N. BOURBAKI

Éléments de mathématique

FASCICULE XXXV

LIVRE VI

INTÉGRATION

CHAPITRE IX

Intégration sur les espaces topologiques séparés

DIFFUSION C.C.L.S.

Paris

ISBN : 2-903684 005-2

Diffusion C.C.L.S. (Centre commercial du livre spécialisé)
10, rue de l'Éperon, 75278 Paris Cedex 06

PRÉFACE

Ce chapitre est consacré à l'intégration dans les espaces topologiques séparés non nécessairement localement compacts, et en particulier dans les espaces vectoriels localement convexes; elle permet notamment d'étendre à ces derniers la théorie de la transformation de Fourier.

Dans les premiers paragraphes, le mode d'exposition choisi consiste à se ramener, autant que possible, au cas des espaces compacts, traité dans les chapitres antérieurs.

Nancago, printemps 1969 N. BOURBAKI

MESURES SUR LES ESPACES TOPOLOGIQUES SÉPARÉS

Si T *est un ensemble, et* A *une partie de* T, *on notera* φ_A *la fonction caractéristique de* A, *si cela n'entraîne pas de confusion. L'ensemble* $\overline{\mathbf{R}}_+^T$ *des fonctions numériques* $\geqslant 0$ (*finies ou non*) *définies dans* T *sera désigné par* $\mathscr{F}_+(T)$, *ou simplement* $\mathscr{F}_+$ *s'il n'y a pas d'ambiguïté sur* T; *cet ensemble sera toujours muni de sa structure d'ordre naturelle. On rappelle que le produit de deux éléments de* $\mathscr{F}_+$ *est toujours défini, grâce à la convention* $0.(+\infty) = 0$. *Si* A *est une partie de* T, *et* f *une fonction définie dans* T, *la restriction* $f|A$ *de* f *à* A *pourra être notée* f_A *dans ce chapitre, si cela ne crée pas de confusion; on emploiera une notation analogue pour les mesures induites. D'autre part, si* $f \in \mathscr{F}_+(A)$, *on notera* f^0 *le prolongement par* 0 *de* f *à* T, *c'est-à-dire la fonction définie sur* T *qui coïncide avec* f *dans* A, *avec* 0 *dans* T $-$ A.

Tous les espaces topologiques envisagés dans ce chapitre sont supposés séparés, sauf mention expresse du contraire. A partir du § 1, *n°* 4, *et sauf au* § 5, *toutes les mesures seront supposées positives, sauf mention expresse du contraire.*

§ 1. Prémesures et mesures sur un espace topologique

1. Encombrements

DÉFINITION 1. — *Soit* T *un ensemble. On appelle encombrement sur* T *toute application* p *de* $\mathscr{F}_+(T)$ *dans* $\overline{\mathbf{R}}_+$ *qui possède les propriétés suivantes:*

a) *Si* f *et* g *sont deux éléments de* $\mathscr{F}_+$ *tels que* $f \leqslant g$, *on a* $p(f) \leqslant p(g)$.

b) *Si* f *est un élément de* $\mathscr{F}_+$, *et* t *un nombre* $\geqslant 0$, *on a* $p(tf) = tp(f)$.

c) *Si* f *et* g *sont deux éléments de* $\mathscr{F}_+$, *on a* $p(f+g) \leqslant p(f) + p(g)$.

d) *Si* (f_n) *est une suite croissante d'éléments de* $\mathscr{F}_+$, *et si* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, *on a* $p(f) = \lim_{n\to\infty} p(f_n)$.

Si A *est une partie de* T, *on écrit* $p(A)$ *au lieu de* $p(\varphi_A)$.

La condition *b*) entraîne $p(0) = 0$. D'autre part, soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathscr{F}_+$; les conditions *c*) et *d*) entraînent l'inégalité

$$p\left(\sum_n f_n\right) \leqslant \sum_n p(f_n) \quad (\text{«inégalité de convexité dénombrable»}).$$

Par exemple, soient T un espace localement compact, μ une mesure positive sur T; alors μ^* et $\mu^\bullet$ sont des encombrements sur T. Cela résulte des prop. 10, 11, 12 et du th. 3 du chap. IV, 2ᵉ éd., § 1, nº 3 pour μ^*, et de la prop. 1 du chap. V, 2ᵉ éd., § 1, nº 1 pour $\mu^\bullet$.

PROPOSITION 1. — *Soit* $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ *une famille d'encombrements sur* T. *La somme et l'enveloppe supérieure de la famille* (p_α) (*dans* $\mathscr{F}_+(\mathscr{F}_+(T))$) *sont alors des encombrements.*

La somme d'une famille finie d'encombrements étant évidemment un encombrement, il suffit de traiter le cas de l'enveloppe supérieure. Les propriétés *a*), *b*), *c*) de la définition 1 étant évidemment satisfaites, il reste à établir *d*). Posons $p = \sup\limits_\alpha p_\alpha$; on a, avec les notations de la définition 1, *d*)

$$p(f) = \sup_\alpha p_\alpha(f) = \sup_\alpha \sup_n p_\alpha(f_n) = \sup_n \sup_\alpha p_\alpha(f_n) = \sup_n p(f_n).$$

DÉFINITION 2. — *Soit* p *un encombrement sur un ensemble* T. *On dit que* p *est borné si* $p(T) < +\infty$. *Si* T *est un espace topologique, on dit que* p *est localement borné si tout* $x \in T$ *admet un voisinage* V *tel que* $p(V) < +\infty$.

Il résulte alors des propriétés *a*) et *c*) de la déf. 1 que $p(K) < +\infty$ pour toute partie compacte K de T. En particulier, si T est compact, tout encombrement localement borné sur T est borné.

Soient p un encombrement sur un ensemble T, et A une partie de T. Pour toute fonction $f \in \mathscr{F}_+(A)$, soit f^0 le prolongement par 0 de f à T; l'application $f \mapsto p(f^0)$ sur $\mathscr{F}_+(A)$ est alors un encombrement, qu'on appelle *l'encombrement induit par* p sur A, et qu'on note $p|A$ ou p_A.

Soient T et U deux ensembles, π une application de T dans U et p un encombrement sur T. On appelle *encombrement image* de p par π l'encombrement $\pi(p)$ sur U, dont la valeur pour $f \in \mathscr{F}_+(U)$ est donnée par

$$(\pi(p))(f) = p(f \circ \pi).$$

Soit p un encombrement sur un ensemble T; on dit que p est *concentré* sur une partie A de T si $p(T - A) = 0$.

Lemme 1. — *Si l'encombrement* p *est concentré sur* $A \subset T$, *on a* $p(f) = p(f\varphi_A)$ *pour tout* $f \in \mathscr{F}_+(T)$.

Posons en effet $T - A = B$, d'où $p(\varphi_B) = 0$; on a

$$f\varphi_B \leqslant (+\infty).\varphi_B = \sup_{n\in\mathbf{N}} n\varphi_B,$$

donc $p(f\varphi_B) = 0$ d'après les propriétés *a*), *b*), *d*), de la déf. 1. Il en résulte que $p(f) \leqslant p(f\varphi_A) + p(f\varphi_B) = p(f\varphi_A)$ d'après *c*), et enfin $p(f) = p(f\varphi_A)$ d'après *a*).

2. Prémesures et mesures

Soit T un espace topologique, et soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble des parties compactes de T, ordonné par inclusion. Pour tout $K \in \mathfrak{K}$, soit $\mathscr{M}(K; \mathbf{C})$ l'ensemble des mesures complexes sur K. Pour tout couple (K, L) d'éléments de $\mathfrak{K}$, tel que $K \subset L$, soit ι_{KL} l'application de $\mathscr{M}(L; \mathbf{C})$ dans $\mathscr{M}(K; \mathbf{C})$ qui associe à toute mesure μ sur L la mesure μ_K induite par μ sur K (chap. IV, 2e éd., § 5, n° 7, déf. 4). On a $\iota_{KM} = \iota_{KL} \circ \iota_{LM}$ lorsque K, L et M sont des parties compactes de T telles que $K \subset L \subset M$; ceci résulte de la transitivité des mesures induites (chap. V, 2e éd., § 7, n° 2, prop. 4). Les éléments de *la limite projective* de la famille $(\mathscr{M}(K; \mathbf{C}))_{K \in \mathfrak{K}}$ pour les applications ι_{KL} seront appelés *prémesures* sur T. Autrement dit:

DÉFINITION 3. — *On appelle prémesure sur un espace topologique* T *toute application w qui associe, à toute partie compacte* K *de* T, *une mesure w_K sur* K, *et qui possède la propriété suivante :*

Si K *et* L *sont deux parties compactes de* T *telles que* $K \subset L$, *la mesure* $(w_L)_K$ *induite par* w_L *sur* K *est égale à* w_K.

On dit que la prémesure w est réelle (resp. *positive*) *si toutes les mesures w_K sont réelles* (resp. *positives*).

Soient w et w' deux prémesures sur T, t un nombre complexe; on définit les prémesures $w + w'$ et tw par les formules $(w + w')_K = w_K + w'_K$, $(tw)_K = tw_K$ pour toute partie compacte $K \subset T$. Les prémesures sur T forment évidemment un espace vectoriel, noté $\mathscr{P}(T; \mathbf{C})$; l'espace des prémesures réelles sera noté $\mathscr{P}(T; \mathbf{R})$ ou plus souvent $\mathscr{P}(T)$, et le cône convexe des prémesures positives sera désigné par la notation $\mathscr{P}_+(T)$. Soit w une prémesure; l'application $K \mapsto |w_K|$ est alors une prémesure sur T (chap. IV, 2e éd., § 5, n° 7, lemme 3) que l'on notera $|w|$. Si w est réelle, on posera $w^+ = \frac{1}{2}(|w| + w)$, $w^- = \frac{1}{2}(|w| - w)$; ces deux prémesures étant positives, on voit que toute prémesure réelle est différence de deux prémesures positives. On a évidemment $(w^+)_K = (w_K)^+$, $(w^-)_K = (w_K)^-$ pour toute partie compacte K de T.

L'espace vectoriel $\mathscr{P}(T)$ est ordonné par le cône $\mathscr{P}_+(T)$. Il est clair qu'on a $w^+ = \sup(w, 0)$, $w^- = \sup(-w, 0)$; par suite, $\mathscr{P}(T)$ est réticulé et $\sup(w, w') = w + (w' - w)^+$, $\inf(w, w') = w - (w' - w)^-$. De plus, on a évidemment

$$(\sup(w, w'))_K = \sup(w_K, w'_K), \qquad (\inf(w, w'))_K = \inf(w_K, w'_K),$$

pour toute partie compacte K de T.

DÉFINITION 4. — *Soit w une prémesure positive sur* T. *Nous poserons pour toute fonction* $f \in \mathscr{F}_+(T)$

$$w^\bullet(f) = \sup_K (w_K)^\bullet(f_K), \tag{1}$$

K *parcourant l'ensemble des parties compactes de* T.

Pour chaque ensemble compact K, soit p^K l'encombrement image de l'encombrement $(w_K)^\bullet$ par l'injection canonique de K dans T; $w^\bullet$ est l'enveloppe supérieure des encombrements p^K, c'est donc un encombrement (n° 1, prop. 1).

On dit que $w^\bullet$ est l'*intégrale supérieure essentielle* associée à la prémesure positive w. On écrit fréquemment $\int^\bullet f\,dw$, $\int^\bullet f(t)\,dw(t)$ au lieu de $w^\bullet(f)$.

Remarque 1). — Si v et w sont deux prémesures positives, on a $(v + w)^\bullet = v^\bullet + w^\bullet$ (chap. V, 2e éd., § 1, n° 1, prop. 3). Si v et w sont deux prémesures complexes, on a $|v + w|^\bullet \leqslant |v|^\bullet + |w|^\bullet$.

PROPOSITION 2. — *a) Soit w une prémesure positive. Pour toute partie compacte* K *de* T, *l'encombrement $(w^\bullet)_K$ induit par $w^\bullet$ sur* K *est égal à $(w_K)^\bullet$. Pour toute fonction $f \in \mathscr{F}_+(T)$, on a les relations $(w_K)^\bullet(f_K) = w^\bullet(f\varphi_K)$ et*

$$w^\bullet(f) = \sup_K w^\bullet(f\varphi_K). \tag{2}$$

b) Inversement, soit p un encombrement sur T *satisfaisant aux conditions suivantes :*

1) *Pour toute partie compacte* K *de* T, *il existe une mesure positive w_K sur* K *telle que $p_K = (w_K)^\bullet$.*

2) *Pour toute fonction $f \in \mathscr{F}_+(T)$, on a $p(f) = \sup\limits_K p(f\varphi_K)$.*

L'application $w : K \mapsto w_K$ est alors une prémesure positive sur T, *et on a $p = w^\bullet$.*

Démontrons *a*) : soient $g \in \mathscr{F}_+(K)$ et g^0 le prolongement par zéro de g à T ; on a, d'après la définition des encombrements induits, $(w^\bullet)_K(g) = w^\bullet(g^0) = \sup\limits_L (w_L)^\bullet(g^0|L)$, L parcourant l'ensemble des parties compactes de T, ou seulement l'ensemble de celles qui contiennent K. Mais si L contient K, on a $(w_L)^\bullet(g^0|L) = (w_K)^\bullet(g)$ du fait que $g^0|L$ est nulle hors de K (chap. V, 2e éd., § 7, n° 1, prop. 1), ce qui prouve la première assertion. On a donc $(w_K)^\bullet(f_K) = (w^\bullet)_K(f_K) = w^\bullet((f_K)^0) = w^\bullet(f\varphi_K)$ pour tout $f \in \mathscr{F}_+(T)$, et (2) ne fait que traduire la formule (1).

Passons à *b*) : la mesure w_K considérée en 1) est unique (chap. V, 2e éd., § 1, n° 1). Montrons que l'application $K \mapsto w_K$ est une prémesure : soient K et L deux parties compactes telles que $K \subset L$, et soit λ la mesure induite par w_L sur K ; tout revient à montrer que $\lambda^\bullet = (w_K)^\bullet$. Or on a $\lambda^\bullet = ((w_L)^\bullet)_K$ (chap. V, 2e éd., § 7, n° 1, prop. 1) ; comme $(w_L)^\bullet = p_L$, on a $\lambda^\bullet = (p_L)_K = p_K = (w_K)^\bullet$.

Notons w la prémesure $K \mapsto w_K$; comme $p_K = (w_K)^\bullet = (w^\bullet)_K$, on a $p(f\varphi_K) = p_K(f_K) = (w^\bullet)_K(f_K) = w^\bullet(f\varphi_K)$. Les deux encombrements p et $w^\bullet$ sont alors égaux en vertu de la formule (2) et de l'hypothèse 2) sur p.

C.Q.F.D.

L'encombrement induit $(w^\bullet)_K$ étant égal à $(w_K)^\bullet$, il n'y a aucune ambiguïté à écrire simplement $w^\bullet_K$. Nous emploierons cette notation dans toute la suite.

COROLLAIRE. — *Soient v et w deux prémesures positives sur* T, *telles que $v^\bullet(L) = w^\bullet(L)$ pour toute partie compacte* L *de* T ; *on a alors $v = w$. En particulier, la relation $v^\bullet = w^\bullet$ entraîne $v = w$.*

En effet, soit K un ensemble compact dans T ; on a, pour tout ensemble compact $L \subset K$, la relation

$$w_K(L) = w^\bullet_K(L) = w^\bullet(L) = v^\bullet(L) = v^\bullet_K(L) = v_K(L)$$

d'après la prop. 2; on a donc $w_K = v_K$ (chap. IV, 2e éd., § 4, n° 10, cor. 3 de la prop. 19), et enfin $w = v$ par la définition des prémesures.

DÉFINITION 5. — *Soit w une prémesure sur un espace topologique* T. *On dit que w est une mesure* (resp. *une mesure bornée*) *si l'encombrement $|w|^\bullet$ est localement borné* (resp. *borné*) (cf. n° 1, déf. 2).

L'ensemble des mesures complexes sur T est évidemment un espace vectoriel (*Remarque* 1), qui sera noté $\mathscr{M}(\mathrm{T}; \mathbf{C})$. L'espace des mesures réelles sera noté $\mathscr{M}(\mathrm{T}; \mathbf{R})$ ou plus souvent $\mathscr{M}(\mathrm{T})$, et on désignera par $\mathscr{M}_+(\mathrm{T})$ le cône des mesures positives.

Si w est une mesure complexe, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont des mesures réelles. Si w est une mesure réelle, w^+ et w^- sont des mesures positives. Toute mesure complexe (resp. réelle) est donc combinaison linéaire (resp. différence) de mesures positives.

Remarques. — 2) Si T est *localement compact*, toute prémesure w sur T est une mesure. En effet, tout $x \in \mathrm{T}$ admet un voisinage compact K, et on a $|w|^\bullet(\mathrm{K}) = \|w_\mathrm{K}\| < +\infty$, de sorte que l'encombrement $|w|^\bullet$ est localement borné.

3) Pour toute partie borélienne A de T (en particulier pour A = T), et toute mesure positive μ sur T, le nombre $\mu^\bullet(\mathrm{A})$ est la borne supérieure des mesures $\mu^\bullet(\mathrm{K})$ des parties compactes de A. En effet, pour toute partie compacte K de A, on a $\mu^\bullet(\mathrm{K}) \leqslant \mu^\bullet(\mathrm{A})$; d'autre part, si $\mathfrak{K}$ est l'ensemble des parties compactes de T, on a

$$\mu^\bullet(\mathrm{A}) = \sup_{\mathrm{K}\in\mathfrak{K}} \mu_\mathrm{K}^\bullet(\mathrm{A} \cap \mathrm{K}) = \sup_{\mathrm{K}\in\mathfrak{K}} \sup_{\substack{\mathrm{L}\in\mathfrak{K}\\ \mathrm{L}\subset\mathrm{A}\cap\mathrm{K}}} \mu_\mathrm{K}^\bullet(\mathrm{L}) \leqslant \sup_{\substack{\mathrm{L}\in\mathfrak{K}\\ \mathrm{L}\subset\mathrm{A}}} \mu^\bullet(\mathrm{L})$$

d'après le cor. 1 du th. 4 du chap. IV, § 4, n° 6 (2e éd.).

3. Exemples de mesures

Exemple 1. — *Mesures sur un espace localement compact*

La proposition suivante montre que la théorie de ce chapitre contient celle du chap. IV. Dans l'énoncé, le mot « mesure » et la notation $\mathscr{M}(\mathrm{T}; \mathbf{C})$ sont pris au sens des chapitres antérieurs.

PROPOSITION 3. — *Soit* T *un espace localement compact, et soit μ une mesure sur* T. *Désignons par* $\mathrm{W}(\mu)$ *l'application qui à chaque partie compacte* K *de* T *associe la mesure induite μ_K. Alors $\mathrm{W}(\mu)$ est une prémesure sur* T, *on a* $\mathrm{W}(|\mu|) = |\mathrm{W}(\mu)|$, *et l'application linéaire* $\mathrm{W}\colon \mu \mapsto \mathrm{W}(\mu)$ *est une bijection de l'espace* $\mathscr{M}(\mathrm{T}; \mathbf{C})$ *sur l'espace* $\mathscr{P}(\mathrm{T}; \mathbf{C})$ *des prémesures sur* T. *En outre, si μ est positive, on a* $\mu^\bullet = (\mathrm{W}(\mu))^\bullet$.

Il est évident que $\mathrm{W}(\mu)$ est une prémesure (chap. V, 2e éd., § 7, n° 2, prop. 4), et que l'application W est linéaire. La relation $\mathrm{W}(\mu) = 0$ signifie que μ induit la mesure 0 sur tout ensemble compact dans T; on a alors $\mu(f) = 0$ pour $f \in \mathscr{K}(\mathrm{T}; \mathbf{C})$, donc $\mu = 0$, ce qui prouve que W est injective. Reste à prouver que W est surjective. Comme toute prémesure est combinaison linéaire de prémesures positives, il nous suffira de construire, pour toute prémesure *positive* w, une mesure positive μ telle que $w = W(\mu)$. Soit donnée une fonction $f \in \mathscr{K}(T)$, et soit L un ensemble compact contenant le support de f; le nombre $w_L(f_L)$ ne dépend pas du choix de L, d'après la définition des mesures induites, et l'on peut donc poser $\mu(f) = w_L(f_L)$; alors μ est une forme linéaire positive sur $\mathscr{K}(T)$, c'est-à-dire une mesure positive. Vérifions que $w = W(\mu)$; tout d'abord, la relation $\mu^\bullet(f) = w_L^\bullet(f_L)$ s'étend au cas où f est une fonction finie semi-continue supérieurement, positive, nulle hors de L. En effet, soient M un voisinage compact de L, et $\mathscr{H}$ l'ensemble (filtrant décroissant) des fonctions continues sur T, à support contenu dans M, qui majorent f. On a (chap. IV, 2e éd., § 4, n° 4, cor. 2 de la prop. 5)

$$\mu^\bullet(f) = \inf_{h \in \mathscr{H}} \mu(h) = \inf_{h \in \mathscr{H}} w_M(h_M) = w_M^\bullet(f_M)$$

et d'autre part $w_M^\bullet(f_M) = w_L^\bullet(f_L)$ puisque f_M est nulle dans $M - L$ (chap. V, 2e éd., § 7, n° 1, prop. 1). En particulier, si l'on prend pour f le prolongement par 0 d'un élément de $\mathscr{K}_+(L)$, cette formule montre que $\mu_L = w_L$ d'après la définition des mesures induites, et on a donc bien $W(\mu) = w$.

Si μ est positive, on a

$$\mu^\bullet(f) = \sup_K \mu^\bullet(f\varphi_K) = \sup_K \mu_K^\bullet(f_K) = (W(\mu))^\bullet(f)$$

pour tout $f \in \mathscr{F}_+(T)$ (chap. V, 2e éd., § 1, déf. 1 et § 7, prop. 1). La relation $|W(\mu)| = W(|\mu|)$ est évidente (chap. IV, 2e éd., § 5, n° 7, lemme 3).

C.Q.F.D.

Lorsque T est *localement compact*, nous *identifierons* dans toute la suite les espaces $\mathscr{M}(T; \mathbf{C})$ et $\mathscr{P}(T; \mathbf{C})$ au moyen de la bijection W.

Exemple 2. — *Mesures à support compact sur un espace topologique.*

Lemme 2. — *Soient* T *un espace topologique,* L *une partie compacte de* T, λ *une mesure positive sur* L. *Il existe une mesure positive unique* μ *sur* T, *telle que l'on ait, pour toute fonction* $f \in \mathscr{F}_+(T)$,

$$\mu^\bullet(f) = \lambda^\bullet(f_L). \tag{3}$$

Posons en effet $p(f) = \lambda^\bullet(f_L)$ pour tout $f \in \mathscr{F}_+(T)$, et montrons que les conditions 1) et 2) de la prop. 2, *b*) sont vérifiées. La seconde est évidemment vérifiée: on a en fait $p(f) = p(f\varphi_K)$ si K contient L. Si $K \subset T$ est compact, et si $h \in \mathscr{F}_+(K)$, on a

$$p_K(h) = p(h^0) = \lambda^\bullet(h^0|L).$$

Mais $h^0|L$ est le prolongement par 0 de $h_{K \cap L}$ à L: la dernière expression est donc égale à $\mu_K(h)$, où μ_K est l'image de $\lambda|(K \cap L)$ par l'injection de $K \cap L$ dans K (chap. V, 2e éd., § 6, n° 2, prop. 2 et § 7, n° 1, prop. 1) et l'on a $p_K = (\mu_K)^\bullet$. La condition 1) de la prop. 2, *b*) est donc aussi vérifiée, et l'existence de μ en résulte aussitôt.

C.Q.F.D.

On dira que μ est la mesure sur T *définie* par λ. En particulier, pour tout point x de T, on peut définir la mesure ε_x; elle est caractérisée par $(\varepsilon_x)^\bullet(f) = f(x)$ pour $f \in \mathscr{F}_+(\mathrm{T})$.

Remarques. — 1) Lorsque T est localement compact, μ est l'image de λ par l'injection de L dans T. Nous verrons au § 2, n° 3, *Exemple* 1, lorsque les mesures images auront été traitées, que cette interprétation vaut encore pour des espaces quelconques.

2) Nous verrons aussi que les mesures définies dans l'*Exemple* 2 sont les mesures positives à support compact dans T (n° 6, *Remarque* 2)).

Nous ne considérerons plus désormais que des mesures positives, sauf mention expresse du contraire. Dans toute la suite de ce paragraphe, T *désignera un espace topologique et* μ *une mesure positive sur* T.

De nombreux résultats des n^os suivants s'étendent aux prémesures positives. Cette extension est laissée au lecteur.

4. Ensembles et fonctions localement négligeables

DÉFINITION 6. — *On dit qu'une fonction* $f \in \mathscr{F}_+$ *(resp. une partie* A *de* T*) est localement négligeable pour la mesure* μ *si* $\mu^\bullet(f) = 0$ *(resp.* $\mu^\bullet(\mathrm{A}) = 0$*). On dit que* μ *est concentrée sur une partie* A *de* T *si* $\mathrm{T} - \mathrm{A}$ *est localement* μ*-négligeable.*

Remarques. — 1) Les notions ainsi définies coïncident, lorsque T est localement compact, avec les notions usuelles.

2) Lorsque nous aurons défini les ensembles *négligeables*, nous verrons que les ensembles localement négligeables sont bien ceux dont le germe, en tout point de T, est un germe d'ensemble négligeable (n° 9, cor. 2 de la prop. 14).

3) Comme aux chap. IV et V, l'expression « localement presque partout » sera synonyme de « sauf sur un ensemble localement négligeable ».

4) Si θ est une mesure complexe, on dira qu'une fonction (resp. une partie de T) est localement négligeable pour θ si elle l'est pour la mesure positive $|\theta|$.

Exemple. — Soient L une partie compacte de T, λ une mesure sur L, et μ la mesure sur T définie par λ (n° 3, *Exemple* 2). La formule (3) entraîne aussitôt qu'une fonction $f \in \mathscr{F}_+(\mathrm{T})$ est localement μ-négligeable si et seulement si f_L est λ-négligeable.

Il résulte immédiatement de la formule (1) qu'une fonction $f \in \mathscr{F}_+(\mathrm{T})$ est localement μ-négligeable si et seulement si f_K est μ_K-négligeable pour toute partie compacte K de T. Les propriétés des ensembles localement négligeables se ramènent donc aussitôt à celles des ensembles négligeables dans les espaces compacts, traitées au chap. IV. Voici quelques résultats qui seront utilisés par la suite sans autre référence.

— Pour qu'une fonction $f \geqslant 0$ soit localement négligeable, il faut et il suffit que $f(t) = 0$ localement presque partout (chap. IV, 2^e éd., § 2, n° 3, th. 1). Si $\mathbf{f}$ est une fonction à valeurs dans un espace de Banach, il est donc équivalent de dire que $\mathbf{f} = 0$ localement presque partout, ou que $\mu^\bullet(|\mathbf{f}|) = 0$; nous dirons encore dans ce cas que $\mathbf{f}$ est localement négligeable.

— La somme et l'enveloppe supérieure d'une suite de fonctions $\geqslant 0$, localement négligeables, sont localement négligeables (*loc. cit.*, n° 1, prop. 2).

— Si f et g sont deux fonctions $\geqslant 0$ égales localement presque partout, on a $\mu^{\bullet}(f) = \mu^{\bullet}(g)$ (*loc. cit.*, n° 3, prop. 6).

5. Ensembles et fonctions mesurables

DÉFINITION 7. — *On dit qu'une fonction* f *définie dans* T, *à valeurs dans un espace topologique* F (*séparé ou non*) *est mesurable pour la mesure* μ (*ou* μ*-mesurable*) *si, pour toute partie compacte* K *de* T, *la fonction* f_K *est* μ_K*-mesurable.*

Cela revient à dire qu'il existe, pour tout ensemble compact K, une partition de K en un ensemble μ_K-négligeable N et une suite (K_n) d'ensembles compacts, tels que la restriction de f à chacun des K_n soit continue. Comme il est équivalent de dire que N est μ_K-négligeable, ou localement μ-négligeable (n° 4), on voit que f est μ-mesurable si et seulement si, pour tout ensemble compact K, il existe une partition de K en un ensemble localement μ-négligeable N et une suite (K_n) d'ensembles compacts telle que f_{K_n} soit continue pour tout n. Cette définition est identique à la déf. 1 du chap. IV, 2e éd., § 5, n° 1, et on retrouve donc la notion habituelle de fonction mesurable lorsque T est localement compact.

On dit qu'une partie A de T est mesurable si sa fonction caractéristique est mesurable. Si A est μ-mesurable, et si $\mu^{\bullet}(A) < +\infty$, ce nombre est noté simplement $\mu(A)$ et appelé la *mesure* de A. On écrit de même $\mu(f)$ pour $\mu^{\bullet}(f)$ si f est μ-mesurable $\geqslant 0$ et si $\mu^{\bullet}(f) < +\infty$.

Si θ est une mesure complexe sur T, on dit qu'une fonction f (resp. une partie de T) est θ-mesurable si elle est mesurable pour la mesure positive $|\theta|$. Les résultats ci-dessous s'étendent aux mesures complexes.

Exemple. — Soient L une partie compacte de T, λ une mesure sur L et μ la mesure sur T définie par λ (n° 3, *Exemple* 2). Une fonction f définie dans T est μ-mesurable si et seulement si f_L est λ-mesurable. En effet, cette condition est évidemment nécessaire. Inversement, si elle est vérifiée, il existe une partition de L en un ensemble λ-négligeable N et une suite (L_n) d'ensembles compacts, tels que f_{L_n} soit continue pour tout n. Si K est une partie compacte de T, l'ensemble $K - \bigcup_n (K \cap L_n)$ a une intersection avec L qui est λ-négligeable, donc cet ensemble est μ-négligeable d'après la formule (3) du n° 3, et la restriction de f à $K \cap L_n$ est continue pour tout n.

La déf. 7 permet d'étendre, sans nouvelle démonstration, nombre de résultats sur les fonctions mesurables au cas des espaces non localement compacts. En voici quelques-uns, que nous utiliserons par la suite sans autre référence: les ensembles ouverts, les ensembles fermés de T sont μ-mesurables; les ensembles μ-mesurables forment une tribu (chap. IV, 2e éd., § 5, n° 4, cor. 2 du th. 2), qui contient les ensembles boréliens de T (*loc. cit.*, cor. 3), et les ensembles sousliniens (chap. IV, § 5, n° 1, cor. 2 de la prop. 3)[1]. Les opérations algébriques usuelles sur les fonctions numériques préservent la mesurabilité (chap. IV, 2e éd., § 5, n° 3), ainsi que les opérations de passage à la limite dénombrable (*loc. cit.*, n° 4, th. 2 et cor. 1). La propriété suivante mérite une mention plus explicite:

1. La démonstration de ce corollaire est valable sans modification pour les ensembles sousliniens dans un espace localement compact non métrisable (*Top. gén.*, chap. IX, 3e éd., § 6, n° 9, th. 5).

PROPOSITION 4. — *Soient f une fonction positive et $(g_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de fonctions positives μ-mesurables sur* T. *Si l'on pose $g = \sum_{n \geqslant 1} g_n$, on a*

$$\mu^\bullet(fg) = \sum_{n \geqslant 1} \mu^\bullet(fg_n). \tag{4}$$

Posons $h_n = \sum_{i=1}^{n} g_i$ pour tout $n \geqslant 1$. Pour toute partie compacte K de T, on a

$$\mu_K^\bullet((fh_n)_K) = \sum_{i=1}^{n} \mu_K^\bullet((fg_i)_K)$$

d'après la prop. 2 du chap. V, 2e éd., § 1, n° 1 appliquée à l'espace compact K. Passant à la limite selon l'ensemble filtrant croissant des parties compactes de T, on obtient

$$\mu^\bullet(fh_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^\bullet(fg_i).$$

Or fg est la limite de la suite croissante $(fh_n)_{n \geqslant 1}$, d'où $\mu^\bullet(fg) = \lim_{n \to \infty} \mu^\bullet(fh_n)$; la formule précédente entraîne alors immédiatement (4).

COROLLAIRE. — *Soit* (A_n) *une suite de parties mesurables deux à deux disjointes, de réunion* A. *Pour toute partie* B *de* T, *on a*

$$\mu^\bullet(A \cap B) = \sum_n \mu^\bullet(A_n \cap B)$$

et en particulier

$$\mu^\bullet(A) = \sum_n \mu^\bullet(A_n).$$

Parmi les propriétés des fonctions ou ensembles mesurables qui s'étendent comme ci-dessus aux espaces séparés, citons aussi la prop. 12 du chap. IV, 2e éd., § 5, n° 8 (familles μ-denses d'ensembles compacts). Ainsi, une fonction f à valeurs dans un espace topologique (séparé ou non) est μ-mesurable si et seulement si l'ensemble des parties compactes K de T, telles que f_K soit continue, est μ-dense (*loc. cit.*, n° 10, prop. 15).

6. Familles filtrantes; support d'une mesure

PROPOSITION 5. — *a) Soit* H *un ensemble filtrant croissant de fonctions $\geqslant 0$, semi-continues inférieurement dans toute partie compacte de* T. *On a alors*

$$\mu^\bullet(\sup_{h \in H} h) = \sup_{h \in H} \mu^\bullet(h). \tag{5}$$

b) Soit H *un ensemble filtrant décroissant de fonctions $\geqslant 0$, semi-continues supérieurement dans tout compact de* T. *S'il existe dans* H *une fonction h_0 telle que $\mu^\bullet(h_0) < +\infty$, on a*

$$\mu^\bullet(\inf_{h \in H} h) = \inf_{h \in H} \mu^\bullet(h). \tag{6}$$

Nous avons en effet, pour tout ensemble compact $K \subset T$

$$\mu^\bullet(\sup_{h \in H} h\varphi_K) = \mu_K^\bullet(\sup_{h \in H} h_K) = \sup_{h \in H} \mu_K^\bullet(h_K) = \sup_{h \in H} \mu^\bullet(h\varphi_K)$$

dans le cas *a*) et

$$\mu^\bullet(\inf_{h \in H} h\varphi_K) = \mu_K^\bullet(\inf_{h \in H} h_K) = \inf_{h \in H} \mu_K^\bullet(h_K) = \inf_{h \in H} \mu^\bullet(h\varphi_K)$$

dans le cas *b*) d'après la prop. 2 du n° 2, et la prop. 8 du chap. V, 2e éd., § 1, n° 2. Le cas *a*) s'en déduit aussitôt, par passage à la borne supérieure par rapport à K (n° 2, prop. 2). Pour traiter le cas *b*), désignons par ε un nombre > 0, et choisissons l'ensemble compact K tel que l'on ait $\mu^\bullet(h_0\varphi_K) \geqslant \mu^\bullet(h_0) - \varepsilon$. Nous avons alors (n° 5, prop. 4) $\mu^\bullet(h_0\varphi_{\complement K}) \leqslant \varepsilon$; pour toute fonction $h \in H$ majorée par h_0, on a donc $\mu^\bullet(h\varphi_{\complement K}) \leqslant \varepsilon$, et finalement $\mu^\bullet(h\varphi_K) \geqslant \mu^\bullet(h) - \varepsilon$ d'après la prop. 4 du n° 5. Par conséquent, on a

$$\mu^\bullet(\inf_{h \in H} h) \geqslant \mu^\bullet(\inf_{h \in H} h\varphi_K) = \inf_{\substack{h \in H \\ h \leqslant h_0}} \mu^\bullet(h\varphi_K) \geqslant \inf_{\substack{h \in H \\ h \leqslant h_0}} \mu^\bullet(h) - \varepsilon.$$

Par conséquent, le premier membre de (6) majore le second; l'inégalité inverse étant évidente, la proposition est établie.

Corollaire. — *a*) *Soit* $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ *une famille filtrante croissante de parties ouvertes de* T, *de réunion* U. *On a* $\mu^\bullet(U) = \sup_{\alpha \in I} \mu^\bullet(U_\alpha)$.

b) *Soit* $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ *une famille filtrante décroissante de parties fermées de* T, *d'intersection* F. *S'il existe* $\alpha \in I$ *tel que* $\mu^\bullet(F_\alpha)$ *soit fini, on a* $\mu^\bullet(F) = \inf_{\alpha \in I} \mu^\bullet(F_\alpha)$.

D'après le cor. précédent, il existe un plus grand ouvert localement négligeable; ceci justifie la définition suivante:

Définition 8. — *On appelle support d'une mesure* μ *sur* T *le complémentaire du plus grand ensemble ouvert localement* μ*-négligeable de* T.

Le support de μ est désigné par la notation $\mathrm{Supp}(\mu)$.

Remarques. — 1) Si μ est une mesure complexe, on appelle support de μ le support de la mesure positive $|\mu|$; c'est encore le complémentaire du plus grand ensemble ouvert localement μ-négligeable.

2) Montrons que les mesures introduites dans l'*Exemple* 2 du n° 3 sont les mesures à support compact dans T. Soit μ une mesure positive sur T dont le support est un ensemble compact K, et soit ν la mesure définie par μ_K (au sens du n° 3). Soit $f \in \mathscr{F}_+(T)$; on a

$$\nu^\bullet(f) = \mu_K^\bullet(f_K) \qquad \text{(n° 3, formule (3))}.$$

L'encombrement $\mu^\bullet$ étant concentré sur K, on a aussi

$$\mu^\bullet(f) = \mu^\bullet(f\varphi_K) = \mu^\bullet((f_K)^0) = \mu_K^\bullet(f_K)$$

d'où $\mu^\bullet = \nu^\bullet$, et enfin $\mu = \nu$. Inversement, si K est un ensemble compact dans T et λ une mesure sur K, et si μ est la mesure sur T définie par λ, on a $\mu^\bullet(\complement K) = 0$ (n° 3, formule (3)); par suite, le support de μ est contenu dans K, donc est compact.