N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

Algèbre

Chapitre 9

Springer

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

ALGÈBRE

Chapitre 9

Springer

Réimpression inchangée de l'édition originale de 1959

ISBN 978-3-540-35338-6 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: WMXDesign GmbH, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

CHAPITRE IX

FORMES SESQUILINÉAIRES ET FORMES QUADRATIQUES

Sauf mention expresse du contraire, tous les anneaux considérés dans ce chapitre sont supposés admettre un élément unité noté 1 ; *tous les modules sont supposés unitaires* ; *pour tout homomorphisme* f *d'un anneau* A *dans un anneau* B *on suppose que* $f(1) = 1$.

§ 1. Formes sesquilinéaires

1. Applications bilinéaires.

Dans ce n° l'on désigne par A et B deux anneaux, par E un A-module à gauche, par F un B-module à droite, et par G un (A, B)-*bimodule*, c'est-à-dire un groupe commutatif muni d'une structure de A-module à gauche et d'une structure de B-module à droite telles que l'on ait $(ag)b = a(gb)$ quels que soient $a \in \mathrm{A}$, $b \in \mathrm{B}$, $g \in \mathrm{G}$.

DÉFINITION 1. — *On dit qu'une application* Φ *du produit* $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ *dans* G *est bilinéaire si elle satisfait aux conditions suivantes :*

(1) $\Phi(x + x', y) = \Phi(x, y) + \Phi(x', y)$ *quels que soient* $x \in \mathrm{E}$, $x' \in \mathrm{E}$, $y \in \mathrm{F}$;

(2) $\Phi(x, y + y') = \Phi(x, y) + \Phi(x, y')$ *quels que soient* $x \in \mathrm{E}$, $y \in \mathrm{F}$, $y' \in \mathrm{F}$;

(3) $\Phi(ax, y) = a\Phi(x, y)$ *quels que soient* $a \in \mathrm{A}$, $x \in \mathrm{E}$, $y \in \mathrm{F}$;

(4) $\Phi(x, yb) = \Phi(x, y)b$ *quels que soient* $x \in \mathrm{E}$, $y \in \mathrm{F}$, $b \in \mathrm{B}$.

Le produit tensoriel $E \otimes_{\mathbf{Z}} F$ est canoniquement muni d'une structure de (A, B)-bimodule caractérisée par $a(x \otimes y)b = ax \otimes yb$ (Chap. III, 2e éd., App. II, no 3), et la donnée d'une application bilinéaire Φ de $E \times F$ dans G équivaut à celle d'une application Ψ de $E \otimes_{\mathbf{Z}} F$ dans G qui soit un homomorphisme pour les structures de (A, B)-bimodules et qui vérifie $\Psi(x \otimes y) = \Phi(x, y)$ quels que soient $x \in E$ et $y \in F$.

Les conditions imposées à Φ par la définition 1 signifient que les applications partielles $d_\Phi(y) : x \rightarrow \Phi(x, y)$ et $s_\Phi(x) : y \rightarrow \Phi(x, y)$ sont respectivement une application A-linéaire de E dans G et une application B-linéaire de F dans G. Munissons le groupe commutatif $\mathcal{L}_A(E, G)$ (resp. $\mathcal{L}_B(F, G)$) de la structure de B-module à droite (resp. de A-module à gauche) définie par $ub(x) = u(x) . b$ $(u \in \mathcal{L}_A(E, G)$, $x \in E$, $b \in B)$ (resp. $av(y) = a . v(y)$ $(a \in A$, $v \in \mathcal{L}_B(F, G)$, $y \in F)$). Alors les conditions (1) à (4) sont respectivement équivalentes à :

(1′) $$s_\Phi(x + x') = s_\Phi(x) + s_\Phi(x')$$

(2′) $$d_\Phi(y + y') = d_\Phi(y) + d_\Phi(y')$$

(3′) $$s_\Phi(ax) = a . s_\Phi(x)$$

(4′) $$d_\Phi(yb) = d_\Phi(y) . b,$$

quels que soient x, x' dans E, y, y' dans F, $a \in A$, $b \in B$; autrement dit, l'application d_Φ de F dans $\mathcal{L}_A(E, G)$ est B-*linéaire*, et l'application s_Φ de E dans $\mathcal{L}_B(F, G)$ est A-*linéaire*. On a, par définition

(5) $\Phi(x, y) = d_\Phi(y)(x) = s_\Phi(x)(y)$ quels que soient $x \in E$, $y \in F$.

DÉFINITION 2. — *Etant donnée une application bilinéaire* Φ *de* $E \times F$ *dans* G, *l'application* d_Φ *de* F *dans* $\mathcal{L}_A(E, G)$ (resp. *l'application* s_Φ *de* E *dans* $\mathcal{L}_B(F, G)$) *caractérisée par* (5) *est appelée l'application linéaire associée à droite* (resp. *à gauche*) *à* Φ.

Inversement la donnée d'une application B-linéaire d de F dans $\mathcal{L}_A(E, G)$ (resp. d'une application A-linéaire s de E dans $\mathcal{L}_B(F, G)$) détermine de façon unique, par la formule

$$\Phi(x, y) = d(y)(x) \qquad (\text{resp. } \Phi(x, y) = s(x)(y))$$

une application bilinéaire Φ de $E \times F$ dans G, dont d (resp. s) est l'application linéaire associée à droite (resp. à gauche).

Définition 3. — *Une application bilinéaire* Φ *de* $E \times F$ *dans* G *est dite dégénérée à droite* (resp. *à gauche*) *s'il existe un élément non nul* y_0 *de* F (resp. x_0 *de* E) *tel que* $\Phi(x, y_0) = 0$ *pour tout* $x \in E$ (resp. $\Phi(x_0, y) = 0$ *pour tout* $y \in F$). *On dit que* Φ *est dégénérée si elle est dégénérée à droite ou si elle est dégénérée à gauche.*

Pour que Φ soit non dégénérée à droite (resp. à gauche) il faut et il suffit que l'application linéaire associée à droite (resp. à gauche) à Φ soit *injective* ; dire que Φ est *non dégénérée* signifie donc que les applications linéaires associées d_Φ et s_Φ sont *toutes deux* injectives.

Soient $(e_i)_{i \in I}$ et $(f_k)_{k \in K}$ deux familles d'éléments de E et F, et soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_k)_{k \in K}$ deux familles d'éléments de A et B nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux. Il résulte des égalités (1) à (4), par récurrence sur le nombre des coefficients non nuls, que l'on a

$$\Phi(\sum_i a_i e_i, \sum_k f_k b_k) = \sum_{i,k} a_i \Phi(e_i, f_k) b_k. \tag{6}$$

Si (e_i) et (f_k) sont des systèmes de générateurs des modules E et F, Φ est donc complètement déterminée par les éléments $g_{ik} = \Phi(e_i, f_k)$. Si (e_i) et (f_k) sont des bases de E et F et que l'on se donne des éléments g_{ik} de G ($i \in I$, $k \in K$), alors la formule

$$\Phi(\sum_i a_i e_i, \sum_k f_k b_k) = \sum_{i,k} a_i g_{ik} b_k \tag{6'}$$

définit une application de $E \times F$ dans G, qui est bilinéaire et qui vérifie $\Phi(e_i, f_k) = g_{ik}$. Lorsque (e_i) et (f_k) sont des bases finies, on dit que $(\Phi(e_i, f_k))$ est la *matrice de* Φ *par rapport à ces bases.*

Les applications bilinéaires de $E \times F$ dans G forment évidemment un *sous-groupe* du groupe additif des applications de $E \times F$ dans G. D'autre part soit a (resp. b) un élément du *centre* de A (resp. B) ; alors l'application $a\Phi b$ de $E \times F$ dans G définie par $(a\Phi b)(x, y) = a.\Phi(x, y).b$ est bilinéaire. L'ensemble des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G est ainsi muni d'une structure de *bimodule* sur les centres de A et B.

Soient E′ (resp. F′) un A-module à gauche (resp. un B-module à droite), u (resp. v) un homomorphisme de E dans E′ (resp. de F dans F′) et Φ' une application bilinéaire de $E' \times F'$ dans G. On appelle *image réciproque* de Φ' (relativement à u et v) l'application bilinéaire Φ de $E \times F$ dans G définie par

$$\Phi(x, y) = \Phi'(u(x), v(y)) \qquad (x \in E,\ y \in F).$$

On vérifie aisément que l'on a

$$d_\Phi(y) = d_{\Phi'}(v(y)) \circ u \qquad \text{et} \qquad s_\Phi(x) = s_{\Phi'}(u(x)) \circ v$$

quels que soient $x \in E$, $y \in F$.

Soient Φ une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, et h un homomorphisme (pour les structures de (A, B)-bimodules) de G dans un autre (A, B)-bimodule G′. Alors $h \circ \Phi$ est une application bilinéaire de $E \times F$ dans G′.

2. *Applications sesquilinéaires.*

Dans ce nº l'on désigne, sauf mention expresse du contraire, par A et B deux anneaux, par E un A-module à gauche et par F un B-module *à gauche* ; l'on désigne par $b \to b^J$ ($b \in B$) un *antiautomorphisme* de B, c'est-à-dire une bijection de B sur lui-même qui vérifie $(b + c)^J = b^J + c^J$ et $(bc)^J = c^J b^J$ quels que soient b, c dans B ; on écrira J′ au lieu de J^{-1}. On désigne par G un (A, B)-bimodule (nº 1).

Définition 4. — *On dit qu'une application* Φ *de* $E \times F$ *dans* G *est sesquilinéaire à droite pour* J *si elle satisfait aux conditions* (1), (2), (3) (déf. 1, nº 1) *ainsi qu'à*

(7) $\Phi(x, by) = \Phi(x, y) . b^J$ *quels que soient* $x \in E$, $y \in F$ *et* $b \in B$.

Si J est l'identité (ce qui exige que B soit *commutatif*), on retrouve la notion d'application bilinéaire.

Soient $(e_i)_{i \in I}$ et $(f_k)_{k \in K}$ deux familles d'éléments de E et F, et soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_k)_{k \in K}$ des éléments de A et B nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux. On a alors

$$\Phi(\sum_i a_i e_i, \sum_k b_k f_k) = \sum_{i,k} a_i \Phi(e_i, f_k) b_k^J. \tag{8}$$

Comme dans le cas d'une application bilinéaire, les éléments $\Phi(e_i, f_k)$ déterminent Φ de façon unique lorsque (e_i) et (f_k) sont des systèmes de générateurs, et peuvent être pris arbitrairement lorsque (e_i) et (f_k) sont des bases de E et F ; lorsque (e_i) et (f_k) sont des bases finies, on dit que $(\Phi(e_i, f_k))$ est la *matrice de* Φ par rapport à ces bases.

Comme pour les applications bilinéaires, on définit sur l'ensemble des applications sesquilinéaires à droite (pour J) de $E \times F$ dans G une structure de bimodule sur les centres de A et B. On définit la notion d'image réciproque d'une application sesquilinéaire par la même formule que pour une application bilinéaire. Nous allons du reste voir que l'étude des applications sesquilinéaires peut se ramener à celle des applications bilinéaires.

DÉFINITION 5. — *Soient* B *un anneau*, F *un* B-*module à gauche* (resp. *à droite*) *et* J *un antiautomorphisme de* B. *On désigne par* F^J *le* B-*module à droite* (resp. *à gauche*) *ayant même groupe additif sous-jacent que* F *et dans lequel la loi de composition externe est* $(b, y) \to b^{J'}y$ (resp. $(b, y) \to yb^{J'}$) $(b \in B,\ y \in F,\ J' = J^{-1})$.

Avec les notations de la définition 5, une application linéaire de F^J dans un B-module à droite (resp. à gauche) H s'identifie donc à une application **Z**-linéaire u de F dans H vérifiant

$$u(by) = u(y)b^J \qquad (\text{resp. } u(yb) = b^J u(y)) \qquad (b \in B,\ y \in F).$$

L'application u de F dans H est une application *semi-linéaire* de F dans H relative à J (chap. II, App. I, n° 1), si l'on considère J comme un isomorphisme de l'anneau B^0 opposé de B sur B, et F comme un B^0-module à droite (resp. à gauche).

De même une application sesquilinéaire à droite Φ (pour J) de $E \times F$ dans G, où F est un B-module à gauche, s'identifie à une application bilinéaire de $E \times F^J$ dans G ; si cette dernière est *dégénérée à droite* (resp. *dégénérée à gauche*, *non dégénérée*), on dit que Φ est *dégénérée à droite* (resp. *dégénérée à gauche*, *non dégénérée*).

Remarque. — Soient A et B deux anneaux, J_1 un antiautomorphisme de A, M un A-module à droite, N un B-module à droite et G un (A, B)-bimodule. On dit qu'une application Φ de $M \times N$ dans G est *sesquilinéaire à gauche pour* J_1 si elle est $\mathbf{Z}$-bilinéaire et si elle vérifie

$$(9) \qquad \Phi(xa, yb) = a^{J_1}\Phi(x, y)b \qquad (x \in M, y \in N, a \in A, b \in B).$$

Une telle application s'identifie à une application bilinéaire de $M^{J_1} \times N$ dans G. Nous laisserons souvent au lecteur le soin de transposer aux applications sesquilinéaires à gauche les définitions et propriétés données pour les applications sesquilinéaires à droite ; lorsque nous parlerons d'application sesquilinéaire (sans préciser), il s'agira d'une application sesquilinéaire *à droite.*

3. *Orthogonalité. Sommes directes d'applications bilinéaires ou sesquilinéaires.*

Dans ce n°, A et B désignent des anneaux, E un A-module à gauche, F un B-module à droite (resp. à gauche), G un (A, B)-bimodule, et Φ une application bilinéaire (resp. sesquilinéaire pour un antiautomorphisme donné J de B) de $E \times F$ dans G.

DÉFINITION 6. — *Deux éléments* $x \in E$ *et* $y \in F$ *sont dits orthogonaux par rapport à* Φ *si* $\Phi(x, y) = 0$. *Deux parties* $E' \subset E$ *et* $F' \subset F$ *sont dites orthogonales si, quels que soient* $x \in E'$ *et* $y \in F'$, x *et* y *sont orthogonaux. L'ensemble des éléments de* E (resp. F) *orthogonaux à un sous-module donné* N *de* F (*resp.* M *de* E) *est un sous-module de* E (resp. F), *qu'on appelle le sous-module totalement orthogonal* (ou simplement *orthogonal*) *à* N (resp. M), *et qu'on note* N^0 (resp. M^0).

Soient H et H' deux sous-modules de E ou de F. On a $H \subset (H^0)^0$ (que l'on note H^{00}) ; si $H \subset H'$, on a $H'^0 \supset H^0$. Il en résulte que l'on a $H^0 \supset (H^{00})^0$ et $H^0 \subset (H^0)^{00}$; en posant

$$H^{000} = (H^{00})^0 = (H^0)^{00} = ((H^0)^0)^0,$$

on a donc $H^0 = H^{000}$.

Pour que l'application Φ soit dégénérée (n° 1, déf. 3) il faut et il suffit que l'un au moins des deux sous-modules E^0, F^0 soit $\neq \{0\}$. Il est clair que $\Phi(x, y)$ ne change pas lorsqu'on ajoute à x (resp. y)

un élément de F^0 (resp. E^0), et Φ définit donc par passage au quotient une application bilinéaire (ou sesquilinéaire) sur $(E/F^0) \times (F/E^0)$; celle-ci est visiblement non dégénérée ; on l'appelle *l'application bilinéaire* (ou *sesquilinéaire*) *non dégénérée associée à* Φ.

Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille de A-modules à gauche, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de B-modules à droite (resp. à gauche), Φ_i une application bilinéaire (resp. sesquilinéaire à droite pour J) de $E_i \times F_i$ dans G. Notons E (resp. F) le module somme directe des E_i (resp. F_i). On voit aussitôt que l'application Φ de $E \times F$ dans G définie par

$$\Phi((x_i), (y_i)) = \sum_i \Phi_i(x_i, y_i) \qquad (x_i \in E_i,\ y_i \in F_i) \tag{10}$$

(somme qui a un sens puisque ses termes sont nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux) est bilinéaire (resp. sesquilinéaire à droite pour J). On l'appelle la *somme directe des applications* Φ_i. Il est clair que E_i est orthogonal à F_j par rapport à Φ pour $i \neq j$. Réciproquement, soit Φ une application bilinéaire ou sesquilinéaire de $E \times F$ dans G, et supposons que E soit somme directe de sous-modules $(E_i)_{i \in I}$ et F somme directe de sous-modules $(F_i)_{i \in I}$ tels que E_i soit orthogonal à F_j pour $i \neq j$; alors Φ est la somme directe de ses restrictions aux produits $E_i \times F_i$ $(i \in I)$.

Pour que Φ soit non dégénérée, il faut et il suffit que chacune des Φ_i le soit ; dans ces conditions, le sous-module orthogonal à E_i est $\sum_{j \neq i} F_j$.

4. *Changement d'anneaux de base.*

Dans ce n°, l'on désigne par A, B, A′, B′ quatre anneaux, par h et h' des homomorphismes de A dans A′ et de B dans B′ respectivement, par G un (A, B)-bimodule, par G′ un (A′, B′)-bimodule, et par u un homomorphisme du groupe abélien sous-jacent à G dans le groupe abélien sous-jacent à G′, vérifiant

$$u(agb) = h(a)u(g)h'(b) \quad (a \in A,\ g \in G,\ b \in B). \tag{11}$$

Soit E (resp. F) un A-module à gauche (resp. un B-module à droite). Rappelons (Chap. III, 2e éd., App. II, n° 10) que, si l'on considère A′ (resp. B′) comme un A-module à droite (resp. B-module à gauche), le produit tensoriel $E' = A' \otimes_A E$ (resp. $F' = F \otimes_B B'$) est muni d'une structure de A′-module à gauche (resp. B′-module à droite) définie par

$$a'_1(a' \otimes x) = (a'_1 a') \otimes x \qquad (a', a'_1 \in A', x \in E) \tag{12}$$
$$(\text{resp. } (y \otimes b')b'_1 = y \otimes (b'b'_1) \qquad (b', b'_1 \in B', y \in F)).$$

PROPOSITION 1. — *Soient* E *un* A-*module à gauche et* F *un* B-*module à droite* ; *posons* $E' = A' \otimes_A E$ *et* $F' = F \otimes_B B'$. *Pour toute application bilinéaire* Φ *de* $E \times F$ *dans* G, *il existe une application bilinéaire* Φ' *et une seule de* $E' \times F'$ *dans* G′ *telle que l'on ait*

$$\Phi'(a' \otimes x, y \otimes b') = a' . u(\Phi(x, y)) . b' \tag{13}$$

quels que soient $a' \in A'$, $b' \in B'$, $x \in E$, $y \in F$.

L'unicité de Φ' résulte du fait que les éléments $a' \otimes x$ et $y \otimes b'$ engendrent E′ et F′ respectivement. Pour en démontrer l'existence, considérons l'application

$$m : (a', x, y, b') \to a' . u(\Phi(x, y)) . b'$$

de $A' \times E \times F \times B'$ dans G ; elle est évidemment **Z**-multilinéaire, et elle vérifie

$$m(a', ax, y, b') = m(a'h(a), x, y, b')$$

et
$$m(a', x, yb, b') = m(a', x, y, h'(b)b')$$
$$(a \in A,\ b \in B,\ a' \in A',\ b' \in B',\ x \in E,\ y \in F).$$

Il existe donc une application **Z**-bilinéaire Φ' de $E' \times F'$ dans G′ vérifiant (13) (Chap. III, 2e éd., App. II, no 1, prop. 2). Cette relation et la définition des structures de modules de E′ et F′ par (12) montrent que Φ' est bilinéaire, ce qui termine la démonstration.

Les hypothèses et notations étant celles de la proposition 1, étudions maintenant les *applications linéaires associées* à Φ et à Φ' (no 1, déf. 2). Pour cela nous allons d'abord définir un homomorphisme canonique de $\mathcal{L}_A(E, G)$ dans $\mathcal{L}_{A'}(E', G')$. Pour tout $v \in \mathcal{L}_A(E, G)$ l'application $(a', x) \to a' . u(v(x))$ de $A' \times E$ dans G′ est **Z**-bilinéaire, et, vu (11), applique $(a'h(a), x)$ et (a', ax) $(a \in A)$ sur le même élément de G′ ; elle définit donc (chap. III, 2e éd., App. II, n^os 1 et 10) une application $k(v)$ de $E' = A' \otimes_A E$ dans G' telle que $k(v)(a' \otimes x) = a'.u(v(x))$, et qui, vu (12), est A′-linéaire. En outre l'on déduit immédiatement de (12) que l'application $v \to k(v)$ de $\mathcal{L}_A(E, G)$ dans $\mathcal{L}_{A'}(E', G')$ vérifie $k(vb) = k(v)h'(b)$ pour tout $b \in B$. Notons i l'application canonique $y \to y \otimes 1$ de F dans F′. Alors le *diagramme*

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{d_\Phi} & \mathcal{L}_A(E, G) \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ F' & \xrightarrow{d_{\Phi'}} & \mathcal{L}_{A'}(E', G') \end{array} \tag{14}$$

(où d_Φ et $d_{\Phi'}$ désignent les applications linéaires associées à droite à Φ et Φ') *est commutatif.* En effet, pour $x \in E$, $y \in F$ et $a' \in A'$, on a $d_{\Phi'}(i(y))(a' \otimes x) = \Phi'(a' \otimes x, y \otimes 1) = a'.u(\Phi(x, y)) = a'.u(d_\Phi(y)(x))$, c'est-à-dire $d_{\Phi'}(i(y))(a' \otimes x) = k(d_\Phi(y))(a' \otimes x)$. On a une relation de commutation analogue pour les applications linéaires s_Φ et $s_{\Phi'}$ associées à gauche à Φ et Φ'.

Proposition 2. — *Supposons que* B *et* B′ *soient munis d'anti-automorphismes* J *et* I *tels que*

$$h'(b^J) = h'(b)^I \qquad \textit{pour tout } b \in B. \tag{15}$$

Soient E *un* A-*module à gauche et* F *un* B-*module à gauche* ; *posons* $E' = A' \otimes_A E$ *et* $F' = B' \otimes_B F$. *Pour toute application sesquilinéaire* (*pour* J) Φ *de* $E \times F$ *dans* G, *il existe une application sesquilinéaire* (*pour* I) Φ' *et une seule de* $E' \times F'$ *dans* G′ *telle que*

$$\Phi'(a' \otimes x, b' \otimes y) = a'.u(\Phi(x, y)).b'^I \tag{16}$$

quels que soient $a' \in A'$, $b' \in B'$, $x \in E$, $y \in F$.

L'unicité de Φ' résulte du fait que les produits tensoriels $a' \otimes x$ et $b' \otimes y$ engendrent E′ et F′ respectivement. Pour en établir l'existence, considérons l'application

$$m : (a, x, b', y) \to a'.u(\Phi(x, y)).b'^I$$

de $A' \times E \times B' \times F$ dans G′. Elle est évidemment **Z**-multilinéaire, et, compte tenu de (11) et (15), vérifie $m(a', ax, b', y) = m(a'h(a), x, b', y)$ et $m(a', x, b', by) = a'.u(\Phi(x, y)).h'(b^J)b'^I = m(a', x, b'h'(b), y)$ ($a \in A$, $b \in B$, $a' \in A'$, $b' \in B'$, $x \in E$, $y \in F$). Il existe donc une application **Z**-bilinéaire Φ' de $E' \times F'$ dans G′

vérifiant (16) (chap. III, 2e éd., App. II, n° 1, prop. 2). Cette relation, ainsi que la définition des structures de modules de E′ et F′ par (12), montrent, compte tenu de (15), que Φ' est sesquilinéaire pour I, ce qui achève la démonstration.

Les exemples les plus importants de (A′, B′)-bimodules G′, munis d'applications **Z**-linéaires u de G dans G′ vérifiant (11), sont les suivants :

1) On prend pour G′ le produit tensoriel $A' \otimes_A G \otimes_B B'$ (chap. III, 2e éd., App. II, n° 9) et pour u l'application

$$g \to 1 \otimes g \otimes 1 \qquad (g \in G)$$

de G dans G′. Le couple (G′, u) ainsi défini est visiblement *universel* dans le sens suivant : pour tout (A′, B′)-bimodule G'_1 et toute application **Z**-linéaire u_1 de G dans G'_1 vérifiant l'analogue de (11), il existe une application **Z**-linéaire f et une seule de G′ dans G'_1 telle que $f(a'g'b') = a'f(g')b'$ ($a' \in A'$, $g' \in G'$, $b' \in B'$; autrement dit f est un homomorphisme pour les structures de bimodules de G′ et G'_1) et que $u_1 = f \circ u$.

2) Lorsque A = B = G (la structure de (A, A)-bimodule de A étant définie par les homothéties à gauche et à droite), A′ = B′, et $h = h'$ on peut prendre pour G′ l'anneau A′ et pour u l'homomorphisme h de A dans A′.

3) Supposons que l'on ait A = B, A′ = B′, $h = h'$, que les anneaux A et A′ soient *commutatifs*, et que la structure de A-module à gauche de G coïncide avec sa structure de A-module à droite. On peut alors prendre pour G′ le produit tensoriel $A' \otimes_A G$ (la structure de A′-module à droite de G′ coïncidant avec sa structure de A′-module à gauche) et pour u l'application $g \to 1 \otimes g$ ($g \in G$) de G dans G′. Nous dirons alors que l'application bilinéaire (resp. sesquilinéaire) Φ' définie par la prop. 1 (resp. prop. 2) est obtenue à partir de Φ *par extension de l'anneau de base*, ou *par extension des scalaires.*

Ce qui suit est valable aussi bien pour les applications bilinéaires que pour les applications sesquilinéaires ; les hypothèses et notations sont celles de la prop. 1 (resp. prop. 2). Étant donné un sous-module M de E ou F, on désignera par M′ le sous-module de E′ ou F′ engendré par l'image canonique de M.

Proposition 3. — *Les hypothèses et notations étant celles de la prop.* 1 (resp. *prop.* 2) *supposons de plus que* A, B, A′, B′ *soient des corps et que les applications* α *et* β *de* $A' \otimes_A G$ *et* $G \otimes_B B'$ *dans* G′ *caractérisées par* $\alpha(a' \otimes g) = a'u(g)$ *et* $\beta(g \otimes b') = u(g)b'$ $(a' \in A'$, $b' \in B'$, $g \in G)$ *soient injectives. Soient* M *un sous-espace de* E *et* N *un sous-espace de* F. *Alors le sous-espace* $(M')^0$ *de* F′ *orthogonal à* M′ *par rapport à* Φ' *est égal à* $(M^0)'$, *et, de même, on a* $(N')^0 = (N^0)'$.

En effet les inclusions $(M^0)' \subset (M')^0$ et $(N^0)' \subset (N')^0$ sont évidentes (et d'ailleurs vraies sans hypothèses sur A, B, A′, B′, α ni β). Nous allons démontrer l'inclusion $(M')^0 \subset (M^0)'$; nous laissons au lecteur la vérification de l'inclusion $(N')^0 \subset (N^0)'$, qui est tout à fait analogue. Soit y' un élément de $(M')^0$. On peut écrire

$$y' = \sum_{i=1}^{s} y_i \otimes b'_i \qquad (\text{resp. } y' = \sum_{i=1}^{s} b'_i \otimes y_i)$$

où $y_i \in F$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, et où les b'_i sont des éléments de B′ qui sont linéairement indépendants sur B pour la structure de B-module à gauche (resp. à droite) de B′. Soient $x \in M$ et $x' = 1 \otimes x \in M'$. On a

$$0 = \Phi'(x', y') = \sum_i u(\Phi(x, y_i))b'_i = \beta(\sum_i \Phi(x, y_i) \otimes b'_i)$$

$$(\text{resp. } 0 = \Phi'(x', y') = \sum_i u(\Phi(x, y_i))b'^{\mathrm{I}}_i = \beta(\sum_i \Phi(x, y_i) \otimes b'^{\mathrm{I}}_i).$$

Comme β est injective et que les b'_i (resp. les b'^{I}_i, compte tenu de (15)) sont linéairement indépendants sur B pour la structure de B-module à gauche de B′, ceci entraîne $\Phi(x, y_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, s$. Comme cette dernière relation est vraie pour tout $x \in M$, on a $y_i \in M^0$ pour $i = 1, \ldots, s$, d'où $y' \in (M^0)'$. CQFD.

Corollaire. — *Les hypothèses et notations étant celles de la prop.* 3, *pour que* Φ' *soit non dégénérée, il faut et il suffit que* Φ *soit non dégénérée.*

En effet, d'après la prop. 3, on a $(F')^0 = (F^0)'$ et $(E')^0 = (E^0)'$. D'autre part, pour que Φ (resp. Φ') soit non dégénérée, il faut et il suffit que l'on ait $F^0 = E^0 = \{0\}$ (resp. $(F')^0 = (E')^0 = \{0\}$).

Remarque. — Supposons que A, B, A′ et B′ soient des corps. Alors, pour les bimodules G′ définis dans les trois exemples ci-dessus, les applications α et β sont injectives, comme il résulte aussitôt du chap. III, 2e éd., App. II, n° 6.

5. *Quelques identités.*

Dans ce n°, l'on désigne par A un anneau muni d'un antiautomorphisme J, par E un A-module à gauche, par G un (A, A)-bimodule, et par Φ une application sesquilinéaire (à droite) pour J de $E \times E$ dans G. On pose $Q(x) = \Phi(x, x)$ $(x \in E)$. On a évidemment

$$(17)\qquad Q(x+y) = Q(x) + \Phi(x, y) + \Phi(y, x) + Q(y)$$

$$(18)\qquad Q(x-y) = Q(x) - \Phi(x, y) - \Phi(y, x) + Q(y)$$

quels que soient x, y dans E. D'où, par soustraction,

$$(19)\qquad 2(\Phi(x, y) + \Phi(y, x)) = Q(x+y) - Q(x-y).$$

Soit a un élément de A ; en remplaçant y par ay dans (19), il vient

$$(20)\qquad 2(\Phi(x, y)a^{J} + a\Phi(y, x)) = Q(x+ay) - Q(x-ay).$$

On tire de (19) et (20), en multipliant (19) par a (à gauche) et en soustrayant :

$$(21)\qquad 2(a\Phi(x, y) - \Phi(x, y)a^{J}) \\ = aQ(x+y) - aQ(x-y) - Q(x+ay) + Q(x-ay).$$

Supposons en particulier que A soit une *extension quadratique* K(i) d'un anneau commutatif K, avec $i^2 = -1$ (chap. II, § 7, n° 7), que J soit le K-automorphisme $u + iv \to u - iv$ (u, v dans K) de A, et que les structures de A-module à gauche et de A-module à droite de G coïncident. En faisant $a = i$ dans (21), on obtient

$$(22)\qquad 4\Phi(x, y) = Q(x+y) - Q(x-y) + iQ(x+iy) - iQ(x-iy).$$

6. *Formes bilinéaires et sesquilinéaires. Rang.*

Dans ce n°, l'on désigne par A un anneau (resp. un anneau muni d'un antiautomorphisme J), par E un A-module à gauche, et par F un A-module à droite (resp. à gauche). On munit A de la structure de (A, A)-bimodule définie par les homothéties à gauche et les homothéties à droite. Dans ce cas une application bilinéaire (resp. sesquilinéaire à droite pour J) de $E \times F$ dans le bimodule A s'appelle une *forme bilinéaire* (resp. *sesquilinéaire à droite pour* J) *sur* $E \times F$.

Lorsque $E = F$ (ce qui implique qu'il s'agit d'une forme sesquilinéaire), on dit souvent qu'une forme sesquilinéaire sur $E \times F$ est une *forme sesquilinéaire sur* E.

Étant donnés deux A-modules à gauche E et E', et deux formes Φ et Φ' sesquilinéaires pour J sur E et E' respectivement, on dit que Φ et Φ' sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme u du A-module E sur le A-module E' tel que $\Phi'(u(x), u(y)) = \Phi(x, y)$ quels que soient x, y dans E ; alors Φ est l'image réciproque de Φ' relativement à u et u, et Φ' est l'image réciproque de Φ relativement à u^{-1} et u^{-1} (n° 2).

Soit Φ une forme bilinéaire sur $E \times F$ (F désignant un A-module à droite). Les applications linéaires s_Φ et d_Φ associées à Φ (n° 1, déf. 2) sont alors des applications de E dans le *dual* F^* de F, et de F dans le dual E^* de E.

On a donc par définition

$$\Phi(x, y) = \langle x, d_\Phi(y) \rangle = \langle y, s_\Phi(x) \rangle. \tag{23}$$

Nous allons maintenant définir les applications linéaires associées à une forme sesquilinéaire. Soient J un antiautomorphisme de A et Φ une forme sesquilinéaire (à droite) pour J sur $E \times F$ (F désignant un A-module à gauche) ; posons $J' = J^{-1}$. L'application Φ' de $F \times E$ dans A définie par

$$\Phi'(y, x) = \Phi(x, y)^{J'} \qquad (x \in E, y \in F)$$

est, comme on le voit facilement, une forme sesquilinéaire (à droite) pour J' sur $F \times E$. D'après le n° 2 (déf. 5) les formes sesquilinéaires Φ et Φ' s'identifient respectivement à des formes bilinéaires sur $E \times F^J$ et sur $F \times E^{J'}$. Les applications d_Φ et $d_{\Phi'}$ associées à ces dernières sont appelées *les applications associées à* *droite et à gauche à la forme sesquilinéaire* Φ, et sont notées d_Φ et s_Φ. On a donc, par définition :

$$(24)\qquad \Phi(x, y) = \langle x, d_\Phi(y)\rangle = \langle y, s_\Phi(x)\rangle^{J} \qquad (x \in E,\ y \in F).$$

Ainsi d_Φ (resp. s_Φ) est une application linéaire de F^J dans E^* (resp. de $E^{J'}$ dans F^*), ou encore une application semi-linéaire de F dans E^* (resp. de E dans F^*) relative à J (resp. J′) si l'on considère J (resp. J′) comme un isomorphisme de l'anneau A^0 (opposé de A) sur A, et F (resp. E) comme un A^0-module à droite.

La formule (24) et la déf. 6 du n° 3 entraînent aussitôt que pour tout sous-module N de F (resp. M de E), on a

$$(25)\qquad N^0 = \overset{-1}{s_\Phi}(N') \qquad (\text{resp. } M^0 = \overset{-1}{d_\Phi}(M'))$$

où N′ (resp. M′) est le sous-module du dual F^* de F (resp. du dual E^* de E) *orthogonal* à N (resp. M) (chap. II, § 4, n° 2).

PROPOSITION 4. — *Supposons que* A *soit un corps, et soit* Φ *une forme bilinéaire* (resp. *sesquilinéaire pour* J) *sur* $E \times F$; *pour que* E/F^0 *soit de dimension finie, il faut et il suffit que* F/E^0 *soit de dimension finie, et ces dimensions sont alors égales.*

En effet, soit Φ_1 la forme non dégénérée associée à Φ, sur $(E/F^0) \times (F/E^0)$ (n° 3). Supposons que E/F^0 soit de dimension finie n ; comme l'application linéaire d_{Φ_1} de F/E^0 (resp. $(F/E^0)^J$) dans $(E/F^0)^*$ est injective, F/E^0 est de dimension finie $n' \leqslant n$; en considérant s_{Φ_1}, on voit de même que $n \leqslant n'$.

COROLLAIRE 1. — *On suppose que* A *est un corps et que* Φ *est non dégénérée. Pour qu'un sous-espace* M *de* E *soit de dimension finie, il faut et il suffit que* M^0 *soit de codimension finie dans* F, *et on a alors* $\operatorname{codim} M^0 = \dim M$, *et* $M^{00} = M$.

Comme $F^0 = \{0\}$, les deux premières assertions résultent de la prop. 4 appliquée à la restriction de Φ à $M \times F$. En outre, M^0 est l'orthogonal de M^{00}, donc M^{00} est de dimension finie égale à $\operatorname{codim} M^0 = \dim M$; mais comme $M^{00} \supset M$, on a $M^{00} = M$.

COROLLAIRE 2. — *Les hypothèses étant celles du cor. 1, soient* M, N *deux sous-espaces de* E ; *on a alors* $(M + N)^0 = M^0 \cap N^0$; *si de plus* M *et* N *sont de dimension finie, on a* $(M \cap N)^0 = M^0 + N^0$.

La première assertion est triviale. Supposons M et N de dimension finie, et soit $G = M^0 + N^0$; on a $G^0 = M^{00} \cap N^{00} = M \cap N$ d'après le cor. 1 ; la prop. 4 appliquée à la restriction de Φ à $M \times G$ montre alors (puisque $M^0 \subset G$ et $G^0 \subset M$) que l'on a $\dim M/(M \cap N) = \dim G/M^0 = \operatorname{codim} M^0 - \operatorname{codim} G$, et comme $\operatorname{codim} M^0 = \dim M$, on en déduit $\dim (M \cap N) = \operatorname{codim} G$. Mais on a aussi $\dim (M \cap N) = \operatorname{codim} (M \cap N)^0$ d'après le cor. 1, et comme $G \subset G^{00} = (M \cap N)^0$ on a $G = (M \cap N)^0$.

La prop. 4 permet de poser la définition suivante :

Définition 7. — *Soient* A *un corps* (resp. *un corps muni d'un antiautomorphisme* J), E *un espace vectoriel à gauche sur* A, F *un espace vectoriel à droite* (resp. *à gauche*) *sur* A, *et* Φ *une forme bilinéaire* (resp. *sesquilinéaire pour* J) *sur* $E \times F$. *Supposons que* E/F^0 *et* F/E^0 *soient de dimension finie sur* A. *On appelle rang de* Φ *la dimension* (*finie*) *commune des espaces vectoriels* E/F^0 *et* F/E^0.

Lorsque E/F^0 et F/E^0 sont de dimension infinie, on dit que Φ est de rang infini.

Proposition 5. — *Les hypothèses et notations étant celles de la déf.* 7, *les applications linéaires* s_Φ *et* d_Φ *associées à* Φ *ont même rang, et ce rang est égal au rang de la forme* Φ.

En effet le noyau de l'application d_Φ de F dans E^* est évidemment E^0, donc son rang est égal à la dimension de F/E^0. De même le rang de s_Φ est égal à la dimension de E/F^0.

Proposition 6. — *Les hypothèses et notations étant celles de la déf.* 7, *supposons de plus que* E *et* F *aient même dimension finie. Alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) d_Φ *est injective* ;

b) d_Φ *est surjective* ;

c) s_Φ *est injective* ;

d) s_Φ *est surjective* ;

e) Φ *est non dégénérée.*

En effet, comme E, F, E^* et F^* ont même dimension finie, *a*) et *b*) sont équivalentes, ainsi que *c*) et *d*) (chap. II, § 3, nº 4). Comme s_Φ et d_Φ ont même rang (prop. 5), *a*) et *c*) sont équivalentes. Comme *e*) équivaut à la relation $E^0 = F^0 = \{0\}$, elle équivaut à la conjonction de *a*) et *c*), d'où l'équivalence des conditions énoncées.

Corollaire. — *Les hypothèses et notations étant celles de la déf.* 7, *on suppose de plus que* E *est de dimension finie et que* Φ *est non dégénérée. Alors on a* $\dim E = \dim F$ *et, pour toute base* (e_i) $(1 \leqslant i \leqslant \dim E)$ *de* E, *il existe une base* (f_i) *de* F *telle que* $\Phi(e_i, f_k) = \delta_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, \dim E)$.

En effet, comme Φ est non dégénérée, on a $E^0 = F^0 = \{0\}$, d'où $\dim E = \dim F$ (prop. 4). Il s'ensuit (prop. 6) que d_Φ est un isomorphisme de F (resp. F^J) sur E^* ; donc, si (e_i^*) est la base duale de (e_i), les éléments $f_i = d_\Phi^{-1}(e_i^*)$ forment une base de F qui, vu la formule (23) (resp. la formule (24)), vérifie $\Phi(e_i, f_k) = \delta_{ik}$.

Il est immédiat que, dans ce corollaire, on peut échanger les rôles de E et de F, en remplaçant d_Φ par s_Φ dans la démonstration.

Remarque. — Soient A un anneau muni d'un antiautomorphisme J, M et N des A-modules *à droite*, et Φ une forme sesquilinéaire *à gauche* pour J sur $M \times N$ (nº 2, *Remarque*) ; elle vérifie donc l'égalité

$$\Phi(xa, xa') = a^J\Phi(x, y)a' \qquad (a, a' \in A, x \in M, y \in N).$$

L'application Φ' de $N \times M$ dans A définie par $\Phi'(y, x) = \Phi(x, y)^{J'}$ (où $J' = J^{-1}$) est une forme sesquilinéaire à gauche pour J', et Φ et Φ' s'identifient à des formes bilinéaires sur $M^J \times N$ et $N^{J'} \times M$ respectivement. Les applications s_Φ et $s_{\Phi'}$ associées à ces formes bilinéaires sont appelées les applications associées à gauche et à droite à la forme sesquilinéaire Φ, et sont notées s_Φ et d_Φ. On a donc, par définition

$$(26) \qquad \Phi(x, y) = \langle y, s_\Phi(x)\rangle = \langle x, d_\Phi(y)\rangle^J \qquad (x \in M, y \in N),$$

et s_Φ (resp. d_Φ) est une application linéaire de M^J dans N^* (resp.

de $N^{J'}$ dans M^*). On énoncerait et démontrerait facilement les analogues, pour le cas envisagé ici, de la déf. 7 et des prop. 4, 5, 6.

7. *Forme inverse d'une forme bilinéaire ou sesquilinéaire.*

Soient A un anneau, E un A-module à gauche, F un A-module à droite et Φ une forme bilinéaire sur $E \times F$. On suppose ici que les applications associées à Φ, qui seront notées s et d, sont *bijectives*. Alors l'application produit (s, d) est une bijection de $E \times F$ sur $F^* \times E^*$, et définit, par transport de structure, une forme bilinéaire $\hat{\Phi}$ sur $F^* \times E^*$. Celle-ci vérifie donc

$$\begin{aligned}(27)\quad \hat{\Phi}(y', x') &= \Phi(s^{-1}(y'), d^{-1}(x')) \\ &= \langle s^{-1}(y'), x' \rangle = \langle d^{-1}(x'), y' \rangle \qquad (x' \in E^*, y' \in F^*).\end{aligned}$$

DÉFINITION 8. — *Soit* Φ *une forme bilinéaire sur* $E \times F$ *dont les applications associées* s *et* d *sont bijectives. La forme bilinéaire* $\hat{\Phi}$ *sur* $F^* \times E^*$ *définie par* (27) *s'appelle la forme inverse de* Φ.

Soient maintenant $\hat{s}$ et $\hat{d}$ les applications linéaires de F^* dans E^{**} et de E^* dans F^{**} associées à gauche et à droite à $\hat{\Phi}$. Comme, pour $x' \in E^*$ et $y' \in F^*$, on a par définition

$$\hat{\Phi}(y', x') = \langle y', \hat{d}(x') \rangle = \langle x', \hat{s}(y') \rangle$$

on voit, en comparant avec (27), que la forme linéaire $\hat{d}(x')$ sur F^* est égale à celle définie par l'élément $d^{-1}(x')$ de F. Il en résulte que l'application composée $\hat{d} \circ d$ est l'application canonique de F dans son bidual F^{**}, et que celle-ci est *bijective* puisque d et $\hat{d}$ (cette dernière par transport de structure) sont bijectives ; donc, si l'on identifie canoniquement F à F^{**}, on a $\hat{d} = d^{-1}$. De même E s'identifie canoniquement à E^{**}, l'application canonique de E dans E^{**} est $\hat{s} \circ s$, et l'on a $\hat{s} = s^{-1}$. Il résulte de ceci que la forme inverse de $\hat{\Phi}$ est Φ.

Considérons maintenant un anneau A muni d'un antiautomorphisme J, deux A-modules à gauche E et F, et une forme sesquilinéaire à droite Φ pour J sur $E \times F$ telle que les applications associées à Φ, qui seront notées s et d, soient *bijectives*. Définissons une application $\widehat{\Phi}$ de $F^* \times E^*$ dans A par la première équation (27). Cette application vérifie, d'après (24) (n° 6), la relation

$$(28) \quad \widehat{\Phi}(y', x') = \langle s^{-1}(y'), x' \rangle = \langle d^{-1}(x'), y' \rangle^{J} \qquad (x' \in E^*, y' \in F^*).$$

L'application $\widehat{\Phi}$ est évidemment $\mathbf{Z}$-bilinéaire ; en outre, on a, pour a, b dans A, $x' \in E^*$ et $y' \in F^*$, et en vertu des définitions de s et d,

$$\widehat{\Phi}(y'a, x'b) = \Phi(a^J s^{-1}(y'), b^{J'} d^{-1}(x')) = a^J \widehat{\Phi}(y', x') b\,;$$

donc $\widehat{\Phi}$ est une *forme sesquilinéaire à gauche* pour J (n° 2) sur $F^* \times E^*$.

DÉFINITION 9. — *Soit Φ une forme sesquilinéaire à droite pour* J *sur* $E \times F$, *dont les applications associées s et d sont bijectives. La forme sesquilinéaire à gauche $\widehat{\Phi}$ pour* J *sur* $F^* \times E^*$ *s'appelle la forme inverse de Φ.*

Nous laissons au lecteur le soin de définir et d'étudier la forme inverse d'une forme sesquilinéaire à gauche. Cette forme inverse est une forme sesquilinéaire à droite.

Soient $\widehat{s}$ et $\widehat{d}$ les applications associées à $\widehat{\Phi}$; d'après (26) (n° 6) on a

$$(29) \qquad \widehat{\Phi}(y', x') = \langle y', \widehat{d}(x') \rangle^{J} = \langle x', \widehat{s}(y') \rangle.$$

Du fait que s est bijective, et de l'égalité $\langle s^{-1}(y'), x' \rangle = \langle y', \widehat{d}(x') \rangle^{J}$ qui résulte de (28) et (29), on déduit que $\widehat{d}$ est bijective ; donc $\widehat{d} \circ d$ est bijective. Or l'égalité $\langle d^{-1}(x'), y' \rangle = \langle y', \widehat{d}(x') \rangle$, qui résulte de (28) et (29), montre que $\widehat{d} \circ d$ est l'application canonique de F dans son bidual F^{**}. On voit de même que $\widehat{s}$ est bijective et que $\widehat{s} \circ s$ est l'application canonique de E dans E^{**}. Donc, si l'on identifie E^{**} à E et F^{**} à F au moyen de ces applications canoniques, on a $\widehat{s} = s^{-1}$, $\widehat{d} = d^{-1}$, et Φ est la forme inverse de $\widehat{\Phi}$.

Avec les mêmes notations et hypothèses soit a un élément inversible du centre de A. Alors les applications associées à la