

Convergenze

a cura di
F. Arzarello, L. Giacardi, B. Lazzari

Maria G. Bartolini Bussi,
Michela Maschietto

Macchine matematiche: **dalla storia alla scuola**

MARIA G. BARTOLINI BUSSI

MICHELA MASCHIETTO

Dipartimento di Matematica

Università di Modena e Reggio Emilia

ISBN 10 88-470-0402-0

ISBN 13 978-88-470-0402-3

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore. Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'uso di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La riproduzione di quest'opera, anche se parziale, è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla legge sul diritto d'autore, ed è soggetta all'autorizzazione dell'editore. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge.

Springer fa parte di Springer Science+Business Media

springer.it

© Springer-Verlag Italia 2006

Stampato in Italia

L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

Progetto grafico della copertina: Valentina Greco, Milano

Fotocomposizione e impaginazione: Valentina Greco, Milano

Stampa: Arti Grafiche Nidasio, Milano

Prefazione

L'UMI (Unione Matematica Italiana), che accoglie tra i suoi soci sia matematici professionisti sia insegnanti della disciplina di tutti gli ordini scolastici sia cultori e appassionati della materia, tradizionalmente ha tra i suoi obiettivi la promozione e la diffusione della cultura matematica tra tutti cittadini, in particolare nei giovani, e il miglioramento dell'insegnamento della disciplina a tutti i livelli scolastici (per questo opera una sua Commissione permanente, la CIIM, Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica).

Pur con i limitati mezzi di cui dispone, l'associazione ha sempre impegnato risorse umane e materiali per il raggiungimento di tali obiettivi.

Lo testimonia in primo luogo la pubblicazione da ormai alcuni anni della Sezione A del suo Bollettino, che ha come sottotitolo "La matematica nella Società e nella Cultura" (<http://www.dm.unibo.it/umi/italiano/Editoria/BollettinoA.html>). La rivista raccoglie articoli divulgativi ed informativi, ma di grande rigore scientifico, che spaziano dai temi della ricerca più avanzata ad articoli su avvenimenti storicamente rilevanti nella storia della matematica italiana a interviste a importanti matematici italiani a rassegne sull'insegnamento della matematica in diversi paesi stranieri.

Un'altra iniziativa in questo senso è la proposta, in collaborazione col MIUR, di diversi volumi per l'aggiornamento degli insegnanti sui temi principali della matematica (reperibili al sito: <http://www.liceo-vallisneri.lu.it/tesi.htm>) e di un curriculum completo di matematica dai 6 ai 19 anni, intitolato "La matematica per il cittadino", curriculum corredato di circa 200 esempi di attività didattiche e di prove di verifica, messo a disposizione delle scuole e degli insegnanti, che lo possono usare gratuitamente (il materiale, che ammonta a più di un migliaio di pagine, è reperibile al sito dell'UMI: <http://www.dm.unibo.it/umi/italiano/Didattica/didattica.html>).

Nell'alveo di questa tradizione che si inserisce ora la proposta della Collana "Convergenze. Strumenti per l'insegnamento della matematica e la formazione degli insegnanti". Il titolo e il sottotitolo marcano le caratteristiche di questa collana, rivolta agli insegnanti in servizio e in formazione sia per quanto riguarda la loro professionalità sia per la loro crescita culturale. Si tratta di agili volumi, non superiori alle 200 pagine, che affrontano temi importanti della matematica con rigore di metodo, ma in modo accattivante, con ampio respiro culturale, e accennano sempre, ove possibile, agli sviluppi più recenti dei problemi affrontati e ai loro risvolti applicativi. I temi riguardano argomenti che i docenti incontrano nella loro pratica di insegnamento, ma affrontati con quello spirito di innovazione e creatività che permetterà loro di renderli piacevoli e stimolanti per gli allievi. I volumi costituiscono pertanto un utile strumento di lavoro per gli insegnanti di matematica ma possono essere

anche una lettura piacevole e stimolante per i giovani, che potranno vedere aspetti della matematica non sempre presenti nei loro libri di testo, nonché per i cittadini curiosi di conoscere aspetti nuovi e stimolanti di questa disciplina.

Speriamo con questo di fare cosa utile alla scuola e in generale al Paese. Oggi più che mai infatti la società ha bisogno di approfondite conoscenze scientifiche e in particolare matematiche in forma sempre più diffusa e condivisa; la scuola di conseguenza necessita di docenti ben preparati in matematica, che siano in grado di avvicinare gli allievi a questa disciplina in modo stimolante ed amichevole. La nostra Collana potrà contribuire senz'altro a raggiungere questo obiettivo.

Il primo volume proposto è esemplare in questo senso: esso infatti affronta vari argomenti di geometria con un taglio completamente nuovo, cioè attraverso le macchine matematiche. Con queste si ottiene la possibilità di manipolare fisicamente gli oggetti geometrici e di scoprire le loro proprietà in un modo che è nello stesso tempo concreto e ricco di tutte potenzialità teoriche tipiche del pensiero matematico. Le macchine presentate nel testo permettono di comprendere anche una parte interessante della nostra storia, cioè come artefatti concreti abbiano influito profondamente in varie epoche sulla produzione del pensiero astratto. Tutti conosciamo due estremi di questo fenomeno: il compasso e il computer; in mezzo vi è una grande quantità di strumenti, costruiti in più di 2000 anni di storia. Il volume di M.G. Bartolini Bussi e M. Maschietto accompagna il lettore in un viaggio in questo mondo affascinante in cui l'artigiano e il matematico lavorano insieme in una sorta di bottega ideale, dove i concetti matematici sono costruiti nel senso più pregnante del termine.

Bologna, 1 ottobre 2005

Carlo Sbordone
(Presidente UMI)

Ferdinando Arzarello
(Presidente CIIM)

Indice

Introduzione	XI
1 Gli strumenti meccanici: le macchine per tracciare curve e realizzare trasformazioni	1
1.1 Il compasso di Euclide	2
1.2 Il compasso di Nicomede	4
1.3 Il compasso di Descartes	5
1.4 Tracciare coniche: dai luoghi solidi alla costruzione per punti	7
1.5 Tracciare coniche: la geometria organica	10
1.6 Curve, strumenti, equazioni	11
1.7 La guida rettilinea	15
1.8 Il teorema di Kempe	18
1.9 Da uno a due gradi di libertà	24
1.10 Strumenti per isometrie e omologie	28
2 Gli strumenti dei pittori: le macchine per la prospettiva	33
2.1 Il modello della piramide visiva: vetri e veli	33
2.2 Dal vetro agli strumenti meccanici	35
2.3 I trattati	39
2.4 La macchina di Stevin	43
2.5 Le anamorfosi	46
2.6 Verso la geometria proiettiva	47
3 Un primo bilancio	55
3.1 Due stili a confronto	56
3.2 Conclusione	61
4 Alcuni strumenti metodologici	63
4.1 L'analisi storico – epistemologica	63
4.2 Le macchine come utensili, strumenti, artefatti	65
4.3 L'approccio strumentale di Rabardel	66
4.4 Dalla conoscenza “embodied” alla conoscenza “empracticed”	70

5	Alcuni contributi dalla ricerca didattica	75
5.1	La mediazione semiotica secondo Vygotskij	75
5.2	La discussione matematica	78
5.3	Il nodo semiotico	81
5.4	La costruzione dei significati	84
5.5	Argomentare e dimostrare: l'unità cognitiva	86
5.6	Un modello di ricerca in didattica della matematica	88
6	Uso didattico delle macchine matematiche: una rassegna internazionale	91
6.1	Alcuni esperimenti didattici su strumenti meccanici	92
6.2	Strumenti matematici e strumenti quotidiani: le ricerche di J. L. Vincent	95
6.3	Esplorazione di ellissografi: le ricerche di D. Dennis	98
6.4	Pantografi in classe: le ricerche di M. Sangaré	100
6.5	Pantografi in classe: le ricerche di V. Hoyos e M. Moreno	103
6.6	Esplorazione di modelli cinematici: la collezione della Cornell	107
6.7	Alcuni esperimenti didattici sui prospettografi	108
7	Didattica nel laboratorio delle macchine matematiche	111
7.1	Strumenti e trasformazioni	111
7.2	Un approccio sperimentale allo studio delle isometrie	113
7.3	Il pantografo di Sylvester	116
7.4	Studio di ellissografi	118
7.5	Modelli virtuali di curvigrati e pantografi	119
7.6	Uso didattico di strumenti virtuali	122
8	Didattica nel laboratorio delle macchine matematiche: prospettografi e macchine mentali	125
8.1	Il prospettografo nella scuola elementare	125
8.2	Le macchine di Stevin	126
8.3	Macchine mentali: l'ortotome	128
8.4	Macchine mentali: l'ellisse come sezione conica	129
8.5	Modelli virtuali	132
8.6	Uso didattico delle animazioni fotorealistiche	138

9 Oltre la scuola	141
9.1 Mostre, divulgazione, didattica	141
9.2 Dal Theatrum Machinarum a Geometria a tu per tu	144
9.3 Dalla Perspectiva Artificialis ad Apparenza e realtà	145
9.4 Dalle Mostre al Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena	146
9.5 Verso una conclusione	148
 Bibliografia	 149
 Indice analitico	 157

Introduzione

*“La possibilità di manipolare fisicamente oggetti, come per esempio le **macchine** [matematiche] che generano curve, induce spesso modalità di esplorazione e di costruzione di significato differenti ma altrettanto interessanti e, sotto certi aspetti, più ricche di quelle consentite dall’uso di software di geometria dinamica,,*

(dal Curricolo di matematica per il ciclo secondario)



Nel curriculum per il ciclo secondario preparato da una commissione nominata dall’Unione Matematica Italiana, sono nominati oggetti poco conosciuti dalla maggior parte degli insegnanti: le macchine matematiche. Esse sono appaiate, nella descrizione del laboratorio di matematica, ad altri tipi di strumenti: i materiali “poveri”, i software di geometria dinamica e di manipolazione simbolica, i fogli elettronici, le calcolatrici grafico-simboliche.

Che cosa sono le macchine matematiche? Secondo una definizione data da Marcello Pergola (N.R.S.D.M., 1992):

“una macchina matematica (in un contesto geometrico) ha come scopo fondamentale (indipendentemente dall’uso che poi si farà della macchina) risolvere questo problema: obbligare un punto, o un segmento, o una figura qualsiasi (sostenuti da un opportuno supporto materiale che li renda visibili) a muoversi nello spazio o a subire trasformazioni seguendo con esattezza una legge astrattamente, matematicamente determinata.,,

Pergola è il progettista e il costruttore della cospicua collezione di macchine collocata presso il Dipartimento di Matematica dell’Università di Modena e Reggio Emilia (sede di Modena). Lo affiancano alcuni collaboratori (Annalisa Martinez, Marco Turrini, Carla Zanoli), che con lui hanno recentemente fondato una associazione¹ di promozione sociale per diffondere la cultura matematico-geometrica con particolare attenzione alle sue radici storiche. L’associazione opera con il Laboratorio delle Macchine Matematiche del Dipartimento di Modena, collaborando ad attività di formazione e di aggiornamento per gli insegnanti, a ricerche in storia e didattica della matematica, alla traduzione e diffusione delle fonti storiche, alla progettazione, costruzione e diffusione di materiale didattico per l’insegnamento della geometria, all’allestimento di

¹ <http://associazioni.monet.modena.it/macmatem/>

mostre con organizzazione di visite guidate. La costruzione delle macchine avviene in un'officina di falegnameria "tradizionale", che ricorda i laboratori degli artigiani del passato. Gli oggetti prodotti sono "pezzi unici", costruiti a mano uno per uno, a partire dalle descrizioni contenute nelle fonti storiche. Questa realizzazione artigianale consente di riprodurre copie dei modelli, adattandoli a particolari esigenze. Così, recentemente, è stata avviata la produzione di strumenti destinati a un laboratorio per l'integrazione di studenti ciechi o ipovedenti, introducendo modifiche che favoriscono l'esplorazione aptica. In generale, lo scopo è quello di costruire strumenti funzionanti, con potenzialità didattiche, che evocano gli strumenti documentati nella storia e che sono mossi direttamente dalle mani dell'utente (senza il ricorso, quindi, ad altre fonti di energia). L'uso prevalente del legno naturale (anche se combinato con materiali più moderni come il plexiglas, i fili di nailon, ecc.) consente di costruire oggetti che richiamano visivamente gli strumenti del passato.

Nella collezione del Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena ci sono artefatti di natura diversa:

- Curvigrافي in grado di tracciare rette, coniche, cubiche, quartiche ecc. e qualche curva trascendente.
- Sistemi a due gradi di libertà (pantografi) che realizzano trasformazioni nel piano.
- Modelli tridimensionali che illustrano la teoria delle coniche come luoghi solidi, ossia come sezioni di coni.
- Modelli tridimensionali che illustrano proprietà di curve algebriche studiate per proiezione o per sezione.
- Modelli tridimensionali che illustrano la genesi spaziale di alcune trasformazioni nel piano.
- Prospettografi che illustrano le tecniche di costruzione di immagini prospettiche o i teoremi che validano queste tecniche.
- Strumenti per la soluzione di problemi di varia natura (ad esempio, la trisezione dell'angolo, la duplicazione del cubo, la quadratura del cerchio, l'inserimento di due o più medi proporzionali tra due segmenti dati).

In questo libro ci limiteremo a due categorie di macchine:

- Strumenti meccanici (che comprendono sistemi articolati ad uno o due gradi di libertà, per tracciare curve o realizzare trasformazioni).
- Prospettografi (che comprendono sia strumenti direttamente legati ad disegno prospettico che i modelli statici di sezioni coniche importanti nella genesi della trattazione moderna della geometria proiettiva).

Le due categorie rappresentano, come vedremo, due stili di pensiero complementari (spesso ricordati con la contrapposizione analitico/sintetico), che sono rappresentati, nella storia, da Descartes e Desargues.

A titolo di esempio, illustriamo brevemente due casi, che costituiscono i prototipi delle due categorie di strumenti prima ricordati: il compasso per tracciare cerchi e il vetro per realizzare disegni prospettici.

Il compasso è utilizzato fin dalla scuola elementare per disegnare cerchi. Ma esso consente anche di segnare punti che hanno distanza data da punti dati e, abbinato alla riga (o da solo come mostrò Lorenzo Mascheroni (1750-1800), 1797), determina l'insieme dei problemi risolubili nella geometria elementare. Il primo è un uso di natura empirica, che potrebbe essere sostituito dal ricalco del bordo di un bicchiere o di una maschera sagomata. Il secondo è un uso di natura teorica, che consente di demarcare in modo preciso il confine tra problemi possibili e problemi impossibili, a prescindere dalla possibilità di costruire empiricamente soluzioni approssimate, sufficienti per le eventuali applicazioni pratiche. Come vedremo nel Capitolo 1, ampliando l'insieme degli strumenti ammissibili, si costruiscono soluzioni dei problemi classici, impossibili da risolvere con riga e compasso. Un nuovo strumento (ad esempio, il compasso di Nicomede) consente, da un lato, di tracciare una curva di quarto grado e, dall'altro, di risolvere i problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo, non risolubili con riga e compasso.

Consideriamo ora un secondo esempio, cioè il vetro per la realizzazione di disegni prospettici (questo tema sarà approfondito nel Capitolo 2). Nel telaio di legno è inserito un vetro trasparente; l'occhio del disegnatore è fissato da un mirino; la mano del disegnatore traccia a mano libera con moto continuo i contorni della figura direttamente sul vetro. La verosimiglianza della rappresentazione è garantita dall'esecuzione stessa che via via sovrappone l'immagine costruita alle apparenze del mondo visibile percepite direttamente. Questo strumento incorpora il modello matematico della pittura intesa come "intersecazione della piramide visiva" secondo la ben nota definizione di Leon Battista Alberti, che sta alle origini della moderna geometria proiettiva.

I due esempi qui presentati si riferiscono, il primo, all'antichità classica e, il secondo, al Rinascimento. In effetti, anche se la storia delle macchine è molto più antica, lo sviluppo di questo aspetto della cultura materiale collegata alla matematica si ha soprattutto a partire dal Cinquecento. Anche in precedenza erano costruiti e usati strumenti per la soluzione di problemi geometrici, ma la trattazione sistematica di questi e il loro inserimento in teorie generali si è affermata gradualmente tra il Cinquecento e il Seicento. Nel Cinquecento, singoli strumenti sono costruiti sulla base di intuizioni e conoscenze pratiche; essi sono spesso intesi come prove di genialità e i loro inventori sono considerati maghi. È questa l'epoca della pubblicazione di "teatri di macchine" (da cui il titolo *Theatrum Machinarum* della collezione di Modena), raccolte di descrizioni di strumenti classificati con criteri vari e a volte stravaganti. Sono antologie, raccolte di appunti, di note, di promemoria, di disegni fantasiosi. La possibilità di costruire strumenti sulla base di queste sole descrizioni non è certa per chi non è già familiare con essi (per approfondimenti, si veda il Capitolo I di Rossi, 1962).

Più tardi gli strumenti sono descritti per mezzo di regole procedurali, nelle quali la spiegazione dei principi concettuali (ad esempio, la forma delle componenti e le loro connessioni) è mescolata con le regole di costruzione (ad esempio, i materiali, gli accorgimenti di manutenzione) e con le regole d'uso

(dove mettere le mani, gli occhi, ecc.). La graduale transizione verso le trattazioni in senso moderno, in cui si avvia la sistemazione dei principi concettuali, ha un momento essenziale nel Seicento, il secolo della rivoluzione scientifica in Europa. Solo nell'Ottocento, tuttavia, con Monge, Poncelet e successivamente Ampère viene sancita la separazione tra struttura fisica e struttura concettuale degli strumenti (Betti, 1979).

I due esempi presentati illustrano l'importanza della cultura materiale degli strumenti nella genesi della geometria elementare e della geometria proiettiva. Queste ragioni da sole giustificano l'opportunità di introdurre alcuni semplici esempi di macchine matematiche concretamente manipolabili tra gli "arredi" di un Laboratorio, in aggiunta allo strumento che oggi non manca mai, il computer. Quest'ultimo, attrezzato con i software di geometria dinamica, di calcolo simbolico, di grafica tridimensionale, consente di realizzare grafici di curve e di costruire spazi ed oggetti virtuali "verosimili". Il computer è il depositario di un sapere complesso, costruito e accumulato in secoli di storia, e fornisce immediatamente "rappresentazioni". Per costruire il senso di esse, è necessario riempire le lacune tra esperienze e rappresentazioni, ricostruire il complesso sistema di segni, di gesti, di linguaggio, di teorie che sta a fondamento delle procedure messe in opera in modo automatico e opaco dal computer. Come scrivevamo parecchi anni fa nel primo catalogo della collezione di macchine (N.R.S.D.M., 1992):

“Possediamo oggi una macchina, l'elaboratore elettronico, talmente flessibile che può sostituire, da sola, tutte quelle inventate in passato per disegnare grafici, risolvere problemi di calcolo, realizzare trasformazioni. Essa quindi non mostra (non può mostrare) quasi nulla di sé. Realizza una corrispondenza tra il programma inserito e le immagini disegnate dal plotter: ma non si vede con quali complesse modificazioni fisiche, con quali meccanismi avviene la traduzione. [...] Che sia un nascondimento voluto o necessario non cambia molto nei confronti dell'utente comune, a cui gli elaboratori appaiono, infatti, come macchine meravigliose. Accanto a queste, è dunque opportuno far rivivere nella scuola, togliendole dalla loro 'solitudine storica', le vecchie macchine matematiche, soprattutto quelle più semplici.,”

Le esperienze con macchine matematiche e, più in generale, con modelli di curve e superfici immerse nello spazio tridimensionale erano un tempo assai comuni negli Istituti di Matematica. Oggi sopravvivono alcune collezioni, a volte restaurate ed esposte in vetrine, a volte ancora nascoste nei magazzini delle università. Una ripresa dell'uso di questi artefatti nella didattica fu suggerita dal gruppo di ricerca di Roma, in cui operavano personalità come Emma Castelnuovo e Lucio Lombardo Radice. L'interesse per i sussidi didattici manipolabili era in generale piuttosto diffuso, come mostrano il volume edito dalla CIEAEM (1958) e il volume di Cundy e Rollet (1974). Le macchine matematiche sono sussidi didattici particolari, non inventati artificialmente oggi per concretizzare un particolare concetto o una procedura della matema-

tica. Esse sono state testimoni e protagoniste dello sviluppo storico della geometria. Assumerle come rappresentanti di un concetto o una procedura non è una forzatura convenzionale, dal momento che essi sono incorporati nella macchina fin dalla sua origine. Se, da un lato, queste macchine si collegano a macchine usate per scopi pratici nella tecnologia e nell'arte (e questo collegamento sarà prezioso nella didattica), dall'altro, sono parte della fenomenologia storica che ha accompagnato, a volte anticipandolo, a volte seguendolo, lo sviluppo di teorie geometriche interne alla matematica. In certi momenti storici si sono costituiti filoni di ricerca intorno a classi di macchine matematiche: così, ad esempio, si studiavano *le curve prodotte da sistemi articolati con 4 aste*, mettendo in evidenza, anche in questo caso, che l'interesse dei matematici non è per lo studio di singoli oggetti o fatti isolati ma piuttosto per una teoria che consente di organizzare sistematicamente i risultati. Vedremo nel Capitolo 1 come molti studi separati sulla possibilità di tracciare curve algebriche con sistemi articolati sono stati unificati nel teorema di Kempe.

Un ultimo aspetto merita di essere sottolineato. Le immagini del volume e del cd-rom che riproducono le macchine della collezione di Modena mostrano oggetti esteticamente piacevoli e caldi al tatto (come sanno essere gli oggetti realizzati in legno naturale), a volte resistenti alle forze impresse con la mano per realizzare il movimento, per la presenza di attriti. Quest'ultima caratteristica potrebbe infastidire il progettista di una macchina utensile, ma, nel nostro caso, ci ricorda in modo evidente la distanza tra il modello matematico e l'oggetto costruito, soggetto agli "*impedimenti della materia*," che, secondo quanto diceva Galileo (Sosio, 1970) devono essere "*difalcati*," dal filosofo geometra.

Il progetto didattico, realizzato sotto il coordinamento del Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena, ha sostenuto molti esperimenti a partire dagli Anni Ottanta. Si è posto obiettivi ambiziosi, miranti a costruire, da un lato, la capacità di produrre congetture e costruire dimostrazioni anche complesse sulle proprietà e sul funzionamento di alcune macchine, dall'altro, il senso di un'esperienza che introduce nella classe un modo innovativo di far matematica, operando anche in piccolo gruppo, leggendo fonti storiche, costruendo relazioni sull'attività svolta. Questo libro si propone di raccogliere in modo sistematico i risultati di molti anni di ricerche didattiche.

La struttura del libro è articolata in tre parti.

La prima parte introduce le macchine matematiche da un punto di vista storico - epistemologico. Il primo capitolo presenta una rassegna di strumenti meccanici. Il secondo una rassegna di prospettografi. Il terzo riesamina le due categorie dal punto di vista epistemologico, confrontando i due stili di pensiero complementari che hanno accompagnato la loro produzione: lo stile analitico di Descartes e quello sintetico di Desargues.

La seconda parte contiene alcuni strumenti di natura metodologica, utili quando si progettano, si realizzano e si analizzano percorsi didattici sulle macchine matematiche. Il quarto capitolo introduce gli approcci strumentali alla

conoscenza che fanno capo a Wartofsky, Koyré e Rabardel e, in modo critico, l'approccio cognitivo di Lakoff e Núñez. Il quinto capitolo presenta invece alcuni strumenti di progettazione e interpretazione prodotti dalla ricerca didattica: la mediazione semiotica, la discussione matematica, il nodo semiotico. Per l'approccio al pensiero teorico, due paragrafi sono dedicati alla definizione in geometria (interpretata attraverso il costrutto teorico dei concetti figurali) e alla dimostrazione (con particolare attenzione al costrutto teorico dell'unità cognitiva).

La terza parte presenta una rassegna di esperimenti didattici, sviluppati in diverse nazioni con tradizioni di ricerca diverse (sesto capitolo) o nel Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena (settimo ed ottavo capitolo). Il nono capitolo si occupa dell'espansione al di fuori dalla scuola, con una breve rassegna delle mostre realizzate con macchine matematiche.

Al libro è allegato un cd-rom che contiene immagini a colori delle macchine citate nel testo; animazioni; schede di approfondimento; testi estesi sugli esperimenti didattici. Per favorire la navigazione, la struttura del cd-rom è basata sulla struttura in capitoli e paragrafi del libro. La presenza di materiale sul cd-rom relativo ad un dato argomento è indicata nel libro da un'icona posta accanto al testo. Per la varietà del materiale presente, il cd-rom è interamente accessibile in Windows. Il lettore avrà cura di prendere visione del contenuto del file leggimi prima di iniziare la consultazione del cd-rom.

Il piano del libro è stato preparato da Maria G. Bartolini Bussi, mentre il piano del cd-rom è stato preparato da Michela Maschietto. Per la stesura dei testi, le due autrici hanno operato in collaborazione.

Le citazioni da testi originali pubblicati in lingue diverse dall'italiano, quando non diversamente indicato, si intendono da noi tradotte. Le citazioni da testi antichi in italiano sono state da noi parzialmente adattate all'ortografia corrente. Questa ultima scelta si discosta dall'uso comune nei testi di storia della matematica, ma ci è parsa più adatta al pubblico a cui questo libro è rivolto, anche in previsione di un possibile utilizzo nelle classi.

Nel corso degli anni, ci hanno sostenuto riconoscimenti prestigiosi ottenuti, tra l'altro, dalla Fondazione Altran (che ha selezionato il nostro progetto *Hands-on Maths* per la finale del Altran Foundation Award² 2004 sul tema *Discovering, understanding and enjoying Science through innovation*), dalla Pirelli (che ha selezionato il nostro Demo *Perspectiva Artificialis* per la finale del Pirelli INTERNETional Award 2004 – generazione Alice) e dalla rivista *Science et Avenir* che ha pubblicato un ampio servizio sul Laboratorio delle Macchine Matematiche (numero di marzo 2005).

Ci ha incoraggiato a continuare il nostro lavoro, il sostegno di tanti colleghi, che hanno raccolto, in Italia e all'estero, le nostre "provocazioni didattiche". In particolare, ringraziamo:

² <http://www.fondation-altran.org/>

- Marcello Pergola, Annalisa Martinez, Marco Turrini e Carla Zanoli, a cui si deve, tra l'altro, la costruzione della collezione delle macchine matematiche: senza la loro affettuosa e instancabile collaborazione, senza la loro continua disponibilità a lasciarsi coinvolgere in mille avventure, questo libro non esisterebbe.
- Ferdinando Arzarello, Paolo Boero, Giampaolo Chiappini, Maria Alessandra Mariotti, con cui, nel corso degli anni, abbiamo discusso la messa a punto del quadro teorico.
- I direttori del Dipartimento di Matematica Pura e Applicata che ci hanno incoraggiato e aiutato concretamente a costruire il Laboratorio delle Macchine Matematiche.
- Gli amici che hanno diviso con noi la passione per le macchine matematiche: Albano Albasini, Mario Barra, Franca Cattelani, Claudio Cavalli, Mario Ferrari, Mauro Francaviglia, Daniela Nasi, Pietro Pantano, Consolato Pellegrino, Pasquale Quattrocchi, Ornella Robutti, Antonio Russo, Margherita Russo e Alessia Schiavi.
- I colleghi che ci hanno sostenuto da lontano: Reinhard Atzbach, Franck Bellemain, Bernard Cornu, David Dennis, Nikolai P. Dolbilin, Bernard Hodgson, Veronica Hoyos, Masami Isoda, Hans Niels Jahnke, Martine Janvier, Jean Marie Laborde, Jan van Maanen, Ingwill Merete Stedøy, Mario A. G. Moreno, Ricardo Nemirovsky, Mogens Niss, Rafael Núñez, Marie José Pestel, Zsafia Ruttikay, Mamadou Sangaré, Eurivalda Santana, Falk Seeger, Cliff Stoll, Rudolph Straesser, Daina Taimina, Kenji Ueno, Jill Vincent.
- I partner della rete tematica *Maths Alive* (Albrecht Beuthelspacher, Enrico Giusti, Maria Dedò e collaboratori, Manuel Arala Chaves, Eduardo Veloso).
- I membri del gruppo internazionale *BACOMET* (Nicolas Balacheff, Rolf Biehler, Willibald Doerfler, Tommy Dreyfus, Joel Hillel, Celia Hoyles, Geoffrey Howson, Christine Keitel, Jeremy Kilpatrick, Colette Laborde, Michael Otte, Kenneth Ruthven, Anna Siepinska, Heinz Steinbring, Ole Skovsmose).
- Gli amici Franco Conti, John Fauvel, Paolo Fazzini, Miguel de Guzmán, Roberto Sitia e Fernando Zironi, che non sono più tra noi.
- Il prof. Giancarlo Pellacani, rettore dell'Università di Modena e Reggio Emilia.
- Il dr. John M. Saylor, direttore della National Science Digital Library e della Engineering Library della Cornell University (Ithaca, NY).
- Il prof. Alexey Semenov, rettore del Moscow Institute for Open Education, curatore della Mostra nazionale russa presentata in occasione del Congresso Internazionale ICME 10 (Copenaghen, 2004).
- Gli insegnanti ricercatori Valeria Andriano, Mara Boni, Anna Lina Bonetti, Franca Ferri, Rossella Garuti, Anna Mucci, Domingo Paola, Renato Verdiani.
- I giovani dottori di ricerca e i laureati in Matematica che hanno collaborato a diverse parti del progetto: Federica Olivero e Bettina Pedemonte; Lucia Bellotti, Lorella Borciani, Claudia Cavani, Paola Dinelli, Annalisa Di Giorgio, Patrizia Giovanardi, Luisa Porretti, Elisa Postiglione, Elisa Quartieri, Amerina Tufo, Maurizio Vacca, Simona Vangelisti, Cinzia Villani.

Ringraziamo, per le puntuali osservazioni, Livia Giacardi, curatrice della collana *Convergenze* e i revisori anonimi nominati dalla Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana.

La nostra attività è sostenuta dall'Università di Modena e Reggio Emilia e dal Dipartimento di Matematica, che hanno, tra l'altro, messo a disposizione spazi per il Laboratorio e per l'officina di falegnameria. La costruzione di macchine e le ricerche didattiche collegate sono state finanziate con gli introiti ottenuti affittando le mostre prodotte e con contributi da vari enti pubblici e privati. Ci limitiamo qui a ricordare i finanziamenti più cospicui ottenuti negli ultimi anni: il contributo dell'Università Italo-Francese al progetto *Perspectiva Artificialis*; il finanziamento ottenuto dalla Commissione Europea per il progetto *Maths Alive*, nell'ambito del Quinto Programma Quadro; la Convenzione con l'Ufficio Scolastico Regionale dell'Emilia Romagna per la realizzazione di mostre itineranti; il cofinanziamento PRIN 2003 del MIUR relativo al progetto *Problemi di insegnamento-apprendimento in matematica: significati, modelli, teorie*.

Infine, ringraziamo l'Unione Matematica Italiana che ci ha consentito di mettere a disposizione degli insegnanti e degli studenti il frutto di molti anni di lavoro.

1

Gli strumenti meccanici: le macchine per tracciare curve e realizzare trasformazioni

Tutti i giorni abbiamo a che fare con macchine matematiche, anche se raramente ci interroghiamo sui modi e le ragioni del loro funzionamento. Le immagini qui sotto riportate mostrano un sottopentola e un cestino da lavoro.

Le strutture che le sostengono sono costituite sostanzialmente da aste rigide che possono ruotare intorno ai perni che le uniscono o scorrere lungo guide rettilinee (*sistemi articolati*).

In questo capitolo ci occuperemo proprio di una particolare famiglia di macchine matematiche, quelle contenenti sistemi articolati. Il più semplice e più antico esempio è il compasso piano, costituito da una sola asta, fissata ad una tavola in uno dei suoi estremi e per il resto libera di muoversi. Già Erone (~ 10 - ~ 75), nel primo secolo dopo Cristo, definisce il cerchio come la figura descritta quando un segmento si muove ruotando intorno ad uno dei suoi estremi sempre restando nello stesso piano, fino a tornare nella posizione iniziale (Heath, 1956, vol. 1), contrapponendo una definizione dinamica e procedurale di cerchio alla definizione statica e relazionale di Euclide (~ 325 a.C. - ~ 263 a.C.).

Un riassunto della storia dei sistemi articolati è dato da Gabriel Koenigs (1858-1931) nel 1897 e ripresa in una bibliografia pubblicata nel 1933 in un numero speciale del Tohoku Mathematical Journal (Kanayama, 1933). Nella bibliografia appare evidente che, nati nella pratica della tecnologia fin dall'antichità, i sistemi articolati entrano nella storia della matematica dopo il 1600, con la massima fioritura documentata negli ultimi decenni dell'Ottocento. In quegli anni si studiano prevalentemente problemi teorici, collegati al tracciamento di curve algebriche piane per mezzo di opportuni sistemi articolati (tema affron-

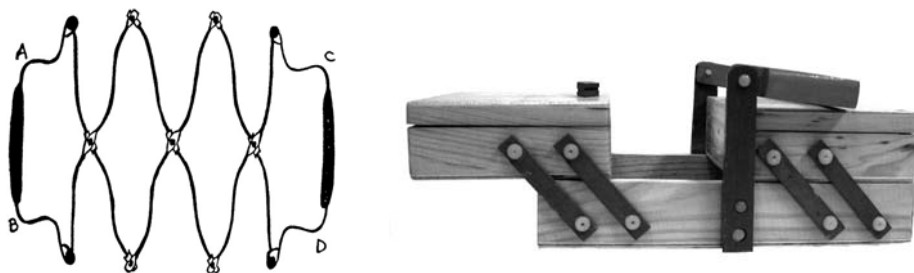


Figura 1.1 esempi di sistemi articolati

tato nel paragrafo 8). Più tardi, i sistemi articolati sono oggetto di studio nel settore della matematica applicata. Nei primi decenni del Novecento l'interesse diminuisce e si rinnova solo recentemente, quando si ha una ripresa sia nella geometria algebrica (Kapovich, Millson, 2002), sia nella matematica applicata, per la ricerca dei migliori algoritmi che possano consentire il movimento di un robot in uno spazio contenente ostacoli¹.

Da un punto di vista culturale, quindi, la storia dei sistemi articolati può rappresentare in modo emblematico la lunga storia dei complessi rapporti tra la matematica e la tecnologia.

1.1 Il compasso di Euclide

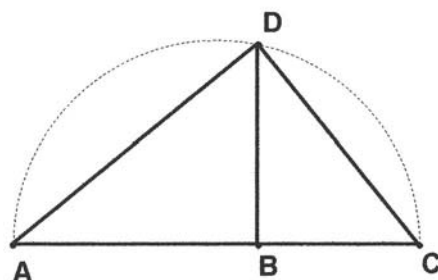
I mezzi di calcolo dell'antichità classica ed ellenistica sono i vari tipi di abaco (quando sono in gioco numeri interi) e l'algebra geometrica. Quest'ultima, ampiamente illustrata negli *Elementi* di Euclide (Frajese, Maccioni, 1970), offre il procedimento di soluzione per diversi tipi di problemi, che oggi risolveremmo in modo algebrico: un problema è tradotto in linguaggio geometrico, rappresentando i dati con lunghezze di segmenti; risolvere il problema equivale a costruire geometricamente un segmento che ne rappresenta la soluzione, intersecando rette e cerchi. Si usano come strumenti la riga e il compasso. Quest'ultimo caratterizza, nell'iconografia, l'attività matematica fin dall'epoca alessandrina.

Vediamo un esempio dal libro VI, nel quale, ovviamente si fa riferimento ai teoremi già dimostrati nei libri precedenti.

Esempio (Euclide, VI, 13)

“Date due rette, trovare [fra esse] la media proporzionale

Figura 1.2



¹ <http://www.ams.org/featurecolumn/archive/linkages1.html>