

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE
MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE
MATHÉMATIQUE

GROUPES
ET ALGÈBRES
DE LIE

Chapitre 9

 Springer

Réimpression inchangée de l'édition originale de 1982
© Masson, Paris, 1982

© N. Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007

ISBN-10 3-540-34392-X Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-34392-9 Springer Berlin Heidelberg New York

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 interdit les copies ou les reproductions destinées à une utilisation collective.

Toute représentation, reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: WMXDesign GmbH, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

Groupes de Lie réels compacts¹

Dans tout ce chapitre, l'expression « groupe de Lie » signifie « groupe de Lie de dimension finie sur le corps des nombres réels », l'expression « algèbre de Lie » signifie, sauf mention du contraire, « algèbre de Lie de dimension finie sur le corps des nombres réels », l'expression « algèbre de Lie réelle » (resp. « algèbre de Lie complexe ») signifie « algèbre de Lie de dimension finie sur le corps des nombres réels (resp. « ... complexes »).

On note G_0 la composante neutre d'un groupe topologique G . On note $C(G)$ le centre d'un groupe G , $D(G)$ son groupe dérivé, $N_G(H)$ ou $N(H)$ (resp. $Z_G(H)$ ou $Z(H)$) le normalisateur (resp. centralisateur) d'une partie H d'un groupe G .

§ 1. ALGÈBRES DE LIE COMPACTES

1. Formes hermitiennes invariantes

Dans ce numéro, la lettre k désigne l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soient V un k -espace vectoriel de dimension finie, Φ une forme hermitienne positive séparante² sur V , G un groupe, $\mathfrak{g}$ une $\mathbf{R}$ -algèbre de Lie, $\rho: G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ un homomorphisme de groupes, $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{gl}(V)$ un homomorphisme de $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie.

a) La forme Φ est invariante par G (resp. $\mathfrak{g}$) si et seulement si $\rho(g)$ est unitaire pour Φ quel que soit $g \in G$ (resp. $\varphi(x)$ est antihermitien³ pour Φ quel que soit $x \in \mathfrak{g}$).

¹ Dans tout ce chapitre les renvois à A, VIII se réfèrent à la nouvelle édition (à paraître).

² Rappelons (A, IX, à paraître) qu'une forme hermitienne H sur V est dite *séparante* (ou non dégénérée) si pour tout élément non nul u de V il existe $v \in V$ tel que $H(u, v) \neq 0$.

³ On dit que $a \in \text{End}(V)$ est *antihermitien* pour Φ si l'adjoint a^* de a relativement à Φ est égal à $-a$. Lorsque $k = \mathbf{C}$ (resp. $k = \mathbf{R}$), cela signifie aussi que l'endomorphisme ia de V (resp. de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V$) est hermitien.

En effet, notons a^* l'adjoint relativement à Φ d'un endomorphisme a de V ; pour g dans G , x dans $\mathfrak{g}$, u et v dans V , on a

$$\Phi(\rho(g)u, \rho(g)v) = \Phi(\rho(g)^*\rho(g)u, v),$$

$$\Phi(\varphi(x)u, v) + \Phi(u, \varphi(x)v) = \Phi((\varphi(x) + \varphi(x)^*).u, v);$$

pour que $\Phi(\rho(g)u, \rho(g)v) = \Phi(u, v)$ pour tous u, v dans V , il est donc nécessaire et suffisant que $\rho(g)^*\rho(g) = \text{Id}_V$; de même, pour que $\Phi(\varphi(x)u, v) + \Phi(u, \varphi(x)v) = 0$ pour tous u, v dans V , il est nécessaire et suffisant que $\varphi(x) + \varphi(x)^* = 0$, d'où l'assertion annoncée.

b) Si la forme Φ est invariante par G (resp. $\mathfrak{g}$), l'orthogonal d'un sous-espace stable de V est stable; en particulier, la représentation ρ (resp. φ) est alors semi-simple (cf. A, IX); de plus, pour tout $g \in G$ (resp. tout $x \in \mathfrak{g}$), l'endomorphisme $\rho(g)$ (resp. $\varphi(x)$) de V est alors semi-simple, à valeurs propres de valeur absolue 1 (resp. à valeurs propres imaginaires pures); en effet $\rho(g)$ est unitaire (resp. $i\varphi(x)$ est hermitien, cf. A, IX).

c) Supposons $k = \mathbf{R}$. Si G est un groupe de Lie connexe, ρ un morphisme de groupes de Lie, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et φ l'homomorphisme déduit de ρ , alors Φ est invariante par G si et seulement si elle est invariante par $\mathfrak{g}$ (III, § 6, n° 5, cor. 3).

d) Pour qu'il existe sur V une forme hermitienne positive séparante invariante par G , il faut et il suffit que le sous-groupe $\rho(G)$ de $\mathbf{GL}(V)$ soit relativement compact (INT, VII, § 3, n° 1, prop. 1).

2. Groupes de Lie réels commutatifs connexes

Soit G un groupe de Lie (réel) commutatif connexe. L'application exponentielle

$$\exp_G : L(G) \rightarrow G$$

est un morphisme de groupes de Lie, surjectif à noyau discret (III, § 6, n° 4, prop. 11), donc fait de $L(G)$ un revêtement connexe de G .

a) Les conditions suivantes sont équivalentes : G est simplement connexe, $\exp_G$ est un isomorphisme, G est isomorphe à $\mathbf{R}^n$ ($n = \dim G$). Si on transporte alors à G par l'isomorphisme $\exp_G$ la structure d'espace vectoriel de $L(G)$, on obtient sur G une structure d'espace vectoriel, qui est la seule compatible avec la structure de groupe topologique de G . Les groupes de Lie commutatifs simplement connexes sont appelés groupes (de Lie) *vectoriels*; sauf mention expresse du contraire, on les munit toujours de la structure de $\mathbf{R}$ -espace vectoriel définie ci-dessus.

b) Notons $\Gamma(G)$ le noyau de $\exp_G$. D'après TG, VII, p. 4, th. 1, le groupe G est compact si et seulement si $\Gamma(G)$ est un *réseau* de $L(G)$, c'est-à-dire (*loc. cit.*) si le rang du $\mathbf{Z}$ -module libre $\Gamma(G)$ est égal à la dimension de G . Inversement, si L est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et Γ un réseau de L , le groupe topologique quotient L/Γ est un groupe de Lie commutatif compact connexe.

Les groupes de Lie commutatifs compacts connexes sont appelés *tores réels*, ou (dans ce chapitre) *tores*.

c) Dans le cas général, soit E le sous-espace vectoriel de $L(G)$ engendré par $\Gamma(G)$, et soit V un sous-espace supplémentaire. Alors G est produit direct de ses sous-groupes de Lie $\exp(E)$ et $\exp(V)$; le premier est un tore, le second est vectoriel. Enfin tout sous-groupe compact de G est contenu dans $\exp(E)$ (puisque sa projection dans $\exp(V)$ est nécessairement réduite à l'élément neutre); le sous-groupe $\exp(E)$ est donc l'unique sous-groupe compact *maximal* de G .

Prenons par exemple $G = \mathbf{C}^*$; identifions $L(G)$ à $\mathbf{C}$ de sorte que l'application exponentielle de G soit $x \mapsto e^x$. Alors $\Gamma(G) = 2\pi i\mathbf{Z}$, $E = i\mathbf{R}$, donc $\exp(E) = \mathbf{U}$; si on prend $V = \mathbf{R}$, on a $\exp(V) = \mathbf{R}_+^*$, et on retrouve l'isomorphisme $\mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{U} \times \mathbf{R}_+^*$ construit en TG, VIII, p. 4.

d) Notons enfin que $\exp_G : L(G) \rightarrow G$ est un revêtement universel de G , donc que $\Gamma(G)$ s'identifie naturellement au groupe fondamental de G .

3. Algèbres de Lie compactes

PROPOSITION 1. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (réelle). Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathfrak{g}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact.
 - (ii) Le groupe $\text{Int}(\mathfrak{g})$ (III, § 6, n° 2, déf. 2) est compact.
 - (iii) $\mathfrak{g}$ possède une forme bilinéaire invariante (I, § 3, n° 6) qui est symétrique, positive et séparante.
 - (iv) $\mathfrak{g}$ est réductive (I, § 6, n° 4, déf. 4); pour tout $x \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\text{ad } x$ est semi-simple, à valeurs propres imaginaires pures.
 - (v) $\mathfrak{g}$ est réductive et sa forme de Killing B est négative.
- (i) $\Rightarrow$ (ii) : si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie du groupe de Lie compact G , le groupe $\text{Int}(\mathfrak{g})$ est séparé et isomorphe à un quotient du groupe compact G_0 (III, § 6, n° 4, cor. 4), donc est compact.
- (ii) $\Rightarrow$ (iii) : si le groupe $\text{Int}(\mathfrak{g})$ est compact, il existe sur $\mathfrak{g}$ une forme bilinéaire symétrique qui est positive, séparante, et invariante par $\text{Int}(\mathfrak{g})$ (n° 1), donc aussi invariante pour la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$.
- (iii) $\Rightarrow$ (iv) : si (iii) est satisfaite, la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est semi-simple (n° 1), donc $\mathfrak{g}$ est réductive; de plus les endomorphismes $\text{ad } x$, pour $x \in \mathfrak{g}$, possèdent les propriétés indiquées (n° 1).
- (iv) $\Rightarrow$ (v) : pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on a $B(x, x) = \text{Tr}((\text{ad } x)^2)$; par suite, $B(x, x)$ est la somme des carrés des valeurs propres de $\text{ad } x$, et est par conséquent négative si celles-ci sont imaginaires pures.
- (v) $\Rightarrow$ (i) : supposons $\mathfrak{g}$ réductive, donc produit d'une sous-algèbre commutative $\mathfrak{c}$ et d'une sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{s}$ (I, § 6, n° 4, prop. 5). La forme de Killing de $\mathfrak{s}$ est la restriction à $\mathfrak{s}$ de la forme B , donc est négative et séparante si B est négative. Le sous-groupe $\text{Int}(\mathfrak{s})$ de $\text{GL}(\mathfrak{s})$ est fermé (c'est la composante neutre de $\text{Aut}(\mathfrak{s})$),

III, § 10, n° 2, cor. 2) et laisse invariante la forme positive séparante — B ; il est donc compact, et $\mathfrak{s}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe de Lie compact $\text{Int}(\mathfrak{s})$. Par ailleurs, comme $\mathfrak{c}$ est commutative, elle est isomorphe à l'algèbre de Lie d'un tore T . Ainsi $\mathfrak{g}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe de Lie compact $\text{Int}(\mathfrak{s}) \times T$.

DÉFINITION 1. — *On appelle algèbre de Lie compacte¹ toute algèbre de Lie qui possède les propriétés (i) à (v) de la proposition 1.*

Les algèbres de Lie compactes sont donc les algèbres produit d'une algèbre commutative par une algèbre semi-simple compacte. En d'autres termes, pour qu'une algèbre de Lie soit compacte, il faut et il suffit qu'elle soit réductive et que son algèbre dérivée soit compacte.

L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact est compacte.

PROPOSITION 2. — *a) Le produit d'un nombre fini d'algèbres de Lie est une algèbre de Lie compacte si et seulement si chaque facteur est compact.*

b) Une sous-algèbre d'une algèbre de Lie compacte est compacte.

c) Soit $\mathfrak{h}$ un idéal d'une algèbre de Lie compacte $\mathfrak{g}$. Alors l'algèbre $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est compacte et l'extension $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est triviale.

Les assertions a) et b) résultent de la caractérisation (iii) de la prop. 1. La partie c) résulte de a) et du fait que dans une algèbre de Lie réductive, tout idéal est facteur direct (I, § 6, n° 4, cor. à la prop. 5).

PROPOSITION 3. — *Soit G un groupe de Lie dont le groupe des composantes connexes est fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'algèbre de Lie $L(G)$ est compacte.

(ii) Le groupe $\text{Ad}(G)$ est compact.

(iii) Il existe sur $L(G)$ une forme bilinéaire symétrique positive séparante invariante pour la représentation adjointe de G .

** (iv) G possède une métrique riemannienne invariante par translations à droite et à gauche. **

(i) $\Rightarrow$ (ii) : si $L(G)$ est compacte, le groupe $\text{Ad}(G_0) = \text{Int}(L(G))$ est compact ; comme il est d'indice fini dans $\text{Ad}(G)$, ce dernier groupe est compact.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : cela résulte du n° 1.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : comme $\text{Int}(L(G)) \subset \text{Ad}(G)$, cela résulte de la caractérisation (iii) de la proposition 1.

** (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) : cela résulte de III, § 3, n° 13. **

¹ On notera qu'un espace vectoriel topologique réel ne peut être un espace topologique compact que s'il est réduit à 0.

4. Groupes dont l'algèbre de Lie est compacte

THÉORÈME 1 (H. Weyl). — *Soit G un groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie est semi-simple compacte. Alors G est compact et son centre est fini.*

Comme G est semi-simple, son centre D est discret. De plus, le groupe quotient G/D est isomorphe à $\text{Ad}(G)$ (III, § 6, n° 4, cor. 4), donc compact (prop. 3). Enfin, le groupe G/D est égal à son groupe dérivé (III, § 9, n° 2, cor. à la prop. 4). Le théorème résulte alors de INT, VII, § 3, n° 2, prop. 5.

PROPOSITION 4. — *Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie compacte. Il existe un tore T , un groupe de Lie compact semi-simple simplement connexe S , un groupe vectoriel V et un morphisme surjectif de noyau fini $f: V \times T \times S \rightarrow G$. Si G est compact, le groupe V est réduit à l'élément neutre.*

Soit C (resp. S) un groupe de Lie simplement connexe dont l'algèbre de Lie est isomorphe au centre (resp. à l'algèbre dérivée) de $L(G)$. Alors C est un groupe vectoriel, S un groupe compact de centre fini (th. 1) et G s'identifie au quotient de $C \times S$ par un sous-groupe discret D , qui est central (INT, VII, § 3, n° 2, lemme 4). Comme la projection de D dans S est d'image centrale, donc finie, $D \cap C$ est d'indice fini dans D . Soient C' le sous-espace vectoriel de C engendré par $D \cap C$, et V un sous-espace supplémentaire. Alors le groupe $T = C'/(D \cap C)$ est un tore, et G est isomorphe au quotient du groupe produit $V \times T \times S$ par un groupe fini.

Si G est compact, il en est de même de $V \times T \times S$ (TG, III, p. 29, cor. 2), donc de V , ce qui entraîne $V = \{e\}$.

COROLLAIRE 1. — *Soit G un groupe de Lie compact connexe. Alors $C(G)_0$ est un tore, $D(G)$ un groupe de Lie connexe semi-simple compact et le morphisme $(x, y) \mapsto xy$ de $C(G)_0 \times D(G)$ dans G est un revêtement fini.*

Avec les notations de la prop. 4, on a $V = \{e\}$ et les sous-groupes $f(T)$ et $f(S)$ de G sont compacts, donc fermés. Il suffit donc de montrer que $f(T) = C(G)_0$, $f(S) = D(G)$. Or, on a $L(G) = L(f(T)) \times L(f(S))$; comme S est semi-simple et T commutatif, cela implique $L(f(T)) = \mathcal{C}(L(G)) = L(C(G)_0)$ (III, § 9, n° 3, prop. 8) et $L(f(S)) = \mathcal{D}L(G) = L(D(G))$ (III, § 9, n° 2, cor. de la prop. 4), d'où l'assertion annoncée.

COROLLAIRE 2. — *Le centre et le groupe fondamental d'un groupe de Lie compact connexe semi-simple sont finis. Son revêtement universel est compact.*

Avec les notations de la prop. 4, les groupes V et T sont réduits à l'élément neutre; S est donc un revêtement universel de G , et le groupe fondamental de G est isomorphe à $\text{Ker } f$, donc fini. Le centre D de G est discret car G est semi-simple, donc D est fini.

COROLLAIRE 3. — *Le groupe fondamental d'un groupe de Lie compact connexe G est un $\mathbb{Z}$ -module de type fini, de rang égal à la dimension de $C(G)$.*

En effet, avec les notations du cor. 1, le groupe fondamental de $C(G)_0$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$, avec $n = \dim C(G)_0$, et le groupe fondamental de $D(G)$ est fini (cor. 2).

COROLLAIRE 4. — *Soit G un groupe de Lie compact connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est semi-simple ;
- (ii) $C(G)$ est fini ;
- (iii) $\pi_1(G)$ est fini.

Si G est simplement connexe, il est semi-simple.

Cela résulte des cor. 1 à 3.

COROLLAIRE 5. — *Soit G un groupe de Lie compact connexe. Alors $\text{Int}(G)$ est la composante neutre du groupe de Lie $\text{Aut}(G)$ (III, § 10, n° 2).*

Soit $f \in \text{Aut}(G)_0$. Alors f induit un automorphisme f_1 de $C(G)_0$ et un automorphisme f_2 de $D(G)$, et on a $f_1 \in \text{Aut}(C(G)_0)_0$, $f_2 \in \text{Aut}(D(G))_0$. Puisque $\text{Aut}(C(G)_0)$ est discret (TG, VII, p. 15, prop. 5), on a $f_1 = \text{Id}$; puisque $D(G)$ est semi-simple, il existe, d'après III, § 10, n° 2, cor. 2 au th. 1, un élément g de $D(G)$ tel que $f_2(x) = gxg^{-1}$ pour tout $x \in D(G)$. Pour tout $x \in C(G)_0$, on a $gxg^{-1} = x = f_1(x)$; comme $G = C(G)_0 \cdot D(G)$, il en résulte que $gxg^{-1} = f(x)$ pour tout $x \in G$, donc $f = \text{Int } g$.

PROPOSITION 5. — *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie compacte.*

a) Supposons G connexe. Alors G possède un plus grand sous-groupe compact K ; celui-ci est connexe. Il existe un sous-groupe vectoriel (n° 2) central fermé N de G tel que G soit le produit direct $N \times K$.

b) Supposons le groupe des composantes connexes de G fini. Alors :

(i) Tout sous-groupe compact de G est contenu dans un sous-groupe compact maximal.

(ii) Si K_1 et K_2 sont deux sous-groupes compacts maximaux de G , il existe $g \in G$ tel que $K_2 = gK_1g^{-1}$.

(iii) Soit K un sous-groupe compact maximal de G . Alors $K \cap G_0$ est égal à K_0 ; c'est le plus grand sous-groupe compact de G_0 .

(iv) Il existe un sous-groupe vectoriel central fermé N de G_0 , distingué dans G , tel que, pour tout sous-groupe compact maximal K de G , G_0 soit le produit direct de K_0 par N et G le produit semi-direct de K par N .

a) Reprenons les notations de la prop. 4. La projection de $\text{Ker } f$ sur V est un sous-groupe fini du groupe vectoriel V , donc est réduite à l'élément neutre. Il s'ensuit que $\text{Ker } f$ est contenu dans $T \times S$, donc que G est le produit direct du groupe vectoriel $N = f(V)$ et du groupe compact $K = f(T \times S)$. Tout sous-groupe compact de G a une projection dans N réduite à l'élément neutre, donc est contenu dans K . Cela démontre a).

b) Supposons maintenant G/G_0 fini. D'après a), G_0 est le produit direct de son plus grand sous-groupe compact M par un sous-groupe vectoriel P ; le sous-groupe

M de G est évidemment distingué. Soit $\mathfrak{n}$ un sous-espace vectoriel de $L(G)$, supplémentaire de $L(M)$ et stable pour la représentation adjointe de G (n° 1 et n° 3, prop. 3); c'est un idéal de $L(G)$ et on a $L(G) = L(M) \times \mathfrak{n}$. Soit N le sous-groupe intégral de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$; d'après III, § 6, n° 6, prop. 14, il est distingué dans G . La projection de $L(G)$ sur $L(P)$, de noyau $L(M)$, induit un isomorphisme de $\mathfrak{n}$ sur $L(P)$; il en résulte que la projection de G_0 sur P induit un morphisme étale de N sur P ; comme P est simplement connexe, c'est un isomorphisme, et N est un groupe vectoriel. Le morphisme $(x, y) \mapsto xy$ de $M \times N$ dans G_0 est un morphisme étale injectif (puisque $M \cap N$ est réduit à l'élément neutre), donc un isomorphisme. Il s'ensuit que N est un sous-groupe fermé de G et que le quotient G/N est compact, puisque G_0/N est compact et que G/G_0 est fini (TG, III, p. 29, cor. 2).

D'après INT, VII, § 3, n° 2, prop. 3, tout sous-groupe compact de G est contenu dans un sous-groupe compact maximal, ceux-ci sont conjugués, et pour tout sous-groupe compact maximal K de G , G est produit semi-direct de K par N . Comme G_0 contient N , il est alors produit semi-direct de N par $G_0 \cap K$; il s'ensuit que $G_0 \cap K$ est connexe, donc égal à K_0 , puisque $K/(G_0 \cap K)$ est isomorphe à G/G_0 , donc fini; enfin, K_0 est évidemment le plus grand sous-groupe compact de G_0 d'après a).

COROLLAIRE. — Si N satisfait aux conditions de b) (iv), et si K_1 et K_2 sont deux sous-groupes compacts maximaux de G , il existe $n \in N$ tel que $nK_1n^{-1} = K_2$.

Il existe en effet d'après (ii) un élément $g \in G$ tel que $gK_1g^{-1} = K_2$; d'après (iv), il existe $n \in N$ et $k \in K_1$ tels que $g = nk$. L'élément n possède alors la propriété exigée.

§ 2. TORES MAXIMAUX DES GROUPES DE LIE COMPACTS

1. Sous-algèbres de Cartan des algèbres compactes

Lemme 1. — Soient G un groupe de Lie, K un sous-groupe compact de G , et F une forme bilinéaire invariante sur $L(G)$. Soient $x, y \in L(G)$. Il existe un élément k de K tel que pour tout $u \in L(K)$, on ait $F(u, [(Ad k)(x), y]) = 0$.

La fonction $v \mapsto F((Ad v)(x), y)$ de K dans $\mathbf{R}$ est continue, donc possède un minimum en un point $k \in K$. Soit $u \in L(K)$ et posons

$$h(t) = F((Ad \exp(tu).k)(x), y), \quad t \in \mathbf{R}.$$

On a $h(t) \geq h(0)$ pour tout t ; par ailleurs, d'après III, § 3, n° 12, prop. 44, on a

$$\frac{dh}{dt}(0) = F([u, (Ad k)(x)], y) = F(u, [(Ad k)(x), y]),$$

d'où le lemme (FVR, I, p. 20, prop. 7).

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie compacte. Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ (VII, § 2, n° 1, déf. 1) sont ses sous-algèbres commutatives maximales; en particulier, $\mathfrak{g}$ est la réunion de ses sous-algèbres de Cartan. Le groupe $\text{Int}(\mathfrak{g})$ opère transitivement sur l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

Comme $\mathfrak{g}$ est réductive, ses sous-algèbres de Cartan sont commutatives (VII, § 2, n° 4, cor. 3 au th. 2). Inversement, soit $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{g}$. D'après § 1, n° 3, prop. 1, ad x est semi-simple pour tout $x \in \mathfrak{t}$; d'après VII, § 2, n° 3, prop. 10, il existe une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{t}$. Cela démontre la première assertion du théorème.

Soient maintenant $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}'$ deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$. Prouvons qu'il existe $u \in \text{Int}(\mathfrak{g})$ tel que $u(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}'$. D'après la prop. 1 du § 1, n° 3, on peut supposer que $\mathfrak{g}$ est de la forme $L(G)$, où G est un groupe de Lie compact connexe, et choisir une forme bilinéaire symétrique invariante séparante F sur $\mathfrak{g}$. Soit x (resp. x') un élément régulier de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}^0(x)$ (resp. $\mathfrak{t}' = \mathfrak{g}^0(x')$) (VII, § 3, n° 3, th. 2). Appliquant le lemme 1 avec $K = G$, on voit qu'il existe $k \in G$ tel que $[(\text{Ad } k)(x), x']$ soit orthogonal à $\mathfrak{g}$ pour F , donc nul; on a alors $(\text{Ad } k)(x) \in \mathfrak{g}^0(x') = \mathfrak{t}'$, donc $\mathfrak{g}^0((\text{Ad } k)(x)) = \mathfrak{t}'$ puisque $(\text{Ad } k)(x)$ est régulier. On en conclut que $(\text{Ad } k)(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}'$, d'où le théorème.

COROLLAIRE. — *Soient $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}'$ deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$, α une partie de $\mathfrak{t}$, et u un automorphisme de $\mathfrak{g}$ qui applique α dans $\mathfrak{t}'$. Il existe un élément v de $\text{Int}(\mathfrak{g})$ tel que $u \circ v$ applique $\mathfrak{t}$ sur $\mathfrak{t}'$, et coïncide avec u sur α .*

Posons $G = \text{Int}(\mathfrak{g})$, et considérons le fixateur $Z_G(\alpha)$ de α dans G ; c'est un sous-groupe de Lie de G , dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\alpha)$ est formée des éléments de $\mathfrak{g}$ qui commutent à tous les éléments de α (III, § 9, n° 3, prop. 7). Alors $\mathfrak{t}$ et $u^{-1}(\mathfrak{t}')$ sont deux sous-algèbres de Cartan de l'algèbre de Lie compacte $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\alpha)$. D'après le th. 1, il existe un élément v de $Z_G(\alpha)$ tel que $v(\mathfrak{t}) = u^{-1}(\mathfrak{t}')$; un tel élément répond à la question.

2. Tores maximaux

Soit G un groupe de Lie. On appelle *tore* de G tout sous-groupe fermé qui est un tore (§ 1, n° 2), c'est-à-dire tout sous-groupe compact connexe commutatif. Les éléments maximaux de l'ensemble ordonné par inclusion des tores de G sont appelés les *tores maximaux* de G .

THÉORÈME 2. — *Soit G un groupe de Lie compact connexe.*

a) *Les algèbres de Lie des tores maximaux de G sont les sous-algèbres de Cartan de $L(G)$.*

b) *Soient T_1 et T_2 deux tores maximaux de G . Il existe $g \in G$ tel que $T_2 = gT_1g^{-1}$.*

c) *G est la réunion de ses tores maximaux.*

Soit $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $L(G)$; le sous-groupe intégral de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ est fermé (VII, § 2, n° 1, cor. 4 à la prop. 4) et commutatif (th. 1), donc est un tore de G . Si T est un tore maximal de G , son algèbre de Lie est commutative,

donc contenue dans une sous-algèbre de Cartan de $L(G)$ (th. 1). Il en résulte que les tores maximaux de G sont exactement les sous-groupes intégraux de G associés aux sous-algèbres de Cartan de G , d'où *a*). L'assertion *b*) résulte alors du th. 1, puisque l'homomorphisme canonique $G \rightarrow \text{Int}(L(G))$ est surjectif (III, § 6, n° 4, cor. 4 à la prop. 10).

Notons X la réunion des tores maximaux de G , et soit T un tore maximal de G . L'application continue $(g, t) \mapsto gtg^{-1}$ de $G \times T$ dans G a pour image X , qui est donc *fermé* dans G ; pour démontrer *c*), il suffit donc de prouver que X est ouvert dans G ; comme X est invariant par automorphismes intérieurs, il suffit de montrer que pour tout $a \in T$, X est un voisinage de a . Raisonnons par récurrence sur la dimension de G et distinguons deux cas :

1) *a n'est pas central dans G*. Soit alors H la composante neutre du centralisateur de a dans G ; c'est un sous-groupe compact connexe de G distinct de G , qui contient T , donc a . Comme $\text{Ad } a$ est semi-simple (§ 1, n° 1), l'algèbre de Lie de H est le nilspace de $\text{Ad } a - 1$; il résulte alors de VII, § 4, n° 2, prop. 4, que la réunion Y des conjugués de H est un voisinage de a . D'après l'hypothèse de récurrence, on a $H \subset X$, donc $Y \subset X$; ainsi X est un voisinage de a .

2) *a est central dans G*. Il suffit de prouver que $a \exp x$ appartient à X pour tout x dans $L(G)$. Or tout élément x de $L(G)$ appartient à une sous-algèbre de Cartan de G (th. 1); le sous-groupe intégral T' correspondant contient $\exp x$; comme il est conjugué à T , il contient a et donc $a \exp x$, d'où l'assertion cherchée.

COROLLAIRE 1. — *a) L'application exponentielle de G est surjective.*

b) Pour tout $n \geq 1$, l'application $g \mapsto g^n$ de G dans lui-même est surjective.

En effet, $\exp(L(G))$ contient tous les tores maximaux de G , d'où *a*). L'assertion *b*) résulte alors de la formule $(\exp x)^n = \exp nx$ pour x dans $L(G)$.

Remarque 1. — Il existe une partie compacte K de $L(G)$ telle que $\exp_G(K) = G$. En effet, si T est un tore maximal de G , il existe un compact $C \subset L(T)$ tel que $\exp_T(C) = T$; il suffit de prendre $K = \bigcup_{g \in G} (\text{Ad } g)(C)$.

COROLLAIRE 2. — *L'intersection des tores maximaux de G est le centre de G.*

Soit x un élément du centre de G ; d'après le th. 2, *c*), il existe un tore maximal T de G contenant x ; alors x appartient à tous les conjugués de T , donc à tous les tores maximaux de G . Inversement, si x appartient à tous les tores maximaux de G , il commute à tout élément de G d'après le th. 2, *c*).

COROLLAIRE 3. — *Soit $g \in G$, et soit C son centralisateur. Alors g appartient à C_0 ; le groupe C_0 est la réunion des tores maximaux de G contenant g.*

Il existe un tore maximal T de G contenant g (th. 2, *c*)), et donc contenu dans C_0 . Par ailleurs, le groupe C_0 est un groupe de Lie compact connexe, donc réunion de ses tores maximaux (th. 2, *c*)); ceux-ci contiennent tous g (cor. 2), donc sont exactement les tores maximaux de G contenant g .

COROLLAIRE 4. — Soit $g \in G$. Si g est régulier (VII, § 4, n° 2, déf. 2), il appartient à un seul tore maximal, qui est la composante neutre de son centralisateur. Sinon, il appartient à une infinité de tores maximaux.

Comme $\text{Ad } g$ est semi-simple, la dimension du nilspace de $\text{Ad } g - 1$ est aussi celle du centralisateur C de g . D'après *loc. cit.*, prop. 8, et le th. 1, g est régulier si et seulement si C_0 est un tore maximal de G . On conclut alors par le cor. 3.

COROLLAIRE 5. — a) Soit S un tore de G . Le centralisateur de S est connexe; c'est la réunion des tores maximaux de G contenant S .

b) Soit $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre commutative de $L(G)$. Le fixateur de $\mathfrak{s}$ dans G est connexe; c'est la réunion des tores maximaux de G dont l'algèbre de Lie contient $\mathfrak{s}$.

Pour démontrer a), il suffit de prouver que si un élément g de G centralise S , il existe un tore maximal de G contenant S et g . Or, si C est le centralisateur de g , on a $g \in C_0$ (cor. 3) et $S \subset C_0$; si T est un tore maximal du groupe de Lie compact connexe C_0 contenant S , on a $g \in T$ (cor. 2), d'où a). L'assertion b) résulte de a) appliqué à l'adhérence du sous-groupe intégral d'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$, compte tenu de III, § 9, n° 3, prop. 9.

Remarque 2. — Il résulte du cor. 5 qu'un tore maximal de G en est un sous-groupe commutatif maximal. La réciproque n'est pas vraie : par exemple, dans le groupe $\text{SO}(3, \mathbf{R})$, les tores maximaux sont de dimension 1, et ne peuvent donc contenir le sous-groupe des matrices diagonales, qui est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. Par ailleurs, si $g \in \text{SO}(3, \mathbf{R})$ est une matrice diagonale non scalaire, g est un élément régulier de $\text{SO}(3, \mathbf{R})$ dont le centralisateur n'est pas connexe (cf. cor. 4).

COROLLAIRE 6. — Les tores maximaux de G sont leurs propres centralisateurs, et sont les fixateurs de leurs algèbres de Lie.

Soient T un tore maximal de G et C son centralisateur; comme $L(T)$ est une sous-algèbre de Cartan de $L(G)$, on a $L(T) = L(C)$, donc $C = T$ puisque C est connexe (cor. 5).

COROLLAIRE 7. — Soient T et T' deux tores maximaux de G , A une partie de T et s un automorphisme de G qui applique A dans T' . Il existe $g \in G$ tel que $s \circ (\text{Int } g)$ applique T sur T' et coïncide avec s sur A .

Soit C le centralisateur de A . Alors T et $s^{-1}(T')$ sont deux tores maximaux de C_0 ; tout élément g de C_0 tel que $(\text{Int } g)(T) = s^{-1}(T')$ répond à la question.

COROLLAIRE 8. — Soient H un groupe de Lie compact, T un tore maximal de H . On a alors $H = N_H(T) \cdot H_0$, et l'injection de $N_H(T)$ dans H induit un isomorphisme de $N_H(T)/N_{H_0}(T)$ sur H/H_0 .

Soit $h \in H$. Alors $h^{-1}Th$ est un tore maximal de H_0 , donc (th. 2) il existe $g \in H_0$ tel que $hg \in N_H(T)$; ainsi h appartient à $N_H(T) \cdot H_0$, d'où la première assertion. La seconde en résulte immédiatement.

Remarques. — 3) Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie compacte. Appelons *sous-groupes de Cartan* de G les sous-groupes intégraux dont les algèbres de Lie sont les sous-algèbres de Cartan de $L(G)$ (les sous-groupes de Cartan d'un groupe compact connexe sont donc ses tores maximaux). Le théorème 2 et ses corollaires sont encore valides pour G , en y remplaçant partout l'expression « tore maximal » par « sous-groupe de Cartan ». Cela résulte aussitôt du fait qu'en vertu de la prop. 5 du § 1, n° 4, G est le produit direct d'un groupe vectoriel V par un groupe compact connexe K et que les sous-groupes de Cartan de G sont les produits de V par les tores maximaux de K . Notons d'ailleurs qu'il résulte alors du cor. 6 ci-dessus qu'on peut aussi définir les sous-groupes de Cartan de G comme les fixateurs des sous-algèbres de Cartan de $L(G)$.

* 4) On peut aussi démontrer la partie c) du théorème 2 de la façon suivante. Munissons G d'une métrique riemannienne invariante (§ 1, n° 3, prop. 3). Alors, pour tout élément g de G , il existe une géodésique maximale passant par g et l'élément neutre de G (théorème de Hopf-Rinow), et on vérifie que l'adhérence d'une telle géodésique est un sous-tore de G . *

3. Tores maximaux des sous-groupes et des groupes quotients

PROPOSITION 1. — Soient G et G' deux groupes de Lie compacts connexes.

a) Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme surjectif de groupes de Lie. Les tores maximaux de G' sont les images par f des tores maximaux de G . Si le noyau de f est central dans G (par exemple discret), les tores maximaux de G sont les images réciproques par f des tores maximaux de G' .

b) Soit H un sous-groupe fermé connexe de G . Tout tore maximal de H est l'intersection avec H d'un tore maximal de G .

c) Soit H un sous-groupe fermé connexe distingué de G . Les tores maximaux de H sont les intersections avec H des tores maximaux de G .

a) Soit T un tore maximal de G ; alors $L(T)$ est une sous-algèbre de Cartan de $L(G)$ (n° 2, th. 2, a)), donc $L(f(T))$ une sous-algèbre de Cartan de $L(G')$ (VII, § 2, n° 1, cor. 2 à la prop. 4); il en résulte que $f(T)$ est un tore maximal de G' (n° 2, th. 2, a)). Si $\text{Ker } f$ est central dans G , il est contenu dans T (cor. 2 au th. 2), donc $T = f^{-1}(f(T))$.

Inversement, soit T' un tore maximal de G' ; montrons qu'il existe un tore maximal T de G tel que $f(T) = T'$. Soit T_1 un tore maximal de G ; alors $f(T_1)$ est un tore maximal de G' et il existe $g' \in G'$ tel que $T' = g'f(T_1)g'^{-1}$ (th. 2, b)); si $g \in G$ est tel que $f(g) = g'$, on a $T' = f(T)$, avec $T = gT_1g^{-1}$.

b) Soit S un tore maximal de H ; c'est un tore de G et il existe donc un tore maximal T de G contenant S . Alors $T \cap H$ est un sous-groupe commutatif de H contenant S , donc égal à S (n° 2, remarque 2).

c) D'après § 1, n° 3, prop. 2, c), $L(G)$ est produit direct de $L(H)$ par un idéal; les sous-algèbres de Cartan de $L(H)$ sont donc les intersections avec $L(H)$ des sous-algèbres de Cartan de $L(G)$. Pour tout tore maximal T de G , $T \cap H$ contient donc un tore maximal S de H et on a $S = T \cap H$ (n° 2, remarque 2).

Remarques. — 1) La proposition 1 se généralise aussitôt aux groupes connexes à algèbre de Lie compacte. En particulier, si G est un groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie est compacte, les sous-groupes de Cartan de G (cf. remarque 3, n° 2) ne sont autres que les images réciproques des tores maximaux du groupe de Lie compact connexe $\text{Ad}(G)$ (par l'homomorphisme canonique de G sur $\text{Ad}(G)$).

2) Soient G un groupe de Lie compact connexe, $\tilde{D}(G)$ le revêtement universel du groupe $D(G)$ et $f: \tilde{D}(G) \rightarrow G$ le morphisme composé des morphismes canoniques de $\tilde{D}(G)$ sur $D(G)$ et de $D(G)$ dans G . Alors l'application $T \mapsto f^{-1}(T)$ est une bijection de l'ensemble des tores maximaux de G sur l'ensemble des tores maximaux de $\tilde{D}(G)$; la bijection réciproque associe au tore maximal $\tilde{T}$ de $\tilde{D}(G)$ le tore maximal $C(G)_0 \cdot f(\tilde{T})$ de G .

4. Sous-groupes de rang maximum

Nous appellerons rang d'un groupe de Lie connexe G et noterons $\text{rg } G$, le rang de son algèbre de Lie. D'après le th. 2, a), le rang d'un groupe de Lie compact connexe est la dimension commune de ses tores maximaux.

Soient G un groupe de Lie compact connexe et H un sous-groupe fermé de G . Si H est connexe, on a $\text{rg } H \leq \text{rg } G$ (puisque les tores maximaux de H sont des tores de G). D'après le th. 2, c), dire que H est *connexe et de rang maximum* (c'est-à-dire de rang $\text{rg } G$) signifie que H est *réunion de tores maximaux* de G . On déduit alors aussitôt de la proposition 1 :

PROPOSITION 2. — *Soit $f: G \rightarrow G'$ un morphisme surjectif de groupes de Lie compacts connexes dont le noyau est central. Les applications $H \mapsto f(H)$ et $H' \mapsto f^{-1}(H')$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes fermés connexes de rang maximum de G et l'ensemble analogue pour G' .*

PROPOSITION 3. — *Soient G un groupe de Lie compact connexe, et H un sous-groupe fermé connexe de rang maximum.*

a) *La variété compacte G/H est simplement connexe.*

b) *L'homomorphisme $\pi_1(H) \rightarrow \pi_1(G)$, déduit de l'injection canonique de H dans G , est surjectif.*

Comme H est connexe, on a une suite exacte (TG, XI, à paraître)

$$\pi_1(H) \rightarrow \pi_1(G) \rightarrow \pi_1(G/H, \bar{e}) \rightarrow 0$$

où $\bar{e}$ est l'image dans G/H de l'élément neutre de G . Comme G/H est connexe, cela entraîne aussitôt l'équivalence des assertions a) et b). Par ailleurs, si $f: G' \rightarrow G$ est un morphisme surjectif de groupes de Lie compacts connexes dont le noyau est central, il revient au même de démontrer la proposition (sous la forme a)) pour G ou pour G' (prop. 2). On peut donc d'abord remplacer G par $\text{Ad}(G)$, donc supposer G semi-simple, puis remplacer G par un revêtement universel (§ 1, n° 4, cor. 2), donc supposer G simplement connexe. Mais alors l'assertion b) est triviale.