

JULIÁN QUIROGA SEPÚLVEDA

FUNDAMENTOS DE SEÑALES Y SISTEMAS



Pontificia Universidad
JAVERIANA
Bogotá



Pontificia Universidad
JAVERIANA
Facultad de Ingeniería

RESERVADOS TODOS LOS DERECHOS

© Pontificia Universidad Javeriana

© Julián Quiroga Sepúlveda, autor

Primera edición

Bogotá, D. C., febrero de 2018

ISBN: 978-958-781-146-9

Número de ejemplares: 400

Impreso y hecho en Colombia

Printed and made in Colombia

Editorial Pontificia Universidad Javeriana

Carrera 7.^a n.º 37-25, oficina 1301

Edificio Lutaima

Teléfono: 320 8320 ext. 4752

www.javeriana.edu.co/editorial

editorialpuj@javeriana.edu.co

Bogotá, D. C.



CORRECCIÓN DE ESTILO:

Héctor Palacios

DISEÑO DE PAUTA $\text{\LaTeX}$.

DIAGRAMACIÓN Y DISEÑO DE CUBIERTA:

Andrés Conrado Montoya Acosta

IMPRESIÓN:

Javegraf



Pontificia Universidad Javeriana | Vigilada Mineducación. Reconocimiento como Universidad: Decreto 1297 del 30 de mayo de 1964. Reconocimiento de personería jurídica: Resolución 73 del 12 de diciembre de 1933 del Ministerio de Gobierno.

Quiroga Sepúlveda, Julián, autor

Fundamentos de señales y sistemas / Julián Quiroga Sepúlveda. — Primera edición. — Bogotá : Editorial Pontificia Universidad Javeriana, 2017.

318 páginas: ilustraciones, gráficas; 28 cm

Incluye referencias bibliográficas.

ISBN : 978-958-781-146-9

1. PROCESAMIENTO DE SEÑALES. 2. TEORÍA DE LAS SEÑALES (TELECOMUNICACIONES). 3. PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. 4. INGENIERÍA ELECTRÓNICA. 5. SERIES DE FOURIER. 6. TRANSFORMACIONES DE FOURIER. 7. MATEMÁTICAS. I. PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA. FACULTAD DE INGENIERÍA.

CDD 621.38043 edición 21

Catalogación en la publicación – Pontificia Universidad Javeriana. Biblioteca Alfonso Borrero Cabal, s. j.

INP

25/10/2016

*A Myriam Teresa
y Germán Augusto*

Índice general

Prefacio	13
1 Señales continuas	15
1.1 Definición de señal	15
1.2 Clasificación de señales	15
1.3 Transformaciones del tiempo	17
1.4 Señales periódicas de tiempo continuo	20
1.5 Potencia y energía	24
1.6 Señales singulares	27
1.7 Espacios vectoriales de señales	30
1.8 Ejercicios	34
2 Sistemas de tiempo continuo	37
2.1 Definición	37
2.2 Propiedades	37
2.3 Sistemas lineales e invariantes en el tiempo	40
2.4 Propiedades de los SLIT	45
2.5 Ejercicios	48
3 Representación de señales de tiempo continuo	51
3.1 Descomposición de señales	51
3.2 Aproximación de vectores	52
3.3 Bases ortogonales	55
3.4 Representación de señales en un intervalo de tiempo finito	59
3.5 Teorema de Parseval	64
3.6 Ejercicios	65

4	<i>Serie de Fourier</i>	69
4.1	<i>Serie exponencial de Fourier (SEF)</i>	69
4.2	<i>Representación de señales periódicas</i>	72
4.3	<i>Serie trigonométrica de Fourier</i>	82
4.4	<i>Serie trigonométrica de Fourier para señales pares e impares</i>	86
4.5	<i>Teorema de Parseval para la serie trigonométrica de Fourier</i>	88
4.6	<i>Ejercicios</i>	89
5	<i>Transformada de Fourier</i>	91
5.1	<i>Deducción de la transformada de Fourier</i>	91
5.2	<i>Transformada de Fourier L_1</i>	93
5.3	<i>Propiedades de la transformada de Fourier L_1</i>	98
5.4	<i>Propiedad de convolución</i>	107
5.5	<i>Teorema de Parseval</i>	114
5.6	<i>Transformada de Fourier L_2</i>	116
5.7	<i>Transformadas de Fourier de señales periódicas</i>	120
5.8	<i>Ejercicios</i>	122
6	<i>Transformada de Laplace</i>	125
6.1	<i>Definición</i>	126
6.2	<i>Cálculo y convergencia de la transformada de Laplace</i>	126
6.3	<i>Relación entre Laplace y Fourier</i>	131
6.4	<i>Transformada de Laplace inversa</i>	132
6.5	<i>Propiedades</i>	136
6.6	<i>Análisis de un SLIT</i>	138
6.7	<i>Ejercicios</i>	143
7	<i>Muestreo en tiempo y señales discretas</i>	145
7.1	<i>Muestreo ideal en tiempo</i>	145
7.2	<i>Señales discretas</i>	154
7.3	<i>Espacios vectoriales de señales discretas</i>	163
7.4	<i>Ejercicios</i>	166
8	<i>Sistemas discretos</i>	169
8.1	<i>Definición</i>	169
8.2	<i>Propiedades</i>	169
8.3	<i>Sistemas lineales e invariantes en el tiempo</i>	172
8.4	<i>Propiedades de los SLIT discretos</i>	179
8.5	<i>Sistemas FIR e IIR</i>	181
8.6	<i>SLIT en ecuaciones en diferencias</i>	182
8.7	<i>Ejercicios</i>	185

9	Análisis de Fourier de tiempo discreto	187
9.1	Transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD)	187
9.2	Transformada discreta de Fourier (TDF)	203
9.3	Aplicaciones de la TDF	215
9.4	Transformada rápida de Fourier (FFT)	219
9.5	Ejercicios	222
10	Transformada Z	225
10.1	Definición	225
10.2	Cálculo y convergencia de la transformada Z	226
10.3	Relación entre Z y Fourier	230
10.4	Transformada Z inversa	232
10.5	Propiedades	234
10.6	Análisis de un SLIT discreto	235
10.7	Ejercicios	242
11	Filtros digitales	245
11.1	Especificaciones de un filtro digital	245
11.2	Diseño de filtros FIR	247
11.3	Diseño de filtros IIR	256
12	Tasa de muestreo múltiple	261
12.1	Conversión del tiempo de muestreo	261
12.2	Diezmado por un factor D	265
12.3	Interpolación por un factor I	271
12.4	Conversión de frecuencia de muestreo por un factor racional	277
12.5	Digital Subbanding	278
12.6	Ejercicios	281
13	Introducción al análisis tiempo-frecuencia	283
13.1	Átomos tiempo-frecuencia	283
13.2	Transformada de Fourier de tiempo-corto	286
13.3	Transformada wavelet continua (TWC)	291
13.4	Transformada wavelet discreta (TWD)	296
	Bibliografía	305
	Apéndices	307
A	Conceptos básicos	307
B	Espacios vectoriales	315

Prefacio

LA PRIMERA EDICIÓN del libro *Fundamentos de señales y sistemas* recopila los contenidos básicos del análisis de señales determinísticas y de sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Este libro puede ser usado como texto guía en cursos de pregrado de ingeniería eléctrica y electrónica, en los cuales se quiera fundamentar al estudiante en el manejo de conceptos de señales y sistemas, en tiempo y en frecuencia, con un buen grado de formalidad matemática. Adicionalmente, el libro puede ser utilizado como texto complementario en cursos de posgrado, para la introducción al procesamiento digital de señales y al análisis tiempo-frecuencia, cubriendo temas como filtros digitales, conversión de la tasa de muestreo y transformadas de tiempo corto.

El libro reúne deducciones matemáticas junto a una serie de ejemplos explicativos, los cuales intentan guiar al estudiante en su camino de aprendizaje y de apropiación de las herramientas presentadas para el estudio de señales y sistemas. Para ello, el libro contiene en cada capítulo las temáticas principales, acompañadas de ilustraciones y ejemplos desarrollados en su totalidad.

Este libro trata de apoyar al estudiante en la comprensión de un tema demandante debido a sus requerimientos matemáticos. Por tal motivo, es de suma importancia que se realice la lectura de los contenidos de cada sección, revisando los ejemplos y desarrollando los ejercicios propuestos, con el fin de apropiarse de cada una de las temáticas. Los dos anexos presentan conceptos necesarios para la comprensión del contenido del libro, por lo tanto se sugiere revisar los temas ahí tratados. Debido a la cantidad de definiciones y conceptos que se manejan en este texto, se recomienda realizar la lectura en el orden propuesto. Algunos temas complementarios son desarrollados de forma corta, si se desea profundizar en cualquiera de estos contenidos, el lector puede consultar la bibliografía aquí relacionada.

El libro está organizado como sigue. En los capítulos del 1 al 6 se presentan los conceptos básicos en tiempo continuo de señales, sistemas y representación, así como herramientas de análisis basadas en la transformada de Fourier y la transformada de Laplace. En el capítulo 7 se estudian los principios del muestreo ideal y se realiza la conexión entre tiempo continuo y discreto. En los capítulos del 7 al 10 se desarrollan las temáticas de señales y sistemas de tiempo discreto, y de igual forma, se estudia la transformada de Fourier y la transformada Z como herramientas de análisis en este dominio. Finalmente, el libro concluye en los capítulos del 11 al 13, con una profundización de los conceptos trabajados en aplicaciones de filtros digitales, conversión de la tasa de muestreo y la teoría introductoria al análisis tiempo-frecuencia.

Deseo agradecer especialmente a David Hidalgo Erazo, quien hizo posible finalizar este libro en el tiempo planeado. Su dedicación y empeño en la elaboración de figuras, transcripción y corrección del texto y sus sugerencias de estilo y contenido definieron en gran medida el documento final. De igual forma, quiero agradecer a Jairo Alberto Hurtado Londoño, por la corrección de la totalidad del libro, por las enriquecedoras discusiones acerca del enfoque que debería tener, por las sugerencias sobre cómo presentar y desarrollar diferentes temáticas y por los ejercicios adicionales que se presentan al final de algunos de los capítulos. Quisiera también reconocer el aporte de mis estudiantes de los cursos Señales y Sistemas, Análisis de Fourier, Señales e Imágenes, Procesamiento Digital de Señales, Procesamiento de Imágenes y Video impartidos entre los años 2006 y 2016, quienes utilizaron estos contenidos y ayudaron en su mejoramiento. Finalmente, un agradecimiento especial al Departamento de Electrónica de la Pontificia Universidad Javeriana, por el tiempo y los recursos otorgados para el desarrollo de este libro.

Espero que este libro sea de gran utilidad para el desarrollo de sus cursos de señales y sistemas. Agradezco me comuniquen los errores o cualquier sugerencia para la mejora del mismo.

Julián Quiroga Sepúlveda

1 Señales continuas

1.1 Definición de señal

UNA SEÑAL ES una abstracción de cualquier cantidad medible que es función de una o más variables independientes. Las señales unidimensionales dependen de una sola variable independiente. Por ejemplo, el voltaje en los terminales de un generador es función del tiempo y la temperatura alrededor de una fuente de calor es función de la distancia a la fuente. Por otro lado, las señales multidimensionales son funciones de más de dos variables independientes. Por ejemplo, una imagen es una señal bidimensional cuya intensidad depende de la posición vertical y la posición horizontal observada, es decir, de la posición espacial. En la figura 1.1 se ilustran algunos ejemplos de señales.

Las señales pueden modelarse matemáticamente como funciones. Por ejemplo, una señal de voltaje puede verse como una función que tiene como dominio un conjunto de tiempos y como rango los valores de voltaje que son asignados a cada tiempo, como se ilustra en la figura 1.2. Las características del dominio y del rango de una señal permiten realizar su clasificación en diferentes conjuntos de interés, como se presenta en la sección 1.2. En particular, en este libro se estudia el caso de señales unidimensionales, donde el dominio corresponde al tiempo.

1.2 Clasificación de señales

1.2.1 SEÑALES CONTINUAS Y DISCRETAS

Las señales pueden clasificarse en dos grandes grupos de acuerdo con su dominio: en señales de tiempo continuo (TC) o señales continuas, que denotaremos como $x(t)$, y en señales de tiempo discreto (TD) o señales discretas, que escribiremos como $x[n]$.

1.2.1.1 SEÑALES DE TIEMPO CONTINUO

Las señales continuas se encuentran definidas para todos los instantes de tiempo y pueden modelarse como funciones que tienen como dominio los reales, i.e., $f : \mathbb{R} \rightarrow \star$, con $\star$ representando cualquier conjunto numérico. El valor de una señal de TC se puede conocer en cualquier instante. Las señales que se modelan como $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se conocen como señales de TC reales, debido a que solo toman valores reales, como se ilustra en la figura 1.3 (a). Por otro lado, las señales que se modelan como $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se conocen como señales de TC complejas, ya que toman un valor complejo para cada tiempo, como se presenta en la figura 1.3 (b).

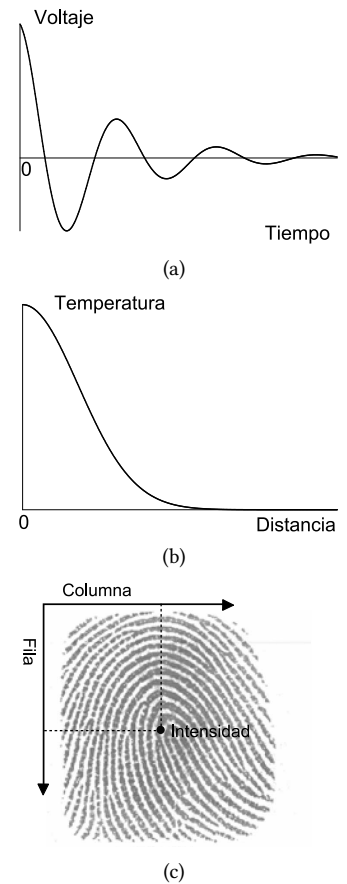


Figura 1.1. Ejemplos de señales: (a) señal función del tiempo, (b) señal función de la distancia y (c) señal (imagen) función de la posición.

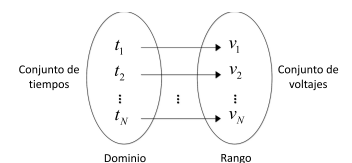


Figura 1.2. Señal de voltaje vista como una función.

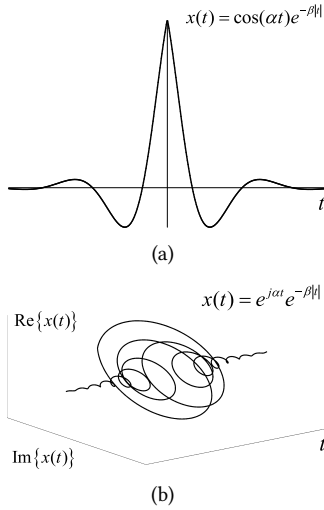


Figura 1.3. Señales de tiempo continuo: (a) señal continua real y (b) señal continua compleja.

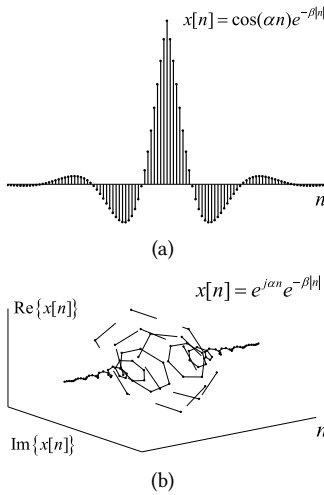


Figura 1.4. Señales de tiempo discreto: (a) señal discreta real y (b) señal discreta compleja. En la figura (b) se utilizan líneas para unir los valores de la señal para visualizar la forma de onda.

Observación 1.1. Aunque toda señal real es también compleja por definición, pues $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, se denomina señal compleja a las señales que toman valores complejos con parte imaginaria diferente de cero, es decir, valores no puramente reales.

1.2.1.2 SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO

Las señales discretas se definen sobre un conjunto contable (ver apéndice A) del tiempo y pueden modelarse como funciones con dominio en los enteros, i.e., $f : \mathbb{Z} \rightarrow \star$, con $\star$ representando un conjunto numérico. El valor de una señal de TD solo puede conocerse para tiempos sobre los cuales se encuentra definida. Las señales que se modelan como $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ se conocen como señales de TD reales debido a que toman solo valores reales, como se ilustra en la figura 1.4 (a). Por otro lado, las señales que se modelan como $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ se conocen como señales de TD complejas, suponiendo que toman valores con parte imaginaria diferente de cero, como se ilustra en la figura 1.4 (b).

Las señales de TD pueden verse como versiones muestreadas de las señales de TC, como sucede al digitalizar una canción o al escanear una fotografía. En el capítulo 7 se estudian en detalle las señales discretas y el procedimiento de muestreo.

1.2.2 SEÑALES DE VALOR CONTINUO Y VALOR DISCRETO

Las señales pueden clasificarse en dos grupos de acuerdo con su rango: en señales de valor continuo y en señales de valor discreto. De forma análoga al caso del dominio, la naturaleza contable o no contable del rango define el tipo de señal. Una señal de valor continuo toma valores sobre un conjunto no contable, por ejemplo cualquier valor sobre un intervalo, como es el caso de la señal $f : \mathbb{Z} \rightarrow [-1, 1]$. Por otro lado, una señal de valor discreto toma valores sobre un conjunto contable, por ejemplo sobre un subconjunto de los enteros, como es el caso de la señal $f : \mathbb{R} \rightarrow \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Observación 1.2. La definición de valor continuo y valor discreto es independiente de la naturaleza de tiempo continuo o discreto de la señal, es decir, depende solo de su rango.

En la figura 1.5 se ilustran señales de valor discreto y continuo, ambas de tiempo continuo.

1.2.3 SEÑALES DE SOPORTE COMPACTO (DE DURACIÓN FINITA)

Las señales pueden clasificarse de acuerdo con las características del conjunto del tiempo sobre el cual se encuentran definidas. El soporte de una función se define como el subconjunto del dominio dentro del cual la función toma valores distintos de cero. Para el caso de señales que son funciones del tiempo se presenta una definición similar.

Definición 1.1. El soporte de una señal continua $x(t)$ es el subconjunto cerrado y conexo más pequeño del tiempo que contiene todos los valores no nulos de $x(t)$.

Así, el soporte de una señal es el subconjunto del tiempo (de los reales) en donde se presentan todos los valores diferentes de cero de la señal, sin importar que contenga valores nulos de la misma. El soporte debe cumplir dos condiciones muy importantes: debe ser conexo y debe ser el conjunto más pequeño que contiene los valores no nulos. La primera implica que el soporte no puede descomponerse en términos de conjuntos cerrados disjuntos, por lo que siempre corresponde a un solo intervalo de la recta real. Ahora, por ser el conjunto más pequeño, no puede existir otro conjunto conexo que contenga los valores no nulos y que sea un subconjunto propio del soporte. En la figura 1.6 (a) está representada una señal cuyo soporte corresponde a un conjunto acotado. En la figura 1.6 (b) se representa una señal

cuyo soporte se encuentra acotado inferiormente pero no superiormente, ya que la señal tiende a cero cuando t tiende a infinito, pero nunca llega a ser cero.

Definición 1.2. Una señal tiene soporte compacto si su soporte es acotado.

Ejemplo 1.1. La señal triangular que ilustra en la figura 1.7 (a) tiene soporte compacto dado por el intervalo $[-2, 2]$. La señal $x(t) = e^{-t^2}$ no tiene soporte compacto, pues la señal nunca llega a ser cero, ver figura 1.7 (b). En este caso el soporte de la señal corresponde a los reales.

Observación 1.3. Para el caso de señales con soporte no acotado, el soporte es un subconjunto no cerrado del tiempo, como en la figura 1.6 (b) donde el soporte es el intervalo $[0, \infty)$.

Definición 1.3. Una señal causal tiene como soporte un subconjunto del intervalo $[0, \infty)$ mientras una señal anticausal tiene por soporte un subconjunto del intervalo $(-\infty, 0]$. Las señales cuyo soporte contiene tanto tiempos positivos como negativos se denominan señales bilaterales.

1.2.4 SEÑALES ACOTADAS EN VALOR (DE VALOR FINITO)

Una señal acotada en valor, o simplemente acotada, es aquella que toma solo valores finitos. Los valores de una señal están definidos por su rango, el cual es un subconjunto de los reales o de los complejos, dependiendo del tipo de señal. Si el rango de la señal es un conjunto acotado se define que la señal es acotada (en valor). Sin embargo, para el caso de señales que toman valores complejos esta definición no aplica, pues los complejos no tienen orden, es decir, no se puede decir que un complejo es más grande que otro. Por tal motivo, con el fin de obtener únicamente valores reales tanto para señales reales como para complejas se toma la magnitud de la señal.

Definición 1.4. Una señal $x(t)$ es acotada si existe un valor $M \in \mathbb{R}^+$ tal que para todos los instantes de tiempo se cumple que $|x(t)| \leq M$.

De acuerdo con esto, una señal es acotada si existe un real M que sea mayor o igual a su magnitud para todos los tiempos. Para el caso de señales reales, la definición implica que el rango de la señal tiene supremo e ínfimo reales (ver apéndice A).

Ejemplo 1.2. Las exponenciales complejas son señales acotadas, debido a que su magnitud es constante. Si $x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$, con $A \in \mathbb{R}^+$, entonces $|x(t)| = |Ae^{j\omega_0 t}| = A$, dado que $|e^{j\omega_0 t}| = 1$.

Ejemplo 1.3. La señal $x(t) = \arctan(t)$ de la figura 1.8 (a), es una señal acotada en magnitud por $\frac{\pi}{2}$. En cambio, la señal $x(t) = \frac{1}{t}$ no es acotada, como se ilustra en la figura 1.8 (b).

1.3 Transformaciones del tiempo

Cuando la variable temporal t de una señal $x(t)$ se transforma como $x(at)$ o $x(t - t_0)$, con $a, t_0 \in \mathbb{R}$, la señal cambia sus propiedades como se describe a continuación.

1.3.1 REFLEXIÓN TEMPORAL

La reflexión temporal se realiza sustituyendo la variable temporal t por $-t$. Bajo esta transformación la señal original $x(t)$ se refleja respecto al tiempo $t = 0$ para obtener la señal $x(-t)$, como se ilustra para la señal tipo escalera de la figura 1.9.

Ejemplo 1.4. Si $x(t)$ es una señal causal con soporte $[t_1, t_2]$, donde $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ y $t_1 < t_2$, entonces la señal reflejada $x(-t)$ tiene soporte $[-t_2, -t_1]$.

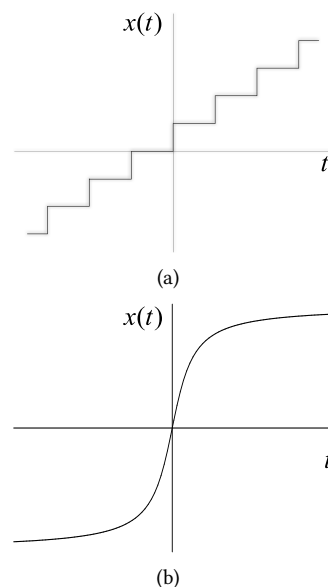


Figura 1.5. Señales de (a) valor discreto y (b) valor continuo.

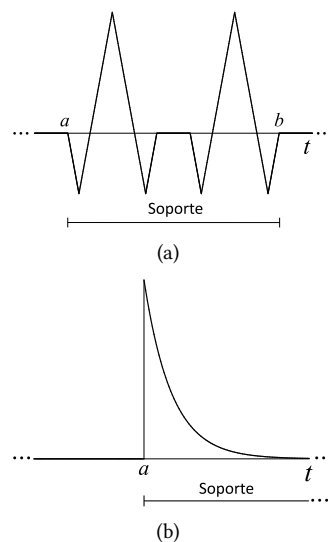


Figura 1.6. Ejemplos de soportes: (a) acotado y (b) no acotado.

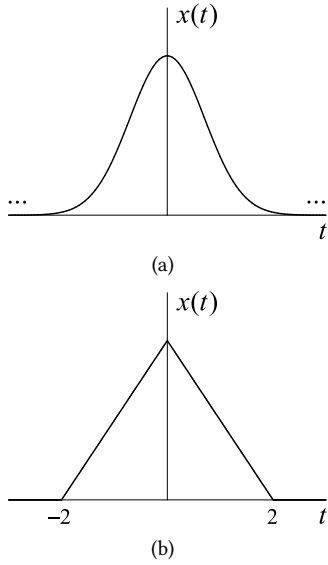


Figura 1.7. Ejemplos de soportes: (a) acotado (compacto) y (b) no acotado (no compacto).

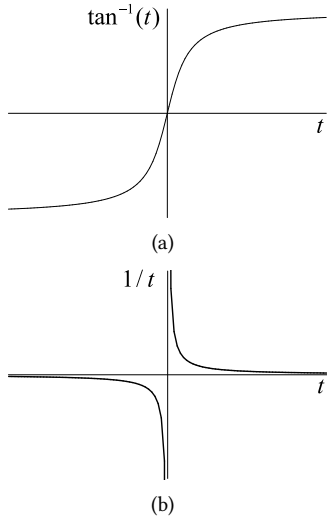


Figura 1.8. (a) Señal acotada y (b) señal no acotada.

Observación 1.4. Al realizar la reflexión temporal de una señal causal se obtiene una señal anticausal y viceversa.

1.3.2 SEÑALES PARES E IMPARES

Algunas señales cumplen con cierto tipo de simetría con respecto al tiempo cero y de acuerdo con esta simetría pueden clasificarse en señales pares o impares.

1.3.2.1 SEÑALES PARES

Una señal $x(t)$ es par si cumple con $x(t) = x(-t)$, i.e., si al reflejarla con respecto a $t = 0$ se obtiene la misma señal. En la figura 1.10 (a) se ilustra la señal par $x(t) = t^2$.

Ejemplo 1.5. La señal $x(t) = 1 + t^2$ es par, pues $x(-t) = 1 + (-t)^2 = 1 + t^2 = x(t)$.

Propiedad 1.1. Si $x(t)$ es una señal par entonces $\int_{-a}^a x(t)dt = 2 \int_0^a x(t)dt$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a x(t)dt &= \int_{-a}^0 x(t)dt + \int_0^a x(t)dt = - \int_a^0 x(-u)du + \int_0^a x(t)dt \\ &= \int_0^a x(u)du + \int_0^a x(t)dt = 2 \int_0^a x(t)dt. \end{aligned}$$

□

1.3.2.2 SEÑALES IMPARES

Una señal $x(t)$ es impar si cumple con $x(-t) = -x(t)$, i.e., si al reflejarla con respecto a $t = 0$ se obtiene la señal original con signo contrario. En la figura 1.10 (b) se ilustra la señal impar $x(t) = t^3$.

Ejemplo 1.6. La señal $x(t) = t$ es impar, pues $x(-t) = -t = -x(t)$.

Propiedad 1.2. Si $x(t)$ es una señal impar entonces $\int_{-a}^a x(t)dt = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a x(t)dt &= \int_{-a}^0 x(t)dt + \int_0^a x(t)dt = - \int_a^0 x(-u)du + \int_0^a x(t)dt \\ &= - \int_0^a x(u)du + \int_0^a x(t)dt = 0. \end{aligned}$$

□

1.3.2.3 COMPONENTE PAR E IMPAR

Una señal dada no necesariamente es par o impar, sin embargo, toda señal puede expresarse como la suma de una señal par más una señal impar, de acuerdo con:

$$x(t) = x^{par}(t) + x^{imp}(t),$$

donde

$$x^{par}(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

y

$$x^{imp}(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}.$$

Ejemplo 1.7. La señal $x(t) = 1 + t + t^2$ puede expresarse como:

$$x(t) = x^{par}(t) + x^{imp}(t),$$

donde

$$x^{par}(t) = \frac{(1 + t + t^2) + (1 - t + t^2)}{2} = 1 + t^2$$

y

$$x^{imp}(t) = \frac{(1 + t + t^2) - (1 - t + t^2)}{2} = t.$$

Ejemplo 1.8. La señal $x(t) = e^{jt}$ puede expresarse como

$$x(t) = x^{par}(t) + x^{imp}(t),$$

donde

$$x^{par}(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = \cos(t)$$

y

$$x^{imp}(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2} = j \sin(t).$$

Observación 1.5. Si $x(t)$ es una señal par entonces $x^{par}(t) = x(t)$ y $x^{imp}(t) = 0$. Si $x(t)$ es una señal impar entonces $x^{par}(t) = 0$ y $x^{imp}(t) = x(t)$.

1.3.3 DESPLAZAMIENTO TEMPORAL

Cuando la variable temporal t se sustituye por $t - t_0$, con $t_0 \in \mathbb{R}$, la señal se desplaza temporalmente. En particular, si $x(t)$ es una señal de soporte compacto, con soporte $[t_1, t_2]$, entonces la señal $x(t - t_0)$ corresponde a una versión desplazada temporalmente en t_0 como se ilustra en la figura 1.11 y cuyo soporte llega a ser $[t_1 + t_0, t_2 + t_0]$.

El desplazamiento temporal puede clasificarse en adelanto o retraso, de acuerdo con el signo de t_0 . Si $t_0 < 0$ la señal $x(t - t_0)$ se encuentra en adelanto respecto a $x(t)$, pues presenta un desplazamiento temporal a la izquierda como se ilustra en la figura 1.11 (b) (sucede antes). Por otro lado, si $t_0 > 0$, la señal $x(t - t_0)$ está en retraso respecto a $x(t)$, pues sufre un desplazamiento temporal a la derecha como se presenta en la figura 1.11 (c) (sucede después).

1.3.4 ESCALAMIENTO TEMPORAL

Un escalamiento temporal se realiza para expandir o comprimir en tiempo una señal, para tal fin, la variable t se sustituye por at , con $a \in \mathbb{R}^+$, obteniendo la señal escalada $x(at)$. Si $x(t) = A$ para $t = t_0$, entonces para la señal escalada se cumple que $x(at) = A$ para $at = t_0$ implicando que $t = \frac{t_0}{a}$. Por tal motivo, al realizar el escalamiento temporal por un valor a , cada tiempo se divide por este factor, lo que produce la expansión o compresión temporal. Para el caso $a > 1$, la señal $x(at)$ corresponde a una versión comprimida de $x(t)$, como se ilustra en la figura 1.12 (b). Por otro lado, si $0 < a < 1$, la señal $x(at)$ es una expansión de $x(t)$, como se presenta en la figura 1.12 (c).

El escalamiento afecta de forma inversa la duración del soporte de una señal de soporte compacto. En particular, para una señal $x(t)$ con soporte $[t_1, t_2]$, la señal escalada $x(at)$, con $a \in \mathbb{R}^+$, tiene soporte $[\frac{t_1}{a}, \frac{t_2}{a}]$. Por tal motivo la duración del soporte de la señal original que era $(t_2 - t_1)$ llega a ser $\frac{(t_2 - t_1)}{a}$ debido al efecto del escalamiento.

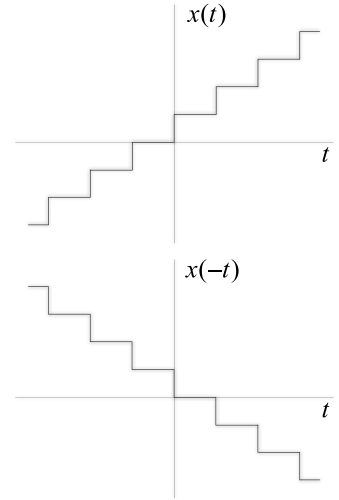


Figura 1.9. Reflexión temporal.

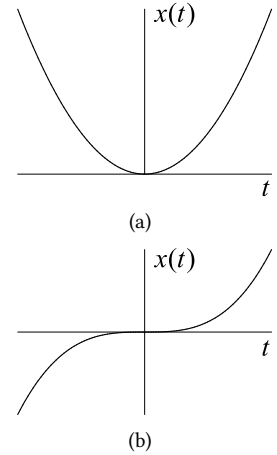


Figura 1.10. Simetría respecto a $t = 0$: (a) señal par y (b) señal impar.

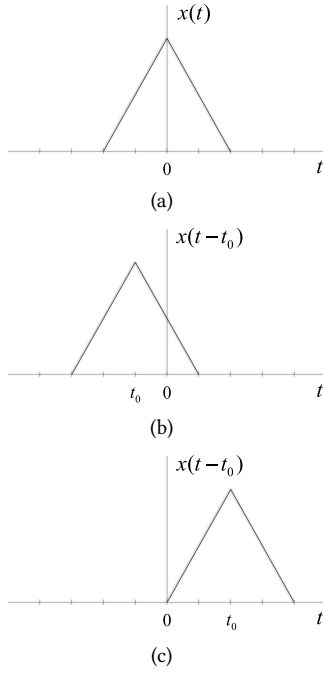


Figura 1.11. Desplazamiento temporal: (a) señal original, (b) desplazamiento para $t_0 < 0$ (adelanto) y (c) desplazamiento para $t_0 > 0$ (retraso).

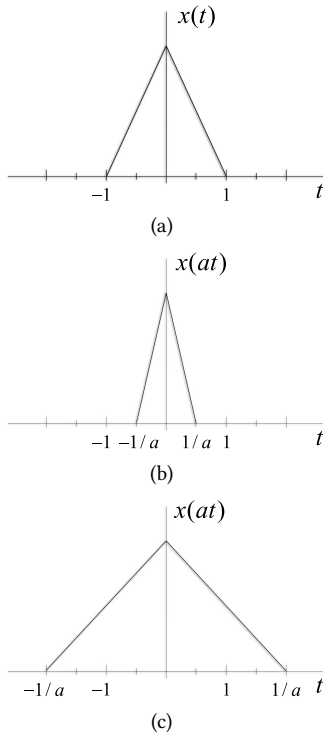


Figura 1.12. Escalamiento temporal: (a) señal original, (b) escalamiento para $a > 1$ (compresión) y (c) escalamiento para $0 < a < 1$ (expansión).

Observación 1.6. Los escalamientos por factores negativos pueden ser vistos como una reflexión temporal seguida por un escalamiento por un factor $a \in \mathbb{R}^+$.

1.3.5 TRANSFORMACIONES TEMPORALES MÚLTIPLES

Al realizar diferentes transformaciones temporales de forma simultánea es importante el orden en el cual estas son aplicadas, ya que una transformación dada puede afectar una transformación anterior. Suponga que la señal $x(t)$ se quiere escalar en el tiempo por un factor a y retrasar en un tiempo t_0 . Si se aplica primero el desplazamiento temporal se obtiene la señal $x(t - t_0)$ la cual al ser escalada por un factor a da como resultado la señal $x(at - t_0) = x[a(t - \frac{t_0}{a})]$. Dado que al realizar el escalamiento por un factor a , el eje temporal se modifica por este valor, el desplazamiento temporal que era de t_0 llega a ser $\frac{t_0}{a}$ debido al escalamiento.

Observación 1.7. Un escalamiento temporal (por un factor a) afecta a un desplazamiento temporal t_0 , realizado anteriormente, y lo convierte en un desplazamiento $\frac{t_0}{a}$.

En cambio, si se aplica primero el escalamiento temporal se obtiene la señal $x(at)$ la cual al ser desplazada por t_0 da como resultado la señal $x[a(t - t_0)]$. En este caso, se obtiene el desplazamiento y el escalamiento deseado. Por tal motivo, el escalamiento temporal se realiza en primer lugar, seguido del desplazamiento temporal.

En general, una señal escalada por un factor a y desplazada temporalmente en t_0 puede expresarse como $x[a(t - t_0)] = x(at - at_0)$. Este modelo permite identificar los factores utilizados en la transformación como se presenta en los ejemplos 1.9 y 1.10.

Observación 1.8. Una señal reflejada, escalada y desplazada se expresa como $x[-a(t - t_0)]$.

Ejemplo 1.9. Sea la señal $x(t)$, identifique las transformaciones temporales necesarias para obtener las señales $x(2 - 2t)$ y $x(\frac{1}{3}t + 1)$.

Solución. La señal $x(2 - 2t)$ puede expresarse como $x[-2(t - 1)]$, la cual corresponde a un versión reflejada, escalada por un factor 2 (comprimida por 2) y retrasada temporalmente (en 1) de la señal $x(t)$. Por otro lado, la señal $x(\frac{1}{3}t + 1) = x[\frac{1}{3}(t + 3)]$ corresponde a un versión escalada por un factor $\frac{1}{3}$ (expandida por 3) y adelantada temporalmente (en 3) de la señal $x(t)$. $\square$

Ejemplo 1.10. Identifique las transformaciones temporales necesarias para obtener la señal $y(t)$ a partir de la señal $x(t)$, ambas definidas de acuerdo con la figura 1.13.

Solución. La señal $y(t)$ corresponde a una versión reflejada y escalada temporalmente por un factor 2 de $x(t)$, la cual debe retrasarse temporalmente en 1 para obtener la señal de la figura 1.13. Por tal motivo se puede escribir que $y(t) = x[-2(t - 1)]$. $\square$

1.4 Señales periódicas de tiempo continuo

1.4.1 PERIODO Y FRECUENCIA

Una señal periódica es una señal que repite su valor cada determinado tiempo, denominado periodo.

Definición 1.5. Un valor $a \in \mathbb{R}$ es un tiempo de repetición de la señal $x(t)$ si:

$$(1.1) \quad x(t + a) = x(t).$$

Los tiempos de repetición de una señal $x(t)$ definen un conjunto de tiempos para los cuales un desplazamiento de $x(t)$ no altera la señal. Este conjunto es de cardinalidad infinita ya que si a es un tiempo de repetición todos los múltiplos enteros de a también lo son.

Observación 1.9. El valor $a = 0$ es un tiempo de repetición para toda señal.

Una señal $x(t)$ para la cual existen tiempos de repetición se denomina señal periódica, pues esta repite su valor cada tiempo de repetición. Si solo el cero es un tiempo de repetición para una señal, se dice que la señal es aperiódica o no periódica. Dado que el número de tiempos de repetición de una señal periódica es infinito, es necesario elegir un representante del conjunto que caracterice la periodicidad de la señal.

Definición 1.6. El periodo T de una señal $x(t)$ se define como el mínimo tiempo de repetición positivo. Por tal motivo, $x(t)$ es una señal periódica si y solo si existe un $T \in \mathbb{R}^+$, tal que:

$$x(t + T) = x(t).$$

Si una señal $x(t)$ tiene periodo T entonces cumple $x(t + kT) = x(t)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Cada uno de los términos kT es un tiempo de repetición de la señal, cuyo mínimo se presenta para $k = 1$, que corresponde al periodo. Dado que al desplazar $x(t)$ cualquier múltiplo entero de su periodo T se obtiene la misma señal, es suficiente conocer $x(t)$ sobre un intervalo de tiempo de duración T para determinarla por completo. Una señal periódica puede verse como un conjunto infinito de copias de este intervalo, como se ilustra en la figura 1.14.

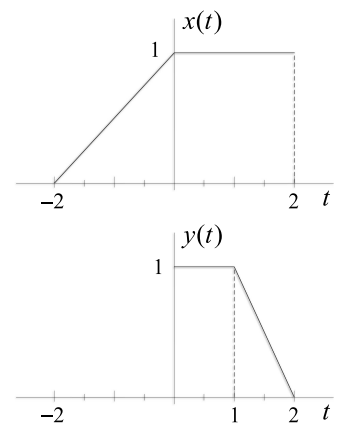
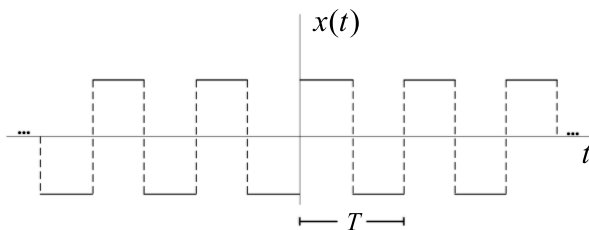


Figura 1.13. Transformaciones temporales múltiples: $y(t) = x[-2(t-1)]$.

Figura 1.14. Señal periódica de tiempo continuo.

Observación 1.10. Toda señal constante es periódica ya que cualquier $a \in \mathbb{R}$ satisface (1.1).

Sin embargo, no existe periodo para una señal constante ya que el conjunto de tiempos de repetición positivos, dado por $\mathbb{R}^+$, no tiene mínimo. Por tal motivo, por convención se establece que el periodo de las señales constantes es infinito.

Propiedad 1.3. Toda señal periódica tiene soporte en $(-\infty, \infty)$, por lo tanto no acotado.

Demostración. Suponga que una señal periódica se repite cada T y tiene soporte compacto, en el intervalo $[t_1, t_2]$. Bajo esta condición, al realizar $x(t + T)$ no se obtiene $x(t)$, pues la señal $x(t + T)$ tiene soporte en $[t_1 - T, t_2 - T]$. Por tal motivo, toda señal periódica debe tener soporte no acotado y debe repetirse desde $-\infty$ hasta ∞ . $\square$

El periodo da información del tiempo requerido para que una señal repita su valor, así señales periódicas de periodo pequeño se repiten más rápidamente que señales con periodo mayor. La velocidad de repetición o frecuencia fundamental de una señal periódica es inversa a su periodo.

Definición 1.7. La frecuencia (fundamental) f , de una señal periódica, se define como el inverso de su periodo T , es decir: $f = \frac{1}{T}$.

Si el periodo se expresa en segundos la frecuencia se da en Hz (Hertz) para el caso de señales sinusoidales y en ciclos por segundo (cps) para otras señales periódicas. La frecuencia

da información del número de veces que se repite una señal en un intervalo de tiempo (velocidad de repetición). Conociendo que el periodo de una señal pertenece al intervalo $(0, \infty)$, la frecuencia de una señal está en el intervalo $[0, \infty)$, incluyendo la frecuencia cero para las señales constantes, las cuales tienen periodo infinito por convención.

Definición 1.8. La frecuencia angular continua ω es proporcional a la frecuencia de la señal e inversa a su periodo, y se define como:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

La frecuencia angular continua ω se encuentra en el intervalo $[0, \infty)$. Si la frecuencia se expresa en Hz, la frecuencia angular tiene unidades de rad/s.

La gran mayoría de señales periódicas de interés pueden expresarse como una combinación lineal (suma ponderada) de señales periódicas más simples de diferentes frecuencias. Sin embargo, existe un conjunto de señales periódicas que poseen una única frecuencia y no pueden descomponerse. Este es el caso de las señales sinusoidales que son: la señal seno $\sin(\omega t)$, la señal coseno $\cos(\omega t)$ y la exponencial compleja $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$.

Propiedad 1.4. La señal $e^{j\omega t}$, con $\omega \in \mathbb{R}$, siempre es periódica y tiene periodo $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

Demostración. Si la señal $e^{j\omega t}$ es periódica debe existir un $T \in \mathbb{R}^+$ tal que $e^{j\omega(t+T)} = e^{j\omega t}$, entonces:

$$e^{j\omega t} e^{j\omega T} = e^{j\omega t} \Rightarrow e^{j\omega T} = 1,$$

así, la señal es periódica si $\omega T = 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$, y sus tiempos de repetición son $\frac{2\pi}{\omega} k$. Por tal motivo, el periodo es $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$, que corresponde al mínimo tiempo de repetición positivo. $\square$

Corolario 1.1. Para todo $\omega \in \mathbb{R}$ las señales sinusoidales $e^{j\omega t}$, $\sin(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$ siempre son periódicas y su periodo es encontrado usando:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|}.$$

Solo la frecuencia angular ω controla la velocidad de repetición de las señales, por lo que la amplitud (o magnitud) y la fase no alteran su periodo. Para $\omega = 0$ las señales sinusoidales son constantes y tienen periodo ∞ , consecuente con lo convenido en este caso.

En la definición del periodo de señales sinusoidales no se tiene en cuenta el signo de ω por dos razones: el periodo siempre debe ser positivo y por definición una frecuencia angular siempre es positiva. Por tal motivo, se descarta el signo de ω , pues no afecta la velocidad de repetición de la señal. Una señal sinusoidal con ω negativa es equivalente a la misma señal con ω positiva y reflejada en el tiempo. Por ejemplo, las señales $\sin(\omega t)$ y $\sin(-\omega t)$ tienen el mismo periodo y la misma frecuencia angular ω , pero una corresponde a la reflexión temporal de la otra.

Ejemplo 1.11. Para la señal $x(t) = \sin(2t)$ se tiene $\omega = 2$ y su periodo es $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Para la señal $x(t) = e^{-j\pi t}$ se tiene $\omega = -\pi$, por lo cual su periodo es $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Ejemplo 1.12. Encuentre el periodo de la señal $x(t) = \cos^2(3t)$, en caso de ser periódica.

Solución. Es necesario expresar $\cos^2(3t)$ de forma apropiada para encontrar el periodo de $x(t)$. Conociendo la identidad $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$, se tiene que $x(t) = \frac{1}{2}[1 + \cos(6t)]$.

Dado que la frecuencia angular de la señal coseno es $\omega = 6$, entonces el periodo de $x(t)$ es $T = \frac{\pi}{3}$. $\square$

Observación 1.11. La amplitud, fase o nivel dc de una señal periódica no altera su periodo. De acuerdo con esto, la señales $C + A\cos(\omega_0 t + \phi)$ y $\cos(\omega_0 t)$ tienen el mismo periodo (por ende la misma frecuencia) para todo los valores $A \in \mathbb{R}^*$, $C \in \mathbb{R}$ y $\phi \in \mathbb{R}$.

1.4.2 SUMA DE SINUSOIDES DE TIEMPO CONTINUO

Aunque todo senoide continuo es periódico, solo en algunos casos la suma de dos o más sinusoides da como resultado una señal periódica. Considere la señal $x(t)$ definida como la suma de dos sinusoides continuos:

$$x(t) = e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t}.$$

Propiedad 1.5. La suma de dos sinusoides con frecuencias angulares ω_1 y ω_2 es periódica si y solo si $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$.

Demostración. Si $x(t)$ es periódica, para algún $T \in \mathbb{R}^+$ cumple que $x(t + T) = x(t)$, i.e.,

$$\underbrace{e^{j\omega_1(t+T)} + e^{j\omega_2(t+T)}}_{x(t+T)} = \underbrace{e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t}}_{x(t)}$$

$$e^{j\omega_1 t} e^{j\omega_1 T} + e^{j\omega_2 t} e^{j\omega_2 T} = e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t}.$$

La igualdad anterior se cumple si $e^{j\omega_1 T} = 1$ y $e^{j\omega_2 T} = 1$. Por tal motivo, si la señal $x(t)$ es periódica, se debe cumplir que $\omega_1 T = 2\pi k_1$ y $\omega_2 T = 2\pi k_2$, donde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^*$. Así, $x(t)$ es periódica si y solo si $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q}$, i.e., si el cociente $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ es un número racional. $\square$

Ejemplo 1.13. Encuentre el periodo de las siguientes señales, en caso de ser periódicas.

- $x(t) = \sin(2t) + \sin(\pi t)$

$\omega_1 = 2, \omega_2 = \pi \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, la señal no es periódica.

- $x(t) = \cos(3t) + \sin(5t)$

$\omega_1 = 3, \omega_2 = 5 \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$, la señal es periódica. Se deben encontrar los valores $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^*$ más pequeños para los que se cumple $\omega_1 T = 2\pi k_1$ y $\omega_2 T = 2\pi k_2$. Para esta señal se tiene que $3T = 2\pi k_1$ y $5T = 2\pi k_2$ y despejando se encuentra $3k_2 = 5k_1 \Rightarrow k_1 = 3, k_2 = 5$. Por tal motivo, el periodo es $T = 2\pi$.

Cuando se realiza la suma de más de dos señales sinusoidales, el periodo, en el caso que la suma sea periódica, puede ser encontrado para dos de estas señales y el resultado obtenido posteriormente es utilizado con otra señal. Este procedimiento es repetido hasta alcanzar la totalidad de señales.

Ejemplo 1.14. Encuentre el periodo de la señal $x(t) = \cos(t) + \sin(\frac{t}{2}) + \cos(\frac{t}{3})$.

Solución. Sea $x_1(t) = \cos(t) + \sin(\frac{t}{2})$ entonces $x(t) = x_1(t) + \cos(\frac{t}{3})$. Para $x_1(t)$ se tiene $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = \frac{1}{2}$, entonces $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 2 \in \mathbb{Q}$. Por tal motivo $x_1(t)$ es periódica y para ella se debe cumplir que $T_1 = 2\pi k_1$ y $\frac{T_1}{2} = 2\pi k_2$. Así, $2k_2 = k_1 \Rightarrow k_1 = 2, k_2 = 1$ y el periodo de $x_1(t)$ es $T_1 = 4\pi$ y su frecuencia angular es $\omega_{x_1} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$. Para $x(t)$, se tienen dos señales con frecuencias angulares $\omega_{x_1} = \frac{1}{2}$ y $\omega_3 = \frac{1}{3}$, entonces $\frac{\omega_{x_1}}{\omega_3} = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$. Por tal motivo, $x(t)$ es periódica y para ella se cumple $\frac{T}{2} = 2\pi k_x$ y $\frac{T}{3} = 2\pi k_3$. Así, $2k_x = 3k_3$ y se obtiene $k_x = 3$ y $k_3 = 2$. Por tal motivo, $x(t)$ tiene periodo $T = 12\pi$. $\square$

Cuando el número de señales sinusoidales se incrementa, determinar la periodicidad y encontrar el periodo de la suma se convierte en un proceso dispendioso. Únicamente en el caso en el que las frecuencias angulares se encuentren relacionadas, la tarea se simplifica y la determinación del periodo puede realizarse directamente sin importar el número de señales.

Definición 1.9. Una señal sinusoidal de frecuencia angular $k\omega$, con $k \in \mathbb{Z}^*$, se conoce como un armónico de una señal sinusoidal de frecuencia angular ω . En este contexto, ω se conoce como la frecuencia fundamental y la señal con frecuencia ω como la fundamental.

Propiedad 1.6. Toda suma de armónicos de una frecuencia angular ω es una señal periódica con periodo igual al de la fundamental, i.e., $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Demostración. Considere una señal de frecuencia ω sumada con varios de sus armónicos:

$$x(t) = \sin(\omega t) + \sin(k_1 \omega t) + \cdots + \sin(k_N \omega t), \quad k_1, k_2, \dots, k_N \in \mathbb{Z},$$

entonces la fundamental $\sin(\omega t)$ tiene periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ y su i -ésimo armónico $\sin(k_i \omega t)$ tiene periodo $\frac{2\pi}{(k_i \omega)}$. Observe que $\frac{2\pi}{\omega}$ es un tiempo de repetición para cada uno de los armónicos, pues $\frac{2\pi}{\omega}$ es múltiplo de $\frac{2\pi}{(k_i \omega)}$. Por tal motivo, el periodo de la señal total está dado por el periodo de la fundamental, pues es el mínimo tiempo de repetición para todos los elementos de la suma. $\square$

Ejemplo 1.15. Encuentre el periodo de la señal $x(t) = \cos(2t) + \frac{1}{2} \cos(6t) + \frac{1}{3} \cos(8t)$.

Solución. La señal es periódica, pues corresponde a la suma de la fundamental $\cos(2t)$ con dos de sus armónicos. El periodo de la señal iguala al de la fundamental, dado por $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. $\square$

1.5 Potencia y energía

En muchos casos las señales continuas corresponden a mediciones de voltaje o corriente realizadas sobre algún circuito eléctrico de interés. Por tal motivo, medidas de la señal como la potencia instantánea, la potencia promedio y la energía son de gran utilidad. Sin embargo, la definición de dichas medidas sobre una señal resultan también útiles para su caracterización aunque no correspondan a voltajes o corrientes, pues dan información importante de su comportamiento temporal.

1.5.1 POTENCIA INSTANTÁNEA

En un circuito puramente resistivo, como el que se ilustra en la figura 1.15, la potencia $p(t)$ sobre el resistor R en el tiempo t , es el producto entre la diferencia de potencial $v(t)$ de los terminales del resistor y la intensidad de la corriente $i(t)$ que pasa a través del mismo, es decir, $p(t) = v(t)i(t)$.

Utilizando la ley de Ohm $v(t) = Ri(t)$, la potencia instantánea puede expresarse en términos del voltaje $v(t)$ en los terminales del resistor:

$$p(t) = v(t) \frac{v(t)}{R} = \frac{v(t)^2}{R},$$

o en términos de la corriente $i(t)$ a través del resistor:

$$p(t) = [Ri(t)]i(t) = i(t)^2 R.$$

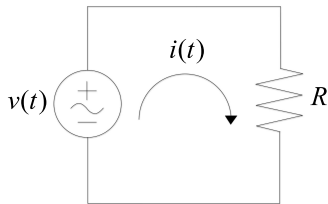


Figura 1.15. Circuito resistivo.

En ambos casos, la potencia instantánea es proporcional a la amplitud al cuadrado de la señal. Para un resistor $R = 1\Omega$, las ecuaciones toman la misma forma, i.e., $p(t) = v(t)^2 = i(t)^2$, por lo que la potencia instantánea de una señal $x(t)$ se define como:

$$p(t) = |x(t)|^2,$$

utilizando la magnitud de la señal para incluir el caso de señales complejas. Dado que en general no se conoce la naturaleza de la señal $x(t)$, la potencia instantánea $p(t)$ se expresa sin unidades.

1.5.2 ENERGÍA

La energía de una señal $x(t)$ se define como la integral de su potencia instantánea $|x(t)|^2$ y puede ser encontrada como:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

Definición 1.10. Una señal de energía es una señal para la cual la integral anterior converge, i.e., si se cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$.

Aunque en la práctica todas las señales tienen energía finita, en la teoría existen un sinnúmero de señales que no son de energía. La energía de una señal $x(t)$ puede ser definida sobre un intervalo acotado del tiempo, $[t_1, t_2]$, para lo cual se realiza:

$$E_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt.$$

1.5.3 POTENCIA PROMEDIO

La potencia promedio de una señal $x(t)$, en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, puede ser encontrada sumando la potencia instantánea sobre el intervalo y dividiendo por la duración del mismo. De acuerdo con esto, la potencia promedio $\bar{P}_{t_1, t_2}$ sobre un intervalo $[t_1, t_2]$ se define como:

$$\bar{P}_{t_1, t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt.$$

La potencia promedio $\bar{P}$ se calcula en el límite cuando la duración del intervalo tiende a infinito:

$$(1.2) \quad \bar{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt.$$

Definición 1.11. Una señal de potencia es una señal para la cual la potencia promedio $\bar{P}_{t_1, t_2}$ se mantiene finita, pero no cero, cuando la duración del intervalo de tiempo T tiende a infinito.

Propiedad 1.7. La potencia promedio de una señal periódica puede encontrarse sin evaluar el límite $T \rightarrow \infty$ de la ecuación (1.2). En este caso, se toma T como el periodo de la señal y se calcula la potencia promedio sobre cualquier intervalo de tiempo de duración T , es decir:

$$(1.3) \quad \bar{P} = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt.$$

Demostración. Para una señal periódica se cumple que $\int_a^{a+T} |x(t)|^2 dt = \int_0^T |x(t)|^2 dt$, para todo $a \in \mathbb{R}$, por tal motivo la ecuación (1.3) puede escribirse como:

$$\left(\frac{1}{2N+1} \right) \sum_{k=-N}^N \left[\frac{1}{T} \int_{-(2k-1)\frac{T}{2}}^{(2k+1)\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} \int_{-(2N+1)\frac{T}{2}}^{(2N+1)\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \quad \square$$

Ejemplo 1.16. Encuentre la potencia instantánea, energía y potencia promedio de $x(t) = 2e^{j3t}$.

Solución. La potencia instantánea es encontrada como:

$$\begin{aligned} p(t) &= |x(t)|^2 = |2e^{j3t}|^2 \\ &= |2|^2 |e^{j3t}|^2 = 2^2 = 4, \end{aligned}$$

siendo constante en el tiempo. Por otro lado, la energía se calcula como:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |2e^{j3t}|^2 dt = 4 \int_{-\infty}^{\infty} |e^{j3t}|^2 dt \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} dt = 8 \int_0^{\infty} dt = \infty, \end{aligned}$$

y la potencia promedio mediante:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{j3t}|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4}{T} \left[\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2} \right) \right] = 4. \end{aligned}$$

Por tal motivo, se puede concluir que $x(t)$ es una señal de potencia. $\square$

Ejemplo 1.17. Encuentre la potencia, energía y potencia promedio de la señal de la figura 1.16.

Solución. La potencia instantánea es encontrada como:

$$\begin{aligned} p(t) &= |x(t)|^2 = |e^{-2|t|}|^2 = (e^{-2|t|})^2 \\ &= e^{-4|t|} = \begin{cases} e^{4t} & \text{si } t < 0, \\ e^{-4t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

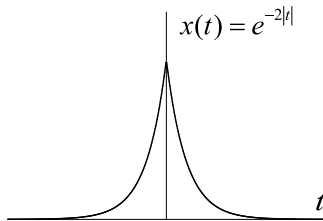


Figura 1.16.

la energía usando:

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2|t|})^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t|} dt \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{4t} dt + \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

y la potencia promedio mediante:

$$\begin{aligned}
\bar{P} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (e^{-2|t|})^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-4|t|} dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-4t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} e^{-4t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (1 - e^{-2T}) = 0.
\end{aligned}$$

Por tal motivo, $x(t)$ es una señal de energía. □

1.6 Señales singulares

1.6.1 ESCALÓN UNITARIO

La señal escalón unitario $u(t)$ se define como:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}.$$

El escalón unitario presenta una transición entre los valores 0 y 1 en el tiempo $t = 0$, como se ilustra en la figura 1.17. El valor de la señal en el tiempo de la transición no está definido. La señal escalón puede trasladarse y/o reflejarse en el tiempo modificando su argumento, caso en cual el signo de t indica el sentido del escalón. Un valor positivo de t corresponde a un escalón con transición de 0 a 1 mientras que un valor negativo de t corresponde a un escalón con transición de 1 a 0 (reflexión temporal). El tiempo en cual ocurre la transición es encontrado igualando a cero el argumento del escalón y despejando t , como se presenta en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.18. Grafique las siguientes señales escalones, ver figura 1.18.

- $u(-t)$: corresponde a un escalón que va de 1 a 0, figura 1.18(a). Igualando su argumento a cero se tiene $-t = 0$, por lo cual la transición ocurre en $t = 0$. El escalón se define como:

$$u(-t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t > 0. \end{cases}.$$

- $u(2-t)$: corresponde a un escalón que va de 1 a 0, figura 1.18(b). Igualando su argumento a cero se tiene $2-t = 0$, por lo cual la transición ocurre en $t = 2$. El escalón se define como:

$$u(2-t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 2, \\ 0 & \text{si } t > 2. \end{cases}.$$

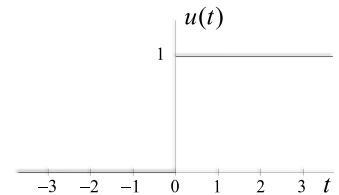


Figura 1.17. Señal escalón unitario

- $u(t+1)$: corresponde a un escalón que va de 0 a 1, figura 1.18(c). Igualando su argumento a cero se tiene $t+1=0$, por lo cual la transición ocurre en $t=-1$. El escalón se define como:

$$u(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1, \\ 1 & \text{si } t > -1. \end{cases}$$

En la figura 1.18 se presentan cada una de las gráficas de los escalones. $\square$

La señal escalón es comúnmente utilizada para modificar el soporte de otra señal. Por ejemplo, puede ser utilizada para anular una señal a partir de cierto tiempo o puede ser utilizada junto a otros escalones para seleccionar un intervalo de tiempo de interés. Considere el escalón $u(t-t_0)$ el cual presenta su transición en $t=t_0$, al multiplicar una señal $x(t)$ por el escalón se obtiene:

$$x(t)u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0, \\ x(t) & \text{si } t > t_0. \end{cases}$$

En la figura 1.19 se ilustra un ejemplo en el que el intervalo de tiempo $(-\infty, t_0)$ es removido del soporte de la señal, anulando todos sus valores sobre ese intervalo de tiempo.

Un par de escalones puede ser utilizado para acotar el soporte de la señal. Por ejemplo, la señal definida como $u(t-t_1) - u(t-t_2)$, con $t_2 > t_1$, puede ser utilizada para restringir el soporte de cualquier señal $x(t)$ al intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, dado que:

$$x(t)[u(t-t_1) - u(t-t_2)] = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1, \\ x(t) & \text{si } t_1 < t < t_2, \\ 0 & \text{si } t > t_2. \end{cases}$$

Ejemplo 1.19. Grafique la señal $t[u(t-1) - u(t-3)]$.

Solución. La señal $u(t-1) - u(t-3)$ corresponde a un pulso de ancho 2, como se ilustra en la figura 1.20. Al multiplicar la señal por el pulso se restringe su soporte al intervalo $[1, 3]$ como se presenta en la figura 1.21. $\square$

Observación 1.12. El pulso definido por $u(t-t_1) - u(t-t_2)$, con $t_2 > t_1$, puede ser obtenido de diferentes formas, entre ellas como $u(t-t_1)u(t_2-t)$ y como $u(t_2-t) - u(t_1-t)$.

1.6.2 IMPULSO O DELTA DE DIRAC

1.6.2.1 IMPULSO COMO UN FUNCIONAL

En sentido estricto, un impulso se define como un funcional, sin embargo, por necesidad y utilidad se realiza una definición que permite ver un impulso como una función y por ende como una señal.

Definición 1.12. Un funcional φ de un espacio vectorial V , con campo F , es una función que asigna a cada elemento de V un escalar, i.e., $\varphi : V \rightarrow F$.

Definición 1.13. El funcional impulso $\delta_{t_0}[\cdot]$, evalúa la señal $x(t)$ en el tiempo t_0 , i.e.,

$$(1.4) \quad \delta_{t_0}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0).$$

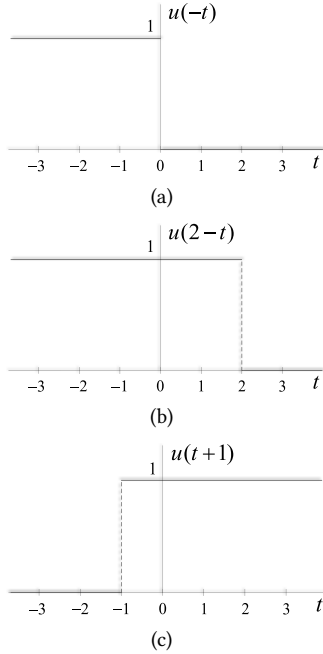


Figura 1.18. Diferentes señales escalones: (a) $u(-t)$, (b) $u(2-t)$ y (c) $u(t+1)$.

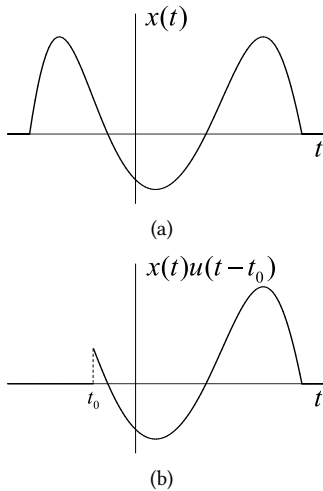


Figura 1.19. Modificación del soporte: (a) señal original y (b) señal modificada.

De acuerdo con la definición 1.13, se define la función impulso $\delta(t - t_0)$ como aquella que permite evaluar la señal $x(t)$ en el tiempo t_0 vía la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt$.

1.6.2.2 FUNCIÓN IMPULSO

La función impulso $\delta(t - t_0)$ se define como:

$$\delta(t) = \begin{cases} \neq 0 & \text{si } t = 0, \\ 0 & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

La función impulso $\delta(t - t_0)$ solo toma valor diferente de cero en el tiempo t_0 , como se ilustra en la figura 1.22 para $t = 0$. Por tal motivo, el impulso $\delta(t - t_0)$ vive o se localiza en el tiempo t_0 . En forma general, la ubicación de un impulso puede encontrarse igualando su argumento a cero, como se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.20. Grafique el impulso $\delta(t - 3)$.

Solución. Igualando el argumento del impulso a cero se tiene $t - 3 = 0$, por lo cual el impulso se encuentra ubicado en el tiempo $t = 3$. En la figura 1.23 se visualiza el impulso mencionado. $\square$

El valor 1 que acompaña al impulso se denomina peso o área del impulso, que puede encontrarse integrando el impulso como se describe a continuación.

Propiedad 1.8. Un impulso tiene área unitaria, i.e., $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = 1$.

Demostración. Si $x(t) = 1$ entonces la ecuación (1.4) llega a ser $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = 1$. $\square$

De acuerdo con esto el impulso $A\delta(t - t_0)$ tiene peso o área A , pues su integral da como resultado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t - t_0)dt = A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = A.$$

Observación 1.13. El peso o área del impulso no debe confundirse con el valor que toma el impulso en el tiempo en el cual vive, ya que por definición este valor es desconocido. El peso indica el resultado al realizar la integral del impulso.

Ejemplo 1.21. Evalúe la integral $\int_{-\infty}^{\infty} [3\delta(t + 2) - 2\delta(t) + \delta(t - 1)]dt$.

Solución. La función está compuesta por 3 impulsos de diferentes pesos, ubicados en los tiempos $t = -2$, $t = 0$ y $t = 1$, como se ilustra en la figura 1.24. Expresando la integral de la suma como la suma de las integrales se tiene:

$$3 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + 2)dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 1)dt = 3 - 2 + 1 = 2. \quad \square$$

Por definición, se establece que al multiplicar una señal $x(t)$ por un impulso ubicado en el tiempo $t = t_0$, se obtiene un impulso ubicado en $t = t_0$ con peso $x(t_0)$, es decir,

$$(1.5) \quad x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0).$$

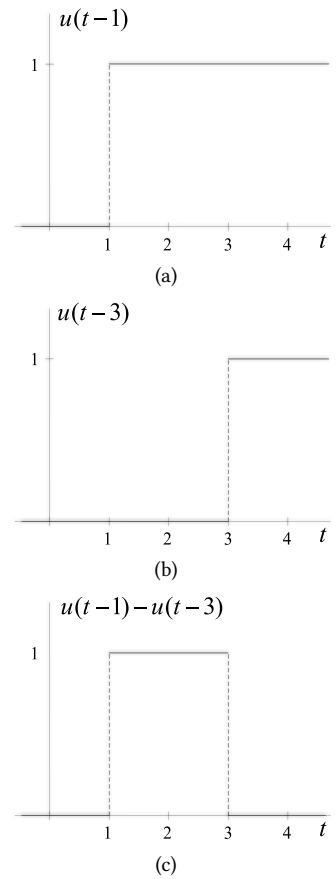


Figura 1.20. Otención de un pulso: (a) y (b) se usan para obtener (c).

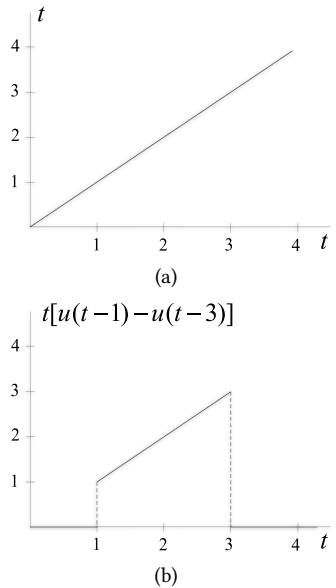


Figura 1.21. Modificación del soporte por medio de escalones: (a) señal original, de soporte no acotado, y (b) señal obtenida, de soporte compacto.

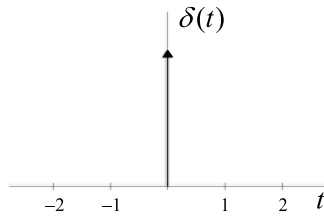


Figura 1.22. Función impulso ubicada en el tiempo $t = 0$.

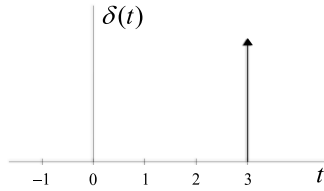


Figura 1.23. Función impulso ubicada en el $t = 3$.

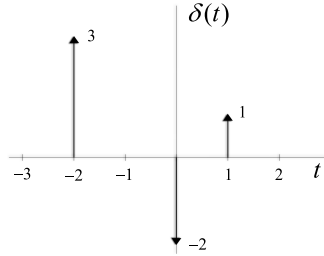


Figura 1.24. Señal formada por tres funciones impulso.

Así, al integrar la señal $x(t)$ por un impulso ubicado en el tiempo $t = t_0$, se evalúa la señal en el tiempo en el cual vive el impulso, satisfaciendo la ecuación (1.4), dado que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = x(t_0).$$

Ejemplo 1.22. Analice las siguientes integrales de señales por impulsos.

Solución. En cada caso se debe revisar la ubicación del impulso.

- Para $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\cos(t)}\delta(t-\pi)dt$ el impulso vive en $t = \pi$ y se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\cos(t)}\delta(t-\pi)dt = e^{\cos(\pi)} = e^{-1}.$$

- Para $\int_1^{\infty} e^{-t^2}\delta(t)dt$ impulso vive en $t = 0$, fuera del intervalo de integración, entonces:

$$\int_1^{\infty} e^{-t^2}\delta(t)dt = 0.$$

- Para $\int_1^{100} \log(t)\delta(t-10)dt = \log(10) = 1$ impulso vive en $t = 10$ y se tiene:

$$\int_1^{100} \log(t)\delta(t-10)dt = \log(10) = 1.$$

□

1.7 Espacios vectoriales de señales

Una definición menos rigurosa que la empleada en el apéndice B pero suficiente y más sencilla de verificar, puede ser utilizada para describir los espacios vectoriales de señales de interés.

Definición 1.14. Un espacio vectorial es una colección de objetos, llamados vectores, que pueden ser multiplicados por un escalar (escalados) y sumados.

La definición de espacios vectoriales de señales permite, entre otras cosas, asignar un tamaño a cada señal del espacio, calcular distancias entre señales y crear un marco que permita representar señales en términos de otras. Para la asignación del tamaño de una señal y para el cálculo de la distancia entre un par de señales se utiliza la norma $\|\cdot\|$ del espacio, definida como una función que asigna una medida a cada uno de los vectores del espacio.

Definición 1.15. Un espacio vectorial normado es aquel dotado con norma.

La representación de señales en un espacio vectorial requiere la proyección de una señal en otra en términos del producto interno, motivo por el cual, la representación de señales es posible para espacios vectoriales euclídeos.

Definición 1.16. Un espacio vectorial euclídeo es aquel dotado con producto interno.