aber ist es wirklich so außergewöhnlich, wie es scheint? Und kann das statistische Ergebnis wirklich als Argument für die gegebene Empfehlung dienen?

Vergessen wir für einen Moment, dass die statistische Auswertung bereits vorliegt. Welches Ergebnis würden wir dann ungefähr erwarten? Das heißt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit und damit ungefähr die relative Häufigkeit dafür, dass eine Lottoausspielung mindestens eine der Lottozahlen 1 bis 10 enthält? Für eine Antwort könnte man einen Computer so programmieren, dass er alle Möglichkeiten und darunter die für das Ereignis „günstigen“ durchzählt. Dass es auch einfacher geht, verdanken wir einigen Formeln der **Kombinatorik**, einer mathematischen Teildisziplin, die sich mit den Möglichkeiten befasst, Dinge miteinander zu kombinieren oder anzuordnen. Der denkbar einfachste Fall betrifft die völlig freie Kombination von Merkmalen, etwa den Ergebnissen von zwei Würfeln: Jedes Ergebnis des einen Würfels kann mit jedem Ergebnis des anderen zusammentreffen, so dass es $6 \cdot 6 = 36$ Kombinationen gibt, wobei Würfelkombinationen wie 2-6 und 6-2 unterschieden sind.

Etwas komplizierter wird es, wenn Karten gemischt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, eine vorgegebene Anzahl von unterschiedlichen Karten anzuordnen? Handelt es sich nur um drei Karten, hier einfach 1, 2 und 3 genannt, dann sind die folgenden Reihenfolgen möglich:

$$1\,2\,3 \quad 1\,3\,2 \quad 2\,3\,1 \quad 2\,1\,3 \quad 3\,1\,2 \quad 3\,2\,1$$

Drei Karten lassen sich also auf 6 Arten sortieren, es gibt also 6 so genannte **Permutationen**. Bei 4 Karten gibt es bereits 24 und bei 5 Karten schon 120 Permutationen. Um diese Zahlen zu finden, müssen keineswegs alle Permutationen aufgelistet werden. So gibt es bei 5 Karten 5 Möglichkeiten für die erste Karte. Ist die erste Karte gewählt, kann die zweite Karte aus dem Rest von 4 Karten gewählt werden. Für die dritte Karte gibt es dann 3 und für die vierte Karte noch 2 Möglichkeiten. Am Schluss muss schließlich die einzig noch verbliebene Karte genommen werden. Die Zahl der Permutationen von 5 Karten oder anderen unterscheidbaren Dingen ist also gleich $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Die Anzahl von Permutationen hat eine so große Bedeutung, dass sie als eigenständige mathematische Operation interpretiert wird. Diese so genannte **Fakultät** wird mit einem Ausrufungszeichen „!“ abgekürzt: n!, gesprochen „n Fakultät“, steht für die Anzahl von Permutationen, die mit n unterschiedlichen Dingen gebildet werden können. Wie im Fall $n = 5$ berechnet man n Fakultät allgemein mit der Formel

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

was für die Zahlen n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Werte

$$1! = 1,\ \ 2! = 2,\ \ 3! = 6,\ \ 4! = 24,\ \ 5! = 120,\ \ 6! = 720$$

ergibt. Als praktisch hat sich die Festlegung des Wertes 1 für die Fakultät der Null erwiesen, das heißt

$$0! = 1.$$

Die 32 Karten eines Skatspiels können auf $32! = 32\cdot 31\cdot ...\ 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ verschiedene Arten gemischt werden, das ist eine immerhin 35-stellige Zahl, die selbst die vermutlich seit dem Urknall des Universums vergangenen Sekunden, eine 18-stellige Zahl, weit übertrifft:

$$32! = 263\ 130\ 836\ 933\ 693\ 530\ 167\ 218\ 012\ 160\ 000\ 000$$

So astronomisch diese Zahl ist, im Vergleich zu den 52! Permutationen eines Rommé- oder Poker-Spiels ist sie verschwindend klein: 52! ist nämlich eine 67-stellige Zahl – etwa so viel, wie es nach einer Schätzung Atome im gesamten Universum geben soll[18].

Beim Lotto werden, sieht man von der Zusatzzahl erst einmal ab, 6 von 49 Zahlen gezogen. Vergleichbare Auswahlen sind auch bei anderen Spielen üblich: Beim Pokern erhält ein Spieler 5 der 52 Karten, ein Skatspieler erhält 10 von 32 Karten. Allen Situationen gemeinsam ist, dass aus einer Gesamtzahl von unterscheidbaren Dingen eine festgelegte Zahl von Dingen zufällig ausgewählt wird. Auf die Reihenfolge, in der diese Dinge ausgewählt werden, kommt es dabei nicht an. Man spricht in solchen Fällen von **Variationen**.

Die Anzahl von möglichen Variationen kann ähnlich wie die von Permutationen bestimmt werden: Für die erste Kugel bei einer Lottoausspielung gibt es 49 Möglichkeiten. Wird die zweite Zahl gezogen, gibt es für diese noch 48 Möglichkeiten. Folglich können sich die ersten beiden Zahlen auf $49\cdot 48$ verschiedene Weisen miteinander kombinieren. Bei den anschließend gezogenen Zahlen verringert sich die Anzahl der Möglichkeiten jeweils um 1. Daher existieren insgesamt $49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44$ Sequenzen von 6 Lottozahlen, wobei sich einige Sequenzen nur in der Reihenfolge, nicht aber in den ausgewählten Zahlen unterscheiden. Dieser Sachverhalt lässt sich noch präzisieren: Jede Auswahl von 6 Lottozahlen kann als Permutation in insgesamt 6! = 720 Ziehungssequenzen auftreten, das heißt, die Zahl der Variationen beträgt

$$\frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{6!} = 13983816.$$

Damit gibt es knapp 14 Millionen mögliche Tippreihen beim Lotto. Folglich beträgt die Wahrscheinlichkeit, „Sechs Richtige“ zu tippen, etwa 1 durch 14 Millionen. Dass trotz der geringen Wahrscheinlichkeit fast jede Woche Glückliche zu verzeichnen sind, liegt einzig an der riesigen Zahl von abgegebenen Lottotipps, welche die Anzahl der Mitspieler aufgrund mehrfacher Tipps sogar noch übersteigt.

---

18 Wie stark Fakultäten wachsen, kann man gut anhand der so genannten Stirling'schen Formel sehen, mit der Fakultäten näherungsweise berechnet werden können. Die Stirling'sche Formel lautet

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

wobei der relative Fehler für größere Werte n sehr klein ausfällt. Beschreiben lässt sich die Qualität der Approximation dadurch, dass der Quotient aus n! und der Stirling-Näherung zwischen $e^{1/(12n+1)}$ und $e^{1/12n}$ liegt. Beispielsweise für n=32 erhält man die Näherung $2{,}6245\cdot 10^{35}$; das ist nur 0,26% zu wenig.

Die allgemeine Formel für die Anzahl von Variationen ergibt sich ganz analog zum Lotto-Beispiel: Werden aus n unterschiedlichen Dingen k Dinge ausgewählt, dann gibt es insgesamt

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

verschiedene Möglichkeiten einer Auswahl. Der Bruch, der sich immer zu einer ganzen Zahl kürzen lässt, wird **Binomialkoeffizient** genannt. In seiner Schreibweise

$$\binom{n}{k}$$

spricht man auch von „n über k". Die Zahl der möglichen Lottotipps beträgt

$$\binom{49}{6},$$

was genau den schon berechneten Wert ergibt.

Das Pascal'sche Dreieck

Die Gesamtheit der Binomialkoeffizienten lässt sich übersichtlich in einem Schema anordnen, das Pascal'sches Dreieck genannt wird:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \dots & & & & & \dots & & & & & \dots \end{array}$$

Dabei steht der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ in der (n+1)-Zeile an (k+1)-ter Stelle, beispielsweise findet man $\binom{4}{2} = 6$ als dritten Wert in der fünften Zeile. Der Clou des Pascal'schen Dreiecks besteht darin, dass alle Werte ohne jede Multiplikation berechnet werden können, da jede Zahl gleich der Summe der beiden über ihr stehenden Zahlen ist. Warum das funktioniert, lässt sich schnell erklären: Um von n Karten k auszuwählen, nimmt man entweder die erste Karte und wählt die anderen k-1 aus den verbleibenden n-1 Karten aus oder man nimmt die erste Karte nicht und nimmt alle k Karten aus dem Rest. Das entspricht der Gleichung

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Mit Binomialkoeffizienten ist es nun ein Leichtes, Wahrscheinlichkeiten beim Lotto zu berechnen. So gibt es unter den insgesamt knapp 14 Millionen möglichen Tipreihen nur $\binom{39}{6} = 3262623$, die sich bloß aus den 39 Zahlen von 11 bis 49 zusammensetzen. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit, dass alle sechs ausgespielten Zahlen größer oder gleich 11 sind, beträgt 0,2333. Nach dem Gesetz der großen Zahlen ist es also auf Dauer zu erwarten, dass der Anteil der Ziehungen, die mindestens eine Zahl von 1 bis 10 enthalten, etwa gleich

76,67% beträgt. Das Ergebnis der statistischen Untersuchung von 76,4% ist damit alles andere als ungewöhnlich.

Wenn das statistische Ergebnis schon nicht ungewöhnlich ist, wie sieht es dann mit der ausgesprochenen Empfehlung aus, mindestens eine der Zahlen 1 bis 10 bei einem Tipp zu berücksichtigen? Man kann sie getrost vergessen, da sie auf einem Fehlschluss beruht! Die Aussage, dass man bei einem Tipp ohne die Zahlen 1 bis 10 mit fast 77-prozentiger Wahrscheinlichkeit unter anderem deshalb keinen Sechser erzielen wird, weil mindestens eine der Zahlen 1 bis 10 gezogen wird, ist schlicht uninteressant. Damit wird nämlich nur ausgesagt, dass bei Tipps, welche die Empfehlung nicht berücksichtigen, die Wahrscheinlichkeit auf „Sechs Richtige” kleiner als 0,2333 ist. Aber das ist ohnehin klar, denn die Wahrscheinlichkeit auf einen Sechser ist noch viel kleiner, nämlich gleich 0,0000000715.

Nicht überzeugt? Stellen wir uns vor, wir hätten die Zahlen 22, 25, 29, 31, 32, 38 getippt. Da wir die Ziehung im Fernsehen nicht selbst verfolgen können, bitten wir einen Bekannten, die Lottozahlen für uns aufzuschreiben. Immer noch nicht überzeugt, ob es richtig war, keine Zahl bis 10 zu tippen, fragen wir unseren Bekannten zunächst: „Ist eine Zahl von 1 bis 10 dabei?“. In knapp 77% der Fälle ist der Traum von den Millionen mit einem „Ja“ als Antwort bereits beendet. So weit so gut. In den anderen knapp 23% – und hier irrte der zitierte Buchautor – bleibt die Gewinnhoffnung aber nicht gleich, sondern sie steigt. Schließlich haben wir ja nur noch 6 aus 39 Zahlen richtig zu tippen.

Nachdem wir uns davon überzeugen konnten, dass der aus dem Buch zitierte Ratschlag unbegründet ist, bleibt noch die Frage danach, was einen Spieler erwartet, der der Empfehlung trotzdem folgt. Zunächst ist natürlich zu bemerken, dass die entsprechenden Zahlenkombinationen zwar nicht „besser” sind, wie der Autor vermutete, aber ebenso wenig sind sie „schlechter”, das heißt unwahrscheinlicher, als die anderen. Insofern ist die Empfehlung im Hinblick auf die Gewinnwahrscheinlichkeit keineswegs schädlich. Berücksichtigt man aber, dass die Gewinnhöhen beim Lotto stets davon abhängen, wie viele Mitspieler eine Gewinnklasse treffen, dann ändert sich das Bild[19]. Jede Zahlenkombination, die häufig getippte Zahlen und Zahlenkombinationen beinhaltet, ist danach weniger empfehlenswert, da sie im Gewinnfall zu vergleichsweise niedrigen Gewinnhöhen führt. Beispielsweise ergeben, da viele Lotto-Spieler ihren Tipp aus Datumsangaben ableiten, Ziehungen mit der Zahl 19 vergleichsweise niedrige Quoten. Entsprechendes gilt für Ziehungen, in denen die Zahlen von 1 bis 12 beziehungsweise 1 bis 31 besonders oft vorkommen. Andere Vorlieben erklären sich, wie bei der Glückszahl 7, eher aus der mit der Zahl verbundenen Symbolik. Und auch die geometrische Verteilung der Zahlen auf dem Spielschein hat sicher einen Einfluss.

---

[19] Die Gewinnquoten differieren zum Teil erheblich. So hat es bei der Gewinnklasse „Sechs Richtige” bisher zweimal besonders niedrige Quoten gegeben. Bei der Ziehung am 18.6.1977 waren es 205 vermeintliche „Glückspilze”, die alle die sechs gezogenen Zahlen, nämlich 9, 17, 18, 20, 29 und 40 richtig getippt hatten. Die Gewinnquote betrug aber nicht die ersehnte Million, sondern nur vergleichsweise klägliche 30737,80 DM. Was war passiert? Viele Tipper, vor allem im nordwestdeutschen Raum, hatten es sich angewöhnt, diejenigen Zahlen zu tippen, die in Holland eine Woche zuvor gezogen worden waren. Dies war, wie sich dann zeigte, ein schwerer Fehler, natürlich nicht deshalb, weil eine direkte Wiederholung unwahrscheinlicher war als eine andere Zahlenreihe, sondern einfach deshalb, weil zu viele Mitspieler die gleiche Idee hatten. Bei einer anderen Ziehung, nämlich am 23.1.1988, ergaben sich sogar 222 Volltreffer. Dafür verantwortlich war wohl die Regelmäßigkeit der gezogenen Zahlenreihe: 24, 25, 26, 30, 31 und 32.

Die Gewinnklassen im Lotto

Auch die Chance, beim Lotto eine bestimmte Gewinnklasse zu erzielen, kann mit Hilfe von Binomialkoeffizienten leicht berechnet werden. Beispielsweise erreicht man genau dann 4 Richtige, wenn

- 4 der 6 getippten Zahlen und
- 2 der 43 nicht getippten Zahlen

gezogen werden. Dazu gibt es, kombiniert man die Möglichkeiten für die richtigen wie die falsch getippten Zahlen miteinander, insgesamt genau

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 15 \cdot 903 = 13545$$

Möglichkeiten. Das ergibt eine Wahrscheinlichkeit von 0,00097, ungefähr entsprechend 1/1032. Folglich bringt noch nicht einmal jeder tausendste Tipp 4 Richtige!

Gewinnklasse	Anzahl der Kombinationen	Wahrscheinlichkeit
6 Richtige	1	1/14 Mill.
5 Richtige mit Zusatzzahl	6	1/2,3 Mill.
5 Richtige	252	1/55491
4 Richtige	13545	1/1032
3 Richtige mit Zusatzzahl	17220	1/812
3 Richtige	229600	1/61
Verlust (Rest)	13723192	0,981
	13983816	

Aufgrund der zusätzlich ausgespielten „Superzahl“ unterteilt sich die höchste Gewinnklasse im Verhältnis von 9:1, so dass die Wahrscheinlichkeit für die höchste Gewinnklasse nur noch 1 zu 140 Millionen beträgt. Trotz des gestiegenen Umsatzes, nicht zuletzt auch aufgrund der deutschen Wiedervereinigung, wird so die höchste Gewinnklasse oft über mehrere Wochen nicht erreicht. Die dann nicht ausgespielten Gewinne bleiben in Form eines Jackpots für die nächste Ziehung stehen. 1994 erreichte dieser Jackpot immerhin einen Spitzenwert von 42 Millionen DM.

Hinweise darauf, welche Zahlen besonders oft getippt werden, lassen sich indirekt dadurch erhalten, dass man die wöchentlichen Gewinnquoten darauf untersucht, bei welchen gezogenen Zahlen sie höher und bei welchen sie niedriger ausfallen. Allerdings sind so aufgrund der vielschichtigen Einflüsse, etwa durch mehr oder weniger beliebte Teilkombinationen und einem nicht bei jeder Ziehung völlig gleichem Verhalten, nur eingeschränkte Aussagen zu erzielen[20]. Weit aussagekräftiger ist eine Auswertung, in der bei einer Ziehung des Jahres 1993 alle in Baden-Württemberg abgegebene Tipps einbezogen wurden[21]. Von

[20] Heinz Klaus Strick, *Zur Beliebtheit von Lottozahlen*, Praxis der Mathematik, 33 (1991), Heft 1, S. 15-22; Klaus Lange, *Zahlenlotto*, Ravensburg 1980, S. 61-110.

[21] Karl Bosch, *Lotto und andere Zufälle*, Braunschweig 1994, S. 201 ff.; Karl Bosch, *Glücksspiele: Chancen und Risiken*, München 2000, S. 57-70. Die Auswertung erstreckte sich über knapp 7 Millionen Tippreihen, so dass bei einer zufälligen Verteilung der Tipps jede der knapp 14 Millionen

diesen Tipps haben 80,7% eine Anfangszahl zwischen 1 und 10. Da davon ausgegangen werden kann, dass es sich bei diesem Wert nicht nur um eine Momentaufnahme handelt, sind die Kombinationen mit einer Anfangszahl von höchstens 10 weniger empfehlenswert. Sicher würde man dem zitierten Buch zu viel Ehre antun, wenn man das Verhalten auf seine Empfehlung zurückführen würde. Ursache ist sicher eher die schon genannte Vorliebe für Datumsangaben.

Pokern

Beim Pokern erhält ein Mitspieler fünf der insgesamt 52 Karten, dafür gibt es

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2598960$$

Möglichkeiten. Will man unter diesen knapp 2,6 Millionen Kartenkombinationen beispielsweise die Anzahl der „Doppel-Zwillinge“ bestimmen, geht man am besten wie folgt vor: Ein Doppel-Zwilling besteht aus 5 Karten mit insgesamt 3 unterschiedlichen Kartenwerten, von denen 2 zweimal vorkommen. Ein Beispiel ist

- Herz-*Vier*, Kreuz-*Vier*, Herz-*Bube*, Pik-*Bube*, Pik-Dame.

Eindeutig bestimmt wird ein Doppel-Zwilling durch die folgenden Angaben:

- Die beiden Kartenwerte der Zwillinge (im Beispiel Vier, Bube),
- der einmal vorkommende Wert (Dame),
- die beiden Farben des niedrigwertigen Zwillings (Herz, Kreuz),
- die beiden Farben des höherwertigen Zwillings (Herz, Pik),
- die Spielfarbe des einmal vorkommenden Wertes (Pik).

Die Zahl der möglichen Kombinationen erhält man nun, wenn man die Anzahlen, die sich für diese Merkmale ergeben, miteinander multipliziert. Zu berücksichtigen dabei ist, dass nicht alle Merkmale frei miteinander kombinierbar sind. Im Einzelnen gibt es

- zunächst $\binom{13}{2} = 78$ Möglichkeiten für die Kartenwerte der beiden Zwillinge,
- dazu jeweils 11 Möglichkeiten für den einmal vorkommenden Wert,
- für die beiden Farben des ersten Zwillings $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten,
- für die Farben des zweiten Zwillings ebenfalls 6 Möglichkeiten und
- 4 Möglichkeiten für die Farbe des einmal vorkommenden Wertes.

Zahlenkombinationen etwa 0,5-mal zu erwarten ist. Allerdings gibt es bei den Tippreihen stark ausgeprägte Favoriten, von denen 24 mehr als tausend mal getippt wurden. Die häufigste Tippreihe, bestehend aus den Zahlen 7, 13, 19, 25, 31 und 37, wurde sogar 4004-mal getippt! Weniger die Zahlen selbst bis auf die 25 allesamt Primzahlen dürften für diese Vorliebe verantwortlich sein. Vielmehr bilden diese Zahlen auf dem Spielschein eine fast vollständige Diagonale, die oben rechts beginnt. Hochgerechnet auf ganz Deutschland dürfte diese Tippreihe bei jeder Ziehung über 30000-mal getippt werden. Kaum einer der betreffenden Spieler wird wohl ahnen, wie gering seine Gewinnaussichten sind.
Ähnliche Ergebnisse in anderen Ländern wurden von H. Riedwyl gefunden. Siehe: Hans Riedwyl, *Zahlenlotto Wie man mehr gewinnt*, Bern 1990; Norbert Henze, Hans Riedwyl, *How to win more*, Natick 1998; Hans Riedwyl, *Gewinnen im Zahlenlotto*, Spektrum der Wissenschaft, 2002/3, S. 114-119.

Insgesamt existieren daher $78 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 123552$ Doppel-Zwillinge. Werden aus einem gut gemischten Kartenblatt fünf Karten zufällig ausgeteilt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, einen Doppel-Zwilling zu erhalten, gleich

$$123552/2598960 = 0{,}04754,$$

das heißt, etwa jedes 21. zufällig gezogene Blatt ergibt einen Doppel-Zwilling.

Die folgende Tabelle umfasst in der Reihenfolge der Wertigkeit die Anzahlen aller Poker-Kombinationen. Mit berücksichtigt ist auch die Würfelvariante, die mit fünf Würfeln gespielt wird, welche mit den Symbolen (Pik-)Neun, (Karo-)Zehn, Bube, Dame, König und (Kreuz-)Ass gekennzeichnet sind:

Poker-Kombination	Anzahl bei ...	
	5 Karten	5 Würfeln
Fünfling		6
Royal Flush (Zehn bis Ass einer Farbe)	4	
Straight Flush	36	
Vierling	624	150
Full House (Drilling und Zwilling)	3744	300
Flush (eine Farbe)	5108	
Straight (Straße: Werte in Reihenfolge)	10200	240
Drilling	54912	1200
Doppel-Zwilling	123552	1800
Zwilling	1098240	3600
Rest	1302540	480
	2598960	7776

Weiterführende Literatur zum Thema Lotto:

Norbert Henze, *2000mal Lotto am Samstag – gibt es Kuriositäten?*, Jahrbuch Überblicke der Mathematik, 1995, S. 7-25.

Glück im Spiel, Bild am Sonntag Buch, Hamburg, ca. 1987, S. 6-29.

Ralf Lisch, *Spielend gewinnen? – Chancen im Vergleich*, Berlin 1983, S. 38-54.

Günter G. Bauer (Hrsg.), *Lotto und Lotterie*, Homo Ludens – der spielende Mensch, Internationale Beiträge des Institutes für Spielforschung und Spielpädagogik an der Hochschule „Mozarteum" Salzburg, 7 (1997), München 1997.

1.4 Gerecht teilen – aber wie?

Zwei Spieler tragen ein Glücksspiel aus, das sich über mehrere Runden erstreckt, in denen die Gewinnchancen jeweils 50:50 sind. Den gesamten Einsatz soll der Spieler gewinnen, der als Erster vier Runden für sich entscheidet. Als der Spielstand 3:2 erreicht ist, muss das Match vorzeitig abgebrochen werden. Man einigt sich darauf, die Einsätze dem Spielstand entsprechend fair zu teilen. Aber welches Teilungsverhältnis ist fair?

Als so genanntes Teilungsproblem gehört die Fragestellung zu den Klassikern der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Unter anderem wird das Teilungsproblem ausführlich im schon erwähnten Briefwechsel zwischen Fermat und Pascal behandelt[22]. Versuche einer gerechten Lösung gab es aber schon früher[23], wobei meist vorgeschlagen wurde, den Einsatz im Verhältnis der gewonnenen Runden, im vorliegenden Fall also 3 zu 2, zu teilen. Das entspricht der kaufmännisch üblichen Verfahrensweise, gemäß der beispielsweise gemeinsam erwirtschaftete Erlöse geteilt werden. Andere Autoren vertraten dagegen die Ansicht, das Verhältnis müsse sich allein an den noch fehlenden Siegen orientieren. So muss im Beispiel der erste Spieler nur noch einen, der zweite Spieler dagegen zwei Runden für sich entscheiden. Das könnte dann zu einem Teilungsverhältnis von 2 zu 1 führen.

Sowohl Fermat als auch Pascal lösten das Teilungsproblem – mit zwei verschiedenen, allgemein anwendbaren Verfahren, deren Resultate stets übereinstimmen. Pascal beschreibt in seinem Brief vom 29.7.1654 einen Teilungsplan, der sich an den Spielchancen orientiert, wie sie sich bei einer fiktiven Fortsetzung des Spiels ergeben. So führt eine weitere Runde entweder zum Stand 4:2 oder dem Gleichstand 3:3. Im ersten Fall gewinnt der erste Spieler alles, während es im zweiten Fall zweifellos gerecht ist, den Einsatz zu halbieren. Der erste Spieler erhält also den halben Einsatz sicher und bei der verbleibenden Hälfte sind die Chancen der beiden Spieler, sie zu erhalten, gleich. Eine beim Spielstand 3:2 gerechte Teilung muss daher im Verhältnis 3:1 vorgenommen werden, das heißt, der erste Spieler erhält 75% des Einsatzes, der zweite 25%.

Ausgehend von dem erhaltenen Ergebnis können nun weitere Spielstände analysiert werden. So ergibt sich für den Spielstand von 3:1, auf den nach einer weiteren Runde einer der Stände 4:1 oder 3:2 folgt, ein Anteil für den ersten Spieler von 87,5%, nämlich das Mittel aus 100% (für 4:1) und 75% (für 3:2).

Das Prinzip, das hinter Pascals Argumentation steht, ordnet jedem Spielstand ein Teilungsverhältnis zu. Berechnet werden können die Teilungsverhältnisse nacheinander, wobei – wie gerade demonstriert – stets umgekehrt zur Chronologie des Spiels vorgegangen wird. Dabei handelt es sich bei den beiden Anteilen wie beispielsweise 0,75 und 0,25 um nichts anderes als die Gewinnwahrscheinlichkeiten, die beide Spieler besitzen. Das heißt, der Einsatz wird im Verhältnis der beiden Gewinnwahrscheinlichkeiten geteilt.

Eine elegante Idee, die beiden Gewinnwahrscheinlichkeiten direkt zu berechnen, stammt von Fermat und wird in dem oben genannten Brief von Pascal kurz erwähnt. Auch dabei wird davon ausgegangen, dass noch weitere Runden gespielt werden, allerdings diesmal gerade genau so viele, wie notwendig sind, damit das Spiel auf jeden Fall entschieden wird. Im untersuchten Beispiel werden daher noch zwei Runden – wieder rein fiktiv – ausgetragen, und zwar selbst dann, wenn die erste Runde bereits das Spiel entscheiden sollte. Bei den zwei Runden sind insgesamt 4 verschiedene Spielverläufe möglich, die alle untereinander gleichmöglich sind und daher die Wahrscheinlichkeit 1/4 besitzen. Nur im letzten der in Tabelle 2 zusammengestellten Fälle gewinnt der zweite Spieler das Match. Seine Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt daher nur 1/4, während der erste Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von 3/4 gewinnt.

[22] Ivo Schneider (siehe Kapitel 1.1, Fußnote 9), S. 3 f. und S. 25-40.

[23] Ivo Schneider (siehe Kapitel 1.1, Fußnote 9), S. 2 f. und S. 9-24.

nächste Runde	übernächste Runde
„1“ gewinnt	„1“ gewinnt
„1“ gewinnt	„2“ gewinnt
„2“ gewinnt	„1“ gewinnt
„2“ gewinnt	„2“ gewinnt

Tabelle 2 Mögliche Spielverläufe in zwei weiteren Runden

Natürlich kann auch für andere Spielstände entsprechend verfahren werden. Muss der erste Spieler noch n Runden für sich entscheiden, während seinem Gegner noch m Runden zum Gesamtgewinn fehlen, dann ist von n+m-1 fiktiven Runden auszugehen. Nach so vielen Runden – unter Umständen sogar schon vorher – hat nämlich ein Spieler sein Ziel erreicht, während es seinem Gegner keinesfalls möglich ist, schon genügend Runden gewonnen zu haben. Da es für das Resultat einer einzelnen Runde genau 2 Möglichkeiten gibt, kombinieren sich diese Einzelergebnisse in den n+m-1 fiktiven Runden zu insgesamt 2^{n+m-1} verschiedenen und untereinander gleichwahrscheinlichen Spielverläufen. Wie viele davon bringen dem ersten Spieler den Gewinn? Das heißt, wie viele Möglichkeiten gibt es für ihn, seine mindestens n angestrebten Gewinne zu erzielen?

Das ist zunächst eine rein kombinatorische Frage, die sich wie das Problem des vorhergehenden Kapitels mit Binomialkoeffizienten beantworten lässt: Ist k die Anzahl der vom ersten Spieler gewonnenen Runden, dann gibt es $\binom{n+m-1}{k}$ Möglichkeiten, diese k Gewinnrunden auf die n+m-1 Runden zu verteilen. Da der erste Spieler für einen Gesamtgewinn mindestens k = n Runden für sich entscheiden muss, gibt es dafür insgesamt

$$\binom{n+m-1}{n} + \binom{n+m-1}{n+1} + \binom{n+m-1}{n+2} + \ldots + \binom{n+m-1}{n+m-1}$$

Möglichkeiten. Teilt man diese Anzahl von günstigen Fällen durch die Gesamtzahl 2^{n+m-1} aller möglichen Fälle, dann erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Der erste Spieler, der mit dieser Wahrscheinlichkeit das Match gewinnt, erhält bei Spielabbruch einen Anteil in genau dieser Größe.

Muss der erste Spieler noch 4 Runden, sein Gegner nur noch 3 Runden gewinnen, dann ist der Anteil des ersten Spielers auf Basis 6 fiktiver Runden gleich

$$\frac{\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}}{64} = \frac{22}{64} = 0{,}34375.$$

Bei den Glücksspiel-Runden handelt es sich im Prinzip um eine Versuchsreihe, bei der ein Experiment, nämlich ein einzelnes Glücksspiel, mehrfach und unabhängig voneinander wiederholt wird. Der Gewinn einer Runde durch den ersten Spieler ist dann einfach ein Ereignis, dass eintreten kann oder auch nicht. Die Anzahl der gewonnenen Runden wird so zu einer Häufigkeit, mit der ein Ereignis innerhalb einer Versuchsreihe beobachtet werden kann. Natürlich muss die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nicht immer wie im hier untersuchten Fall 1/2 betragen. Für einen Ausblick auf die allgemeine Situation gehen wir daher davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis in einem einzelnen Versuch gleich p sei:

Wie groß ist nun beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass in 6 Versuchen das Ereignis genau zweimal beobachtet werden kann? Entsprechende Versuchsverläufe, bei denen das

Ereignis genau zweimal eintritt, sind in ihrer Abfolge auf so viele Arten denkbar, wie es möglich ist, die zwei positiven Versuche auf die insgesamt 6 Versuche zu verteilen, das sind $\binom{6}{2} = 15$. Da die Ergebnisse der einzelnen Versuche voneinander unabhängig sind, kann die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser 15 Versuchsverläufe mit dem Multiplikationsgesetz berechnet werden. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis im ersten und dritten Versuch eintritt, sonst aber nicht, gleich

$$p\,(1-p)\,p\,(1-p)\,(1-p)(1-p) = p^2\,(1-p)^4.$$

Berücksichtigt man alle Versuchsverläufe, die zum gleichen Endergebnis führen, erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis genau zweimal eintritt:

$$\binom{6}{2} p^2\,(1-p)^4 = 15\,p^2\,(1-p)^4.$$

Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit, in sechs Würfen zwei Sechsen zu erhalten, gleich

$$15\cdot(1/6)^2\cdot(5/6)^4 = 0{,}2009.$$

Allgemein ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei insgesamt n Versuchen das Ereignis k-mal eintritt, gleich $\binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}$. Unter Bezug auf diese Formel bezeichnet man die Häufigkeiten des Ereignisses allgemein als „binomialverteilt“ .

Die Formeln der **Binomialverteilung** stellen einen Zusammenhang her zwischen der eigentlich abstrakten Wahrscheinlichkeit, deren Wert aufgrund von Symmetrien festgelegt wurde, und der Häufigkeit innerhalb einer Versuchsreihe, die ganz konkret gemessen werden kann. Der unbestimmten Natur zufälliger Prozesse entsprechend ist auch diese Verbindung nicht frei von Ungewissheit, das heißt, die gemachten Aussagen beinhalten selbst wieder Wahrscheinlichkeiten. Allerdings lässt sich die Ungewissheit dadurch weitgehend überwinden, dass man die Aussagen für lange Versuchsreihen und eine Vielzahl von möglichen Häufigkeiten macht. Zum Beispiel kann man die Wahrscheinlichkeit, mit 6000 Würfen mindestens 900 und höchstens 1100 Sechsen zu werfen, dadurch berechnen, dass man die entsprechenden 201 Binomialterme addiert[24], das Ergebnis lautet 0,9995. Damit ist es fast sicher, in 6000 Würfen zwischen 900 und 1100 Sechsen zu erzielen.

Noch viel wichtiger als die quantitative Aussage ist das ihr zugrundeliegende Prinzip, nämlich das so genannte Gesetz der großen Zahlen: Die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses nähern sich im Verlauf einer Versuchsreihe immer weiter und immer sicherer der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses an. Wir werden darauf im nächsten Kapitel näher eingehen.

1.5 Rot und Schwarz – das Gesetz der großen Zahlen

Werden im Spielkasino beim Roulette zehn rote Zahlen hintereinander ausgespielt, setzt das Publikum erfahrungsgemäß kaum noch auf Rot. Der Grund ist nahe liegend: Nach dem Übergewicht roter Zahlen erwartet man einen „Ausgleich“, denn schließlich gibt es ja ein Ge-

24 Glücklicherweise gibt es einen wesentlich einfacher zu beschreitenden Weg, dessen Grundlage allerdings mathematisch anspruchsvoller ist und der daher jetzt noch nicht beschrieben werden kann. Näheres dazu findet man in Kapitel 1.13.