Klassische Texte der Wissenschaft

Eberhard Knobloch *Hrsg.*

Gottfried Wilhelm Leibniz
De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae

Springer Spektrum

Klassische Texte der Wissenschaft

Begründet von
Olaf Breidbach (†)
Jürgen Jost

Herausgegeben von
Jürgen Jost
Armin Stock

http://www.springer.com/series/11468

Die Reihe bietet zentrale Publikationen der Wissenschaftsentwicklung der Mathematik, Naturwissenschaften, Psychologie und Medizin in sorgfältig edierten, detailliert kommentierten und kompetent interpretierten Neuausgaben. In informativer und leicht lesbarer Form erschließen die von renommierten WissenschaftlerInnen stammenden Kommentare den historischen und wissenschaftlichen Hintergrund der Werke und schaffen so eine verlässliche Grundlage für Seminare an Universitäten, Fachhochschulen und Schulen wie auch zu einer ersten Orientierung für am Thema Interessierte.

Eberhard Knobloch
Herausgeber

Gottfried Wilhelm Leibniz

De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis

Herausgegeben und mit einem Nachwort versehen von
Eberhard Knobloch

Aus dem Lateinischen übersetzt von
Otto Hamborg

Springer Spektrum

Herausgeber
Eberhard Knobloch
Technische Universität Berlin
Deutschland

Diese Ausgabe beruht auf dem Buch Gottfried Wilhelm Leibniz, De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis, kritisch herausgegeben und kommentiert von Eberhard Knobloch. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1993. (Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse Nr. 43).

Klassische Texte der Wissenschaft
ISBN 978-3-662-52802-0 ISBN 978-3-662-52803-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-52803-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Dr. Annika Denkert

Übersetzer: Otto Hamborg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Nonumque prematur in annum
Horaz, *Ars poetica* Vers 388

Horaz hatte Autoren empfohlen, ihre schriftlichen Erzeugnisse bis ins neunte Jahr unter Verschluss zu halten. Im Falle von Gottfried Wilhelm Leibniz dauerte es über fünfunddreißigmal solange, genauer gesagt 317 Jahre, bevor seine umfangreiche Schrift zur Grundlegung der Integrationstheorie und Infinitesimalgeometrie aus dem Jahr 1676 erscheinen konnte.

Martin Kneser setzte sich 1991 erfolgreich dafür ein, dass die von mir besorgte kritische Edition der längsten mathematischen Schrift, die Leibniz je verfasst hat, in den Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen 1993 erscheinen konnte. Leibnizens Werk fand schnell breites, bis heute zunehmendes Interesse bei Wissenschaftshistorikern, Philosophen und Mathematikern. 2004 erschien die französische Übersetzung von Marc Parmentier. 2007 stellte Otto Hamborg seine deutsche Übersetzung auf seiner homepage online, ohne dass dies in den deutschsprachigen Ländern angemessen rezipiert wurde.

Es ist das große Verdienst von Jürgen Jost, die von ihm herausgegebene Reihe Klassische Texte der Wissenschaft für eine zweisprachige lateinisch-deutsche Ausgabe dieser grundlegenden Schrift von Leibniz zur Verfügung gestellt zu haben. Dafür danken wir ihm sehr. Am Zustandekommen dieses Bandes waren mehrere Personen und Institutionen beteiligt, denen wir an dieser Stelle dafür ebenfalls herzlich danken möchten: Gabriele Hamborg schrieb die Datei, auf die wir uns für die vorliegende Edition stützen konnten. Der Verlag Vandenhoeck & Ruprecht war mit der Wiederverwendung der berichtigten Edition von 1993 einverstanden. Rainer Kleinrensing, Leiter der EDV des Leipziger Max-Planck-Instituts für Mathematik in den Naturwissenschaften, war der zuverlässige Ansprechpartner in technischen Fragen. Die Firma le-tex publishing services in Leipzig erfüllte alle ihr übermittelten Änderungs- und Korrekturwünsche mit großer Geduld und Sorgfalt. Annika Denkert war die verständnisvolle Ansprechpartnerin beim Springer Verlag.

Per aspera ad astra!

Eberhard Knobloch
April 2016

Inhaltsverzeichnis

De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis

Über die arithmetische Quadratur des Kreises, der Ellipse und der Hyperbel, von der ein Korollar die Trigonometrie ohne Tafeln ist

E. Knobloch, *Gottfried Wilhelm Leibniz*, Klassische Texte der Wissenschaft, DOI 10.1007/978-3-662-52803-7_1

Index notabiliorum:

Prop. 1. est lemma, cujus ope triangula ex puncto fixo A incipientia transmutantur in rectangula MNF rectae AMN per punctum fixum < - > transeunti normaliter applicata. fig. 1. 2.

Prop. 2. 3. 4. 5. sunt lemmata valde generalia circa differentiam quatenus ab excessu et defectu animo abstrahitur, et serviunt ad demonstrationes quadraturarum apagogicas per sola inscripta.

Prop. 6. est spinosissima in qua morose demonstratur certa quaedam spatia rectilinea gradiformia itemque polygona eousque continuari posse, ut inter se vel a curvis differant quantitate minore quavis data, quod ab aliis plerumque assumi solet. Praeteriri initio ejus lectio potest, servit tamen ad fundamenta totius Methodi indivisibilium firmissime jacienda.

Prop. 7. fructum continet omnium praecedentium, et ostendit, quomodo figurae curvilineae possint resolvi in triangula et quomodo si his triangulis aequalia exhibeantur rectangula, sector alterius figurae in [quadrilineum][1] alterius figurae transformari possit.

PROPOSITIO PRIMA

> Si per trianguli ABC tres angulos totidem transeant rectae parallelae interminatae AD. BE. CF, triangulum erit dimidium rectanguli, sub CE intervallo duarum parallelarum BE. CF, et sub AG portione tertiae AD, intercepta inter puncta, quibus ea angulo trianguli A, et opposito lateri BC, si opus est producto occurrit.

In BC productam agatur normalis AH[,] erunt triangula AHG. CEB similia[,] ergo ut AH ad AG ita CE ad CB, ac proinde rectangulum AG in CE aequale rectangulo AH in CB seu duplo triangulo ABC. Itaque triangulum ABC rectanguli sub AG et CE dimidium erit. Quod asserebatur.

[1] trilineum *L ändert Hrsg.*

Verzeichnis der bemerkenswerteren Sätze:

Satz 1 ist ein Lemma, mit dessen Hilfe von einem festen Punkt A beginnende Dreiecke in Rechtecke MNF verwandelt werden, die an einer durch den festen Punkt verlaufenden Geraden AMN senkrecht angefügt sind. Fig. 1. 2.

Die Sätze 2, 3, 4 und 5 sind sehr allgemeine Lemmata bezüglich der Differenz insofern, als vom Überschuss und Mangel gedanklich abgesehen wird, und sie dienen den indirekten Beweisen der Quadraturen nur durch Einbeschriebenes.

Der Satz 6 ist sehr spitzfindig; in ihm wird peinlich genau bewiesen, dass einige bestimmte geradlinige treppenförmige Flächen und ebenso Polygone soweit aneinander gereiht werden können, dass sie sich untereinander oder von den kurvenförmigen Flächen um eine Quantität unterscheiden, die kleiner ist als jede beliebige gegebene, was von anderen meistens angenommen zu werden pflegt. Seine Lektüre kann zu Anfang übergangen werden, jedoch dient er dazu, die Fundamente für die ganze Indivisibelnmethode am sichersten zu legen.

Satz 7 enthält den Ertrag aller Vorhergehenden und zeigt, wie krummlinige Figuren in Dreiecke aufgelöst werden können, und wie, wenn zu diesen Dreiecken gleiche Rechtecke dargestellt werden, der Sektor der einen Figur in eine vierlinige Fläche einer anderen Figur umgeformt werden kann.

ERSTER SATZ

> Wenn durch die drei Winkel eines Dreiecks ABC ebenso viele unbegrenzte parallele Geraden AD, BE, CF hindurchgehen, wird das Dreieck die Hälfte des Rechtecks sein, welches unter dem Intervall CE der zwei Parallelen BE, CF und unter dem Teil AG der Dritten AD liegt, der zwischen den Punkten eingeschlossen ist, bei denen diese den Winkel A des Dreiecks und die notfalls verlängerte gegenüberliegende Seite BC trifft.

Zur verlängerten Seite BC sei die Normale AH geführt, die Dreiecke AHG, CEB werden ähnlich sein, folglich wird wie AH zu AG so CE zu CB und daher das Rechteck $AG \cdot CE$ gleich dem Rechteck $AH \cdot CB$ oder dem doppelten Dreieck ABC sein. Deshalb wird das Dreieck ABC die Hälfte des Rechtecks unter AG und CE sein. Dieses wurde behauptet.

Scholium

Cum infinitis modis in eodem triangulo et parallelae duci, et intervalla eligi possint, patet omnia rectangula hujusmodi, (cum uni eidemque triangulo duplo aequentur) etiam fore aequalia inter se; ut rectangula CD in LB, CE in AG, Ce in Aγ; si idem in fig. 1. et 2. ponatur esse triangulum ABC.

Porro propositio, quam hic demonstravimus, lemma est, facile utique, et in proclivi positum, sed quod usus tamen habet late patentes: quoniam enim rectanguli et trianguli naturas in unum conjungit, utique foecundius esse debet, quam si non nisi alterutram contineret. Ejus enim auxilio, figurae curvilineae etiam in triangula utiliter resolvuntur, cum Cavalerius*[1] aliique doctissimi viri eas in parallelogramma tantum partiri soleant, generalem certe in triangula resolutionem, quod sciam, non adhibuerint. Sed haec clarius ex prop. 7. patebunt.

fig. 1

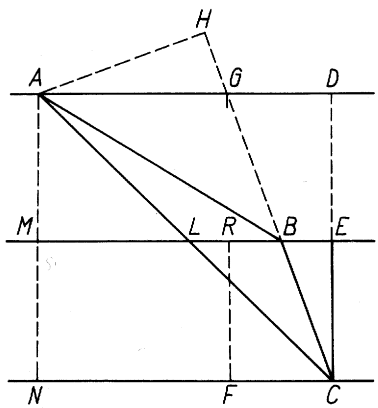
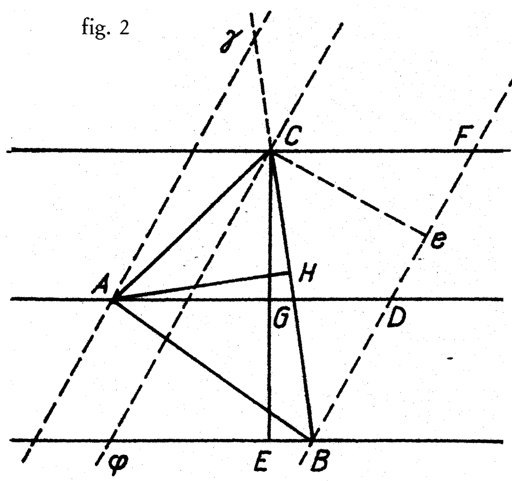


fig. 2



Beweis von Satz I, Variante

Sit triangulum ABC fig. 1. et 2. per cujus tres angulos transeant rectae parallelae interminatae, sive quantum satis est productae, AD, BE, CF. Duarum ex his (pro arbitrio assumtarum) BE, CF intervallum (seu distantia minima) sit CE, tertia ipsis parallela AD, quae occurrit triangulo in angulo A: latus huic angulo oppositum est CB, quod productum, si opus est, occurrit ipsi AD (etiam productae quantum opus,) in puncto G. Occurrit, inquam, quod sic probo: Si AD ipsi BC, producta productae, non occurrit, erunt parallelae: ipsi autem AD, parallelae sunt EB, FC, ergo et hae ipsi BC parallelae erunt; ergo eam non secabunt in punctis B, vel C. contra hypothesin. Occurrunt ergo sibi AD et BC in puncto G.

Scholium

Weil auf unendlich viele Arten bei demselben Dreieck sowohl Parallelen gezogen als auch Intervalle ausgewählt werden können, ist es offensichtlich, dass alle derartigen Rechtecke (weil sie ein- und demselben doppelten Dreieck gleich sind) auch untereinander gleich sein werden; wie die Rechtecke CD · LB, CE · AG, Ce · Aγ, wenn vorausgesetzt wird, dass das Dreieck ABC in Fig. 1 u. 2 dasselbe ist.

Ferner ist der Satz, den wir hier bewiesen haben, ein Lemma, das jedenfalls leicht und in leicht ausführbarer Form gegeben ist, das aber dennoch weitreichende Anwendungen hat: weil es nämlich die Naturen des Rechtecks und des Dreiecks zu Einem verbindet, muss es jedenfalls fruchtbarer sein, als wenn es nur eine von beiden enthielte. Mit seiner Hilfe nämlich werden sogar krummlinige Figuren in Dreiecke nutzbringend aufgelöst, während Cavalieri und andere hochgelehrte Männer diese nur in Parallelogramme zu teilen pflegen, eine allgemeine Auflösung in Dreiecke allerdings, soweit ich weiß, nicht angewendet haben. Aber diese Dinge werden sich deutlicher von Satz 7 her zeigen.

fig. 1

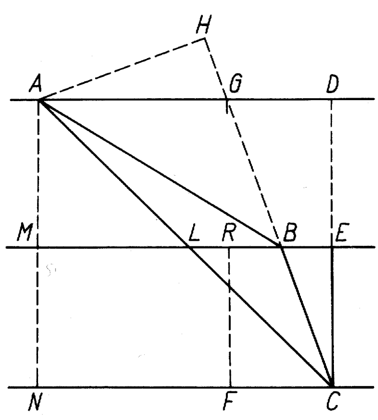
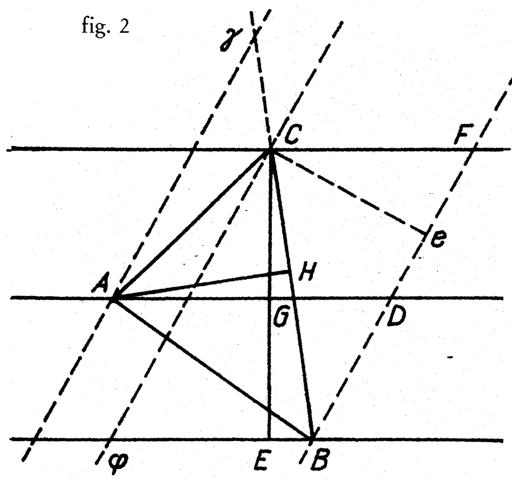


fig. 2



Beweis von Satz I, Variante

ABC, Fig. 1 und 2, sei ein Dreieck, durch dessen drei Winkel parallele Geraden AD, BE, CF gehen mögen, die unbegrenzt bzw. soweit verlängert sind, wie es hinreichend ist. CE sei das Intervall (bzw. der kleinste Abstand) der zwei (nach Belieben angenommenen) BE, CF von diesen, die zu ihnen parallele dritte sei AD, die das Dreieck im Punkt A trifft; die diesem Winkel gegenüberliegende Seite ist CB, die verlängert, wenn es nötig ist, AD (auch soweit verlängert, wie es nötig ist) im Punkt G trifft. Sie trifft, sage ich, was ich so beweise: Wenn AD BC, die verlängerte die verlängerte, nicht trifft, werden sie parallel sein. Aber zu AD sind EB, FC parallel, also werden auch diese zu BC parallel sein. Also werden sie die [Gerade BC] in den Punkten B oder C nicht schneiden, entgegen der Voraussetzung. Es treffen sich also AD und BC in einem Punkt G.

His positis, ajo triangulum ABC rectanguli sub AG et CE, sive rectanguli MNF (posita MN aequ. CE, et NF aequ. AG) dimidium esse. Ex puncto A ad rectam BC productam si opus est ducatur perpendicularis AH: manifestum est triangulum ABC rectanguli sub AH altitudine et BC basi dimidium esse, quare et rectanguli sub AG et CE dimidium erit, si ostendamus rectangulo sub AH et BC aequari rectangulum sub AG et CE. Id vero ita constabit: tres parallelae, AD, BE, CF ad ipsam BC angulum faciunt vel rectum vel obliquum. Si rectum, erit angulus CBE, item AGH, rectus; et coincidet punctum B cum puncto E, ac punctum H cum puncto G, ergo et rectangulum sub AG et CE, rectangulo sub AH et CB. Sin angulus quem parallelae faciunt ad ipsam BC, sit obliquus, habebimus duo triangula rectangula, AHG et CEB, ergo anguli in ipsis, praeter rectum, ut AGH, CBE, acuti sunt. Porro hi duo anguli efficiuntur ab eadem recta, (latere scilicet BC producto si opus,) ad duas parallelas AG, EB; duo autem anguli acuti ab eadem recta ad duas parallelas facti, aequales sunt. Ergo anguli HGA, EBC aequales sunt. Ergo triangula rectangula AHG, CEB sunt similia; eritque CE ad AH, ut CB ad AG, id est rectangulum CE in AG rectangulo AH in CB aequale erit. Rectanguli autem AH in CB, dimidium est triangulum ABC, ut diximus, et patet, ergo triangulum ABC etiam rectanguli CE in AG sive rectanguli MNF dimidium erit. Quod asserebatur.

Scholium von Satz I, Variante

Idem ad alia quoque theoremata Geometrica condenda, aut problemata non vulgaria resolvenda utile comperi, quale hoc est: invenire summam compositam ex areis omnium triangulorum super eadem basi constitutorum, verticesque habentium in punctis, quibus circuli concentrici quotcunque, rectas interminatas quotcunque in eodem circulorum centro concurrentes, secant. Quorum sexcentis facillime rectangulum aequale exhibebimus: Ut si invenienda sit summa triangulorum (fig. 3.) 1BC, 2BC, 3BC, 4BC, etc. usque ad 16BC quod ope lemmatis nostri nullo negotio invenietur. Idem est, si eadem semper servata basi, vertices sint in intersectionibus parallelarum quotcunque, occurrentium parallelis quotcunque, et summa quaeratur triangulorum (fig. 4.) 1BC, 2BC, 3BC etc. usque ad 9BC. Quae velut ab hoc loco aliena, ut verbis parcam, explicare, tunc supersedeo.

Unter dieser Voraussetzung behaupte ich, dass das Dreieck ABC die Hälfte des Rechtecks unter AG und CE bzw. des Rechtecks MNF ist (vorausgesetzt MN = CE und NF = AG). Vom Punkt A werde zur notfalls verlängerten Geraden BC die Senkrechte AH gezogen. Offenbar ist das Dreieck ABC die Hälfte des Rechtecks unter der Höhe AH und der Grundlinie BC, weshalb es auch die Hälfte des Rechtecks unter AG und CE sein wird, wenn wir zeigen, dass dem Rechteck unter AH und BC das Rechteck unter AG und CE gleich ist. Das wird aber auf folgende Weise feststehen: Die drei Parallelen AD, BE, CF bilden mit BC entweder einen rechten oder einen schiefen Winkel. Wenn einen rechten, wird der Winkel CBE, ebenso AGH, ein rechter sein, und es wird der Punkt B mit dem Punkt E und der Punkt H mit dem Punkt G zusammenfallen, also auch das Rechteck unter AG und CE mit dem Rechteck unter AH und CB. Wenn aber der Winkel, den die Parallelen mit BC bilden, ein schiefer sein sollte, werden wir zwei rechtwinklige Dreiecke, AHG und CEB, haben; also sind die Winkel in ihnen, außer dem rechten, wie AGH, CBE spitze. Ferner werden diese zwei Winkel von derselben Geraden (nämlich der notfalls verlängerten Seite BC) an den zwei Parallelen AG, EB erzeugt. Aber zwei spitze Winkel, die von derselben Geraden an zwei Parallelen gebildet sind, sind gleich. Also sind die Winkel HGA, EBC gleich. Also sind die rechtwinkligen Dreiecke AHG, CEB ähnlich; und CE wird sich zu AH wie CB zu AG verhalten, d. h., das Rechteck CE · AG wird gleich dem Rechteck AH · CB sein. Die Hälfte des Rechtecks AH · CB aber ist das Dreieck ABC, wie wir sagten und klar ist. Also wird das Dreieck ABC auch vom Rechteck CE · AG bzw. vom Rechteck MNF die Hälfte sein. Das wurde behauptet.

Scholium von Satz I, Variante

Dasselbe [Lemma] habe ich für das Aufstellen auch anderer geometrischer Theoreme oder für das Lösen nicht gewöhnlicher Aufgaben als nützlich erfahren. Eine derartige ist die folgende: das Auffinden der Summe, die aus den Flächeninhalten aller Dreiecke zusammengesetzt ist, die über derselben Grundlinie errichtet sind und Ecken in den Punkten haben, in denen beliebig viele konzentrische Kreise beliebig viele unbegrenzte Geraden schneiden, die in demselben Zentrum der Kreise zusammenlaufen. Wir werden sehr leicht ein Rechteck darstellen, das sechshundert von diesen gleich ist. Wenn z. B. die Summe der Dreiecke (Fig. 3) 1BC, 2BC, 3BC, 4BC, etc. bis zu 16BC gefunden werden soll, wird dieses mit Hilfe unseres Lemmas mühelos gefunden werden. Dasselbe ist der Fall, wenn unter ständiger Beibehaltung derselben Grundlinie die Ecken auf den Schnittpunkten beliebig vieler Parallelen liegen, die beliebig viele Parallelen treffen, und die Summe der Dreiecke (Fig. 4) 1BC, 2BC, 3BC bis zu 9BC gesucht wird. Ich erspare es mir dann, um mich kurz zu fassen, diese gleichsam hierher nicht gehörenden Dinge zu erklären.

PROPOSITIO II.

> Series differentiarum inter quantitates ordine perturbato dispositas, major est serie differentiarum inter quantitates easdem ordine naturali aut minus perturbato collocatas.

Ordinem naturalem voco, cum proceditur a minori ad majus tantum, vel a majori ad minus tantum: perturbatum cum modo ascenditur a minori ad majus, modo descenditur a majori ad minus.

Sint ordine naturali dispositae

Quantitates	A	A + B	A + B + C
Differentiae		B	C

Summa differentiarum, seu tota differentiarum series est, B + C. Sint rursus ordine perturbato dispositae

Quantitates	A + B	A	A + B + C
Differentiae		B	B + C

Summa seu series harum differentiarum, 2B + C major utique quam B + C series prior. Idemque in serie longiore saepius perturbata, saepius fiet. Ergo generaliter summa differentiarum in ordine perturbato major quam in naturali, aut minus, sive rarius, perturbato. Quod asserebatur.

Satz II.

> Eine Reihe von Differenzen zwischen Quantitäten, die sich in gestörter Ordnung befinden, ist größer, als eine Reihe von Differenzen zwischen denselben Quantitäten, die in natürlicher oder weniger gestörter Ordnung vorliegen.

Eine Ordnung nenne ich natürlich, wenn man nur vom Kleineren zum Größeren fortschreitet oder nur vom Größeren zum Kleineren, gestört, wenn man mal aufsteigt vom Kleineren zum Größeren, mal absteigt vom Größeren zum Kleineren.

Es mögen sich in natürlicher Ordnung befinden

die Quantitäten	A		A + B		A + B + C
die Differenzen		B		C	

Die Summe der Differenzen bzw. die ganze Reihe der Differenzen ist B + C. Es mögen sich andererseits in gestörter Ordnung befinden

die Quantitäten	A + B		A		A + B + C
die Differenzen		B		B + C	

Die Summe bzw. die Reihe dieser Differenzen 2B + C ist jedenfalls größer als die erste Reihe B + C. Und dasselbe wird öfter in einer längeren, öfter gestörten Reihe geschehen. Also ist allgemein die Summe der Differenzen in einer gestörten Ordnung größer als in einer natürlichen oder in einer weniger bzw. seltener gestörten. Das wurde behauptet.

PROPOSITIO III.

> In serie quotcunque quantitatum, differentia extremarum non potest esse major quam summa differentiarum intermediarum sive continuarum.

Sint quantitates	A	B	C	D	E	A	E
Differentiae	f	g	h	l		m	

Differentiae scilicet continuae inter A et B, B et C, C et D, etc. sint f. g. h. etc. At differentia extremarum A et E, sit m. Ajo m non esse majorem quam f + g + h + l.

(1) Nam termini, sive quantitates A. B. C. D. E. vel ordine naturali collocantur, vel perturbato. Si naturali, tunc constat m esse aequalem summae f + g + h + l. Nam si alterutra extremarum, ut A, posita sit minima, altera, ut E, maxima, tunc erit

series	A	B	C	D	E
eadem isti	A	A + f	A + f + g	A + f + g + h	A + f + g + h + l

et differentia inter A et E, nempe m, erit f + g + h + l. Eodem modo licet ratiocinari si E sit [minor] quam A, et D [minor] quam C[1], etc. tantum enim seriem invertere, sive literas capitales mutare opus est. Utroque ergo casu in ordine naturali, m, differentia inter A et E terminos maximum et minimum idem valebit quod f + g + h + l, summa differentiarum intermediarum sive continuarum; non est ergo m major quam haec summa.

(2) At si ordo quantitatum A. B. C. D. E. sit pertubatus, tunc major est series differentiarum, f + g + h + l, quam si esset naturalis, per prop. 2. major ergo quam differentia termini maximi et minimi, quia ut ostendimus artic. 1. hujus prop. ea differentia aequatur seriei differentiarum ordinis naturalis.

(3) Quoniam autem in casu situs perturbati summa differentiarum intermediarum, f + g + h + l. major est quam differentia terminorum duorum, qui inter hos A. B. C. D. E. maximi et minimi sunt, per artic. 2. erit et major quam differentia duorum aliorum, (quippe minus differentium, quam maximus et minimus), ergo generaliter erit major quam differentia duorum quorumcunque hujus seriei terminorum, ergo et major quam differentia inter A et E, seu major quam m. Ergo m minor erit quam f + g + h + l. Cum ergo in casu ordinis naturalis m sit huic summae aequalis per artic. 1. in casu ordinis perturbati minor, ut hic ostendimus; neutro casu major erit. Quod ostendendum sumseramus.

[1] E sit major quam A, et D major quam C *L ändert Hrsg.*

Satz III.

> In einer Reihe beliebig vieler Quantitäten kann die Differenz der äußersten nicht größer sein als die Summe der dazwischenliegenden bzw. unmittelbar aufeinander folgenden Differenzen.

Die Quantitäten seien A B C D E A E
die Differenzen f g h l m
Die unmittelbar aufeinander folgenden Differenzen zwischen A und B, B und C, C und D etc., seien nämlich f, g, h, etc. Aber die Differenz der äußersten A und E sei m. Ich behaupte, dass m nicht größer ist als f + g + h + l.

(1) Denn die Terme bzw. Quantitäten A, B, C, D, E befinden sich entweder in natürlicher oder in gestörter Ordnung. Wenn in einer natürlichen, dann steht fest, dass m gleich der Summe f + g + h + l ist. Wenn nämlich die eine der beiden äußersten, wie A, als kleinste vorausgesetzt ist, die andere, wie E, als größte, dann wird die Reihe
A B C D E
dieselbe sein wie jene:
A A + f A + f + g A + f + g + h A + f + g + h + l,
und die Differenz zwischen A und E, nämlich m, wird f + g + h + l sein. Auf dieselbe Art kann man rechnen, wenn E kleiner ist als A und D kleiner als C etc.; man braucht nämlich die Reihe nur umzudrehen bzw. die Großbuchstaben zu vertauschen. In jedem der beiden Fälle wird also in der natürlichen Ordnung m, die Differenz zwischen den Termen A und E, dem kleinsten und größten, dasselbe ergeben wie f + g + h + l, die Summe der dazwischenliegenden bzw. unmittelbar aufeinander folgenden Differenzen; also ist m nicht größer als diese Summe.

(2) Aber wenn die Ordnung der Quantitäten A, B, C, D, E gestört ist, dann ist die Reihe der Differenzen f + g + h + l größer, als wenn sie eine natürliche wäre, nach Satz 2, also größer als die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Term, weil, wie wir in Absatz 1 dieses Satzes gezeigt haben, diese Differenz gleich der Reihe der Differenzen in der natürlichen Ordnung ist.

(3) Da nun aber im Fall der gestörten Stellung die Summe der dazwischenliegenden Differenzen f + g + h + l größer ist als die Differenz der beiden Terme, die unter diesen A, B, C, D, E die größten und kleinsten sind, wird sie nach Absatz 2 auch größer sein als die Differenz zwischen zwei anderen, (die sich natürlich weniger unterscheiden als der größte und kleinste Term), also wird sie allgemein größer sein als die Differenz zwischen zwei beliebigen Termen dieser Reihe, also auch größer als die Differenz zwischen A und E bzw. größer als m. Also wird m kleiner sein als f + g + h + l. Weil also im Fall der natürlichen Ordnung m gleich dieser Summe ist nach Absatz 1, im Fall der gestörten Ordnung kleiner, wie wir hier gezeigt haben, wird sie in keinem der beiden Fälle größer sein. Dieses zu zeigen hatten wir uns vorgenommen.

Scholium

Hae duae propositiones, 2. et 3. generalius conceptae sunt, quam necesse erat ad institutum nostrum, neque enim ad propositiones sequentes opus habebam nisi casu trium quantitatum: A. B. C. malui tamen generaliter potius enuntiare et demonstrare; praesertim cum usque adeo universales sint, ut nullam omnino quantitatum varietatem morentur.

Scholium

Diese beiden Sätze, 2 und 3, sind allgemeiner gefasst worden, als es für unser Vorhaben notwendig war. Denn ich benötigte für die folgenden Sätze nur den Fall dreier Quantitäten A, B, C. Trotzdem wollte ich sie lieber allgemein aussprechen und beweisen, vor allem, weil sie dermaßen umfassend sind, dass sie sich an keiner noch so großen Verschiedenheit der Quantitäten stoßen.

PROPOSITIO IV.

> Differentia duarum quantitatum non potest esse major quam summa differentiarum tertiae a singulis.

Nempe sint duae quantitates A. E. quarum differentia f: Sit alia C, et differentia inter A et C sit b. inter E et C sit d. ajo f non posse excedere b + d. Reducantur in unam seriem:

Quantitates	A	C	E	A	E
Differentiae	b	d		f	

Ergo per prop. praeced. ipsa f differentia extremarum, non potest esse major quam summa differentiarum intermediarum seu continuarum, sive quam b + d. Quod ostendendum erat.

Satz IV.

> Die Differenz zweier Quantitäten kann nicht größer sein als die Summe der Differenzen zwischen einer dritten und jeder einzelnen.

Es seien nämlich die zwei Quantitäten A, E, deren Differenz f. Eine andere sei C, und die Differenz zwischen A und C sei b, zwischen E und C sei d. Ich behaupte, dass f nicht b + d übertreffen kann.

Es seien wieder in eine Reihe gebracht:

die Quantitäten	A	C	E	A	E
die Differenzen	b		d	f	

Nach dem vorhergehenden Satz kann also die Differenz f zwischen den äußersten Quantitäten nicht größer sein als die Summe der dazwischenliegenden bzw. unmittelbar aufeinander folgenden Differenzen oder als b + d. Das war zu zeigen.

PROPOSITIO V.

> Differentia duarum quantitatum minor est quam summa duarum aliarum quantitatum, quarum una unius, altera alterius priorum differentiam a tertia excedit.

Schema ita stabit [:]

Quantitates	A	C	E	Ergo ipsarum	A	E
Differentiae verae	b	d		differentia vera	f	
minores quam	g	h		minor quam	g + h	

Nimirum ajo f differentiam quantitatum duarum A. E. minorem esse quam g + h, summam duarum aliarum quantitatum, g. h. si g excedat b. differentiam ipsius A a tertia C, et h, excedat, d, differentiam ipsius E ab eadem tertia C. Nam g est major quam b, et h major quam d ex hypothesi, ergo g + h est major quam b + d, at f non est major quam b + d per prop. 4. Ergo f est minor quam g + h.

Scholium

Has propositiones quartam et quintam, etsi valde claras attente consideranti adjiciendas duxi tamen, tum quod servient ad facilem admodum per sola polygona inscripta sine circumscriptis demonstrationem apagogicam qua prop. 7. utar, tum quod operae pretium videatur ipsius per se differentiae proprietates considerare, quatenus ab excessu vel defectu animo abstrahitur; cum scilicet non exprimitur quaenam ex differentibus quantitatibus altera major minorve sit.

Satz V.

> Die Differenz zwischen zwei Quantitäten ist kleiner als die Summe zweier anderer Quantitäten, von denen die eine die Differenz zwischen der einen, die andere die Differenz zwischen der anderen von den ersteren und einer dritten übertrifft.

Das Schema wird so dastehen:

Quantitäten	A	C	E	Also von	A	E
wahre Differenzen	b	d		wahre Differenz	f	
kleiner als	g	h		kleiner als	g	+ h

Allerdings behaupte ich, dass die Differenz f zwischen den beiden Quantitäten A und E kleiner ist als g + h, die Summen der beiden anderen Quantitäten g und h, wenn g b, die Differenz zwischen A und einer dritten C, übertrifft, und h d, die Differenz zwischen E und derselben dritten C übertrifft. Aufgrund der Voraussetzung ist nämlich g größer als b und h größer als d, also ist g + h größer als b + d, aber nach Satz 4 ist f nicht größer als b + d. Also ist f kleiner als g + h.

Scholium

Diese Sätze, den vierten und fünften, auch wenn sie dem aufmerksamen Betrachter sehr klar sind, glaubte ich dennoch hinzufügen zu müssen, teils, weil sie zum äußerst bequemen indirekten Beweis, den ich in Satz 7 benutzen werde, durch einbeschriebene Polygone allein ohne umbeschriebene dienen werden, teils, weil es der Mühe wert erscheinen mag, die Eigenschaften der Differenz an sich insofern zu betrachten, als vom Überschuss und Mangel gedanklich abgesehen wird; d. h. wenn nicht ausgedrückt wird, welche der zwei sich unterscheidenden Quantitäten denn größer oder kleiner sei.

PROPOSITIO VI.

[Hujus propositionis lectio omitti potest, si quis in demonstranda prop. 7. summum rigorem non desideret. Ac satius erit eam praeteriri ab initio, reque tota intellecta tum demum legi, ne ejus scrupulositas fatigatam immature mentem a reliquis, longe amoenioribus, absterreat. Hoc unum enim tantum conficit duo spatia, quorum unum in alterum desinit si in infinitum inscribendo progrediare; etiam numero inscriptionum manente finito tantum, ad differentiam assignata quavis minorem sibi appropinquare. Quod plerumque etiam illi sumere pro confesso solent, qui severas demonstrationes afferre profitentur.][1]

Si a quolibet curvae cujusdam propositae 1C 2C etc. 4C (fig. 3.) puncto C. ad unum anguli cujusdam recti TAB in eodem cum ipsa plano positi, latus A 1B 2B etc. 4B. velut ad axem, ducantur ordinatae normales C B ad alterum latus A 1T 2T etc. 4T. tangentes CT et ex punctis occursus tangentium, T, agantur perpendiculares TD ad ordinatas respondentes et curva nova 1D 2D etc. 4D. per intersectiones harum perpendicularium et ordinatarum transeat. Rursus si quaelibet in curva priore designata puncta proxima, ut 1C et 2C vel etc. vel 3C et 4C, aliave quotcunque inter haec prima et ultima paria interjecta, rectis inscriptis sive chordis 1C 2C, etc. usque ad 3C 4C jungantur, quae productae CM eidem, cui tangentes anguli illius recti TAB. lateri AT. occurrant in punctis M. quae cadunt intra puncta T, ut 1M inter 1T et 2T, et 3M inter 3T et 4T. et ex his occursuum punctis M similiter perpendiculares 1M 1N 1P, aliaeque, usque ad 3M 3N 3P demittantur, quarum una quaelibet duorum punctorum ad M pertinentium ordinatis occurrat, ut 1M 1N 1P. (cujus punctum 1M, pertinet ad puncta curvae 1C. 2C.) occurrere debet, ordinatae 1C 1B in puncto 1N, et ordinatae 2C 2B in puncto 1P. idemque in caeteris fieri debet; unde hae perpendiculares ab ordinatis abscindent portiones quasdam inde ab axe sumtas, ut 1N 1B, [aliasve][2] usque ad 3B 3N.

> His ita praescriptis ac praeparatis, ajo in curvis puncta C inter 1C et 4C et puncta D inter 1D et 4D tam sibi vicina tantoque numero assumta intelligi posse, ut spatium rectilineum gradiforme

1N 1B 4B 3P 3N 2P 2N 1P 1N compositum ex rectangulis 1N 1B 2B 1P, aliisque usque ad 3N 3B 4B 3P quae sub ordinatarum si opus est productarum rescissis portionibus 1B 1N, aliisve usque ad 3B 3N, et sub intervallis 1B 2B, aliisve, usque ad 3B 4B. comprehenduntur;

---

[1] eckige Klammern von Leibniz
[2] aliave *L ändert Hrsg.*

Satz VI.

[Die Lektüre dieses Satzes kann ausgelassen werden, wenn man bei dem zu beweisenden Satz 7 keine größte Strenge verlangt. Und es wird besser sein, dass er zunächst übergangen und dann erst gelesen wird, wenn die ganze Sache verstanden worden ist, damit seine Übergenauigkeit den vorzeitig ermüdeten Geist nicht von den übrigen, bei weitem reizvolleren Dingen abschreckt. Dieses eine nämlich nur bewirkt er, dass zwei Flächen, von denen eine in die andere übergeht, wenn man bis ins Unendliche mit dem Einbeschreiben fortschreitet, sich einander nähern bis auf eine Differenz, die kleiner ist als eine beliebige zugewiesene, selbst wenn die Anzahl der Einschreibungen nur endlich bleibt. Dies pflegen auch meistens jene für anerkannt zu halten, die versprechen, strenge Beweise vorzubringen.]

Wenn von einem beliebigen Punkt C einer gewissen vorgegebenen Kurve 1C 2C etc. 4C (Fig. 3) zur einen Seite A 1B 2B etc. 4B, gleichsam zur Achse, eines gewissen in derselben Ebene wie sie gelegenen rechten Winkels TAB senkrechte Ordinaten C B, zur anderen Seite A 1T 2T etc. 4T Tangenten CT gezogen werden, und von den Treffpunkten T der Tangenten Lote TD zu den entsprechenden Ordinaten geführt werden und eine neue Kurve 1D 2D etc. 4D durch die Schnitte dieser Lote und Ordinaten geht; wenn andererseits beliebige auf der ersten Kurve bezeichnete nebeneinander liegende Punkte wie 1C und 2C oder etc. oder 3C und 4C oder andere, wie viele auch immer zwischen diesem ersten und letzten Paar liegen, durch einbeschriebene Geraden bzw. Sehnen 1C 2C etc. bis zu 3C 4C verbunden werden, die als Verlängerungen CM wie die Tangenten dieselbe Seite AT jenes rechten Winkels TAB in den Punkten M treffen, die zwischen die Punkte T wie 1M zwischen 1T und 2T und 3M zwischen 3T und 4T fallen, und wenn von diesen Treffpunkten M in ähnlicher Weise Lote 1M 1N 1P und andere bis 3M 3N 3P gefällt werden, von denen ein beliebiges die Ordinaten der zwei sich auf M beziehenden Punkte trifft, wie 1M 1N 1P (dessen Punkt 1M sich auf die Kurvenpunkte 1C, 2C bezieht) die Ordinate 1C 1B im Punkt 1N treffen soll und die Ordinate 2C 2B im Punkt 1P, und dasselbe in den übrigen Punkten geschehen soll, weshalb diese Lote von den Ordinaten gewisse Teile abschneiden werden, die von dort von der Achse ab genommen sind, wie 1N 1B oder andere bis 3B 3N.

> Nachdem dieses so vorgeschrieben und vorbereitet worden ist, behaupte ich, dass auf den Kurven Punkte C zwischen 1C und 4C und Punkte D zwischen 1D und 4D einander so nahe und in so großer Anzahl angenommen gedacht werden können, dass die geradlinige treppenförmige Fläche

1N 1B 4B 3P 3N 2P 2N 1P 1N, die aus den Rechtecken 1N 1B 2B 1P und anderen bis 3N 3B 4B 3P zusammengesetzt ist, die unter den abgeschnittenen Teilen 1B 1N der notfalls verlängerten Ordinaten oder anderen bis 3B 3N und den Intervallen 1B 2B oder anderen bis 3B 4B umschlossen werden,

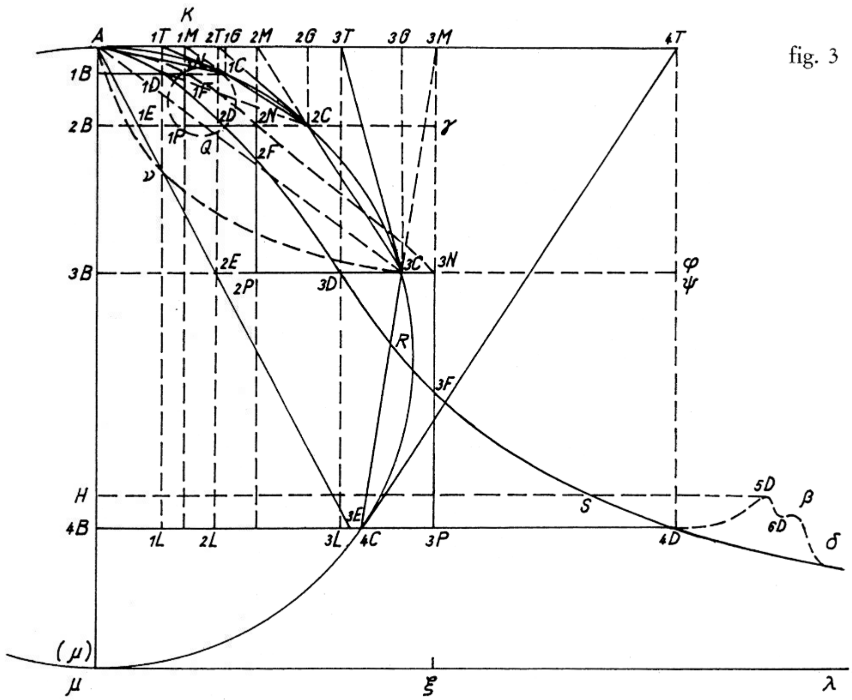


fig. 3

ab ipso spatio quadrilineo 1D 1B 4B 4D 3D etc. 1D (axe 1B 4B, ordinatis extremis 1B 1D, 4B 4D et curva nova 1D 2D etc. 4D comprehenso) differat quantitate minore quavis data. Et eadem demonstratio locum habet in quovis alio spatio mixtilineo et gradiformi continua rectarum ad quendam axem applicatione [formato][1]. Adeoque methodus indivisibilium, quae per summas linearum invenit areas spatiorum, pro demonstrata haberi potest. Requiritur autem curvas aut saltem partes in quas sunt sectae, esse ad easdem partes cavas, et carere punctis reversionum.

Definitio

Puncta Reversionum voco, in quibus coincidunt ordinata et tangens, seu ex quibus ordinata ad axem ducta curvam tangit: talia sunt, in curva 1D 2D etc. 4D 5D 6D, puncta 4D 5D 6D.

[1] formatis *L ändert Hrsg.*

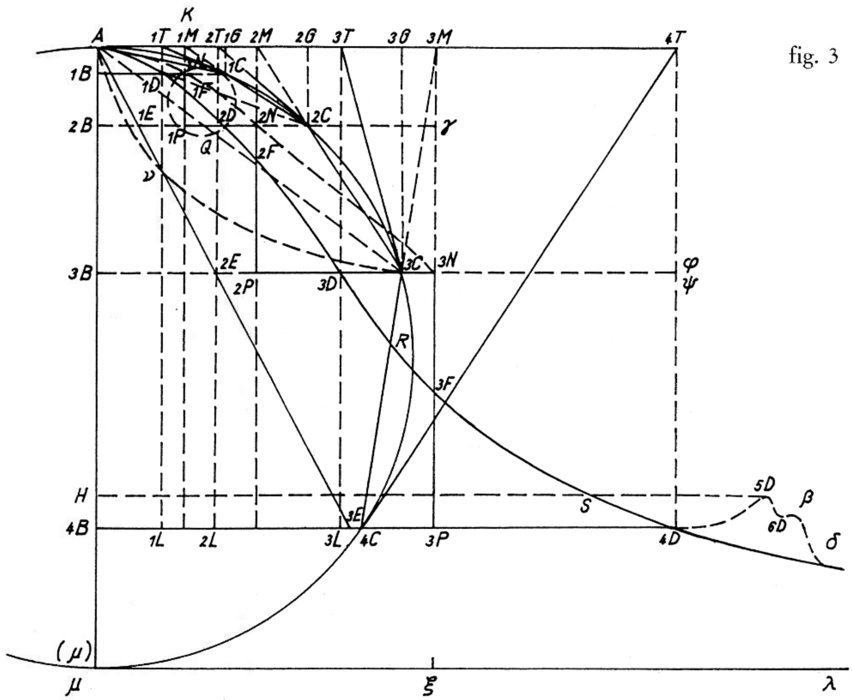


fig. 3

sich von der vierlinigen Fläche 1D 1B 4B 4D 3D etc. 1D selbst (die von der Achse 1B 4B, den äußersten Ordinaten 1B 1D, 4B 4D und der neuen Kurve 1D 2D etc. 4D umschlossen ist) um eine Quantität unterscheidet, die kleiner ist als eine beliebige gegebene. Und derselbe Beweis hat seine Gültigkeit bei jeder beliebigen anderen gemischtlinigen und treppenförmigen Fläche, die durch fortlaufende Anlegung von Geraden an eine gewisse Achse gebildet wird. Und deshalb kann die Indivisibelnmethode, die durch Summen von Linien die Flächeninhalte ermittelt, für bewiesen gehalten werden. Es ist aber erforderlich, dass die Kurven oder wenigstens die Teile, in die sie zerschnitten sind, zu denselben Seiten hin gewölbt sind und keine Reversionspunkte haben.

Definition

Reversionspunkte nenne ich diejenigen, in denen die Ordinate und Tangente zusammenfallen bzw. die von ihnen zur Achse gezogene Ordinate die Kurve berührt: Derartige sind auf quia in illis curva cum antea descenderet ab A versus 4B, nunc rursus ascendit versus A vel contra. Quae differunt a punctis flexuum contrariorum, quale est R, in quo tantum curva ex concava fit convexa, et contra atque ita non est ad easdem partes cava.

Porro Puncta Reversionum in areis spatiorum per summas rectarum ordinatarum inveniendis ideo nocent; quia ita fit, ut diversae ordinatae ejusdam curvae, ut HS, H 5D inter se, saltem ex parte, coincidant. Huic malo remedium est, ut tota curva in tot dividatur portiones, quot habet puncta reversionum, hoc pacto singulae portiones, ut 1D 2D etc. 4D. et 4D 5D, et 5D 6D, nulla habebunt reversionum puncta inter extrema sua interjecta; et in singulis locum habebit nostra propositio.

Caeterum, ut obiter dicam, ex his patet curvam eandem habere aut non habere puncta reversionum prout ad diversos axes refertur: quod secus est in punctis flexuum contrariorum.

Demonstratio propositionis VI.

(1) Punctum 1M positum est inter puncta 1T. 2T. ex constructione. Ergo et recta 1M 1N 1P cadit inter rectas 1T 1D, 2T 2D, seu recta 1N 1P de parallela 1B 1N ad parallelam 2B 2D perveniens cadet intra duo puncta in his diversis parallelis posita, 1D, 2D, ita ut a puncto 1D ad punctum 2D nulla possit duci linea, recta vel curva quin vel rectam 1N 1P secet alicubi in F, vel supra infrave duas parallelas 1B 1N, 2B 2D evagetur, adeoque modo ascendat, modo descendat, ut curva 1DQ 2D, descendens ab 1D ad Q et rursus ascendens a Q ad 2D. vel curva 1DK 2D, ascendens ab 1D ad K, et descendens a K ad 2D; quae adeo habebit puncta reversionum, Q vel K. Sed talia puncta non habet curva aut ejus portio 1D 2D, ex hypothesi; ergo rectam 1N 1P secabit in 1F. Eodem modo alia portio 2D 3D rectam 2N 2P secabit in 2F. etc.

(2) Producta jam intelligatur 1T 1D, dum ordinatae sequenti 2B 2C occurrat in 1E. eodem mode 2T 2D 2E ordinatae sequenti 3B 2E 3C occurrat in 2E. His positis ajo primum ipso rectangulo quod vocabo complementale 1D 1E 2D. minorem esse differentiam inter unum Quadrilineum partiale 1D 1B 2B 2D 1D, et inter unum rectangulum ei respondens 1N 1B 2B 1P, quod quia cum caeteris similibus spatium gradiforme componit, vocabo Rectangulum Elementare, quibus vocabulis tantum in hujus propositionis demonstratione utar, ut compendiosius loqui liceat. Assertum ita probo: ab utroque differentium, Quadrilineo partiali et rectangulo elementari auferatur quod utrique commune est, scilicet (quoniam

der Kurve 1D 2D etc. 4D 5D 6D die Punkte 4D 5D 6D, weil bei jenen die Kurve, während sie vorher von A in Richtung 4B abstieg, nun dagegen in Richtung A aufsteigt oder umgekehrt. Diese unterscheiden sich von den Wendepunkten, wie R einer ist, in dem nur aus einer konkaven Kurve eine konvexe wird und umgekehrt, und auf diese Weise nicht zu derselben Seite hin gewölbt ist.

Ferner sind Reversionspunkte bei der Ermittlung der Flächeninhalte durch Summen von geraden Ordinaten deshalb hinderlich, weil es so dazu kommt, dass verschiedene Ordinaten derselben Kurve, wie HS, H 5D, wenigstens teilweise, zusammenfallen. Gegen dieses Übel gibt es das Hilfsmittel, dass die Kurve in so viele Stücke geteilt wird, wie sie Reversionspunkte hat. Unter dieser Voraussetzung werden die einzelnen Stücke wie 1D 2D etc. 4D und 4D 5D und 5D 6D keine Reversionspunkte haben, die zwischen ihren äußersten Punkten liegen; und in den einzelnen Abschnitten wird unser Satz seine Gültigkeit haben.

Übrigens, um es nebenbei zu sagen, ist aus diesen Bemerkungen klar, dass dieselbe Kurve Reversionspunkte hat oder nicht hat, je nachdem, wie sie auf die verschiedenen Achsen bezogen wird; das ist anders bei den Wendepunkten.

Beweis von Satz 6

(1) Der Punkt 1M liegt nach der Konstruktion zwischen den Punkten 1T, 2T. Also fällt auch die Gerade 1M 1N 1P zwischen die Geraden 1T 1D und 2T 2D, bzw. die Gerade 1N 1P, die sich von der Parallelen 1B 1N zur Parallelen 2B 2D erstreckt, wird zwischen die zwei Punkte 1D, 2D fallen, die auf diesen verschiedenen Parallelen liegen, so dass von Punkt 1D zum Punkt 2D keine gerade oder gekrümmte Linie gezogen werden kann, ohne dass sie entweder die Gerade 1N 1P irgendwo in F schneidet, oder oberhalb oder unterhalb die zwei Parallelen 1B 1N, 2B 2D überschreitet und deshalb mal aufsteigt, mal absteigt wie die Kurve 1DQ 2D, die von 1D nach Q hin absteigt und dagegen von Q nach 2D hin aufsteigt, oder die Kurve 1DK 2D, die von 1D nach K hin aufsteigt und von K nach 2D hin absteigt; deshalb wird sie Reversionspunkte haben, Q oder K. Aber derartige Punkte hat die Kurve oder ihr Teil 1D 2D nicht nach Voraussetzung; also wird sie die Gerade 1N 1P in 1F schneiden. In derselben Weise wird der andere Teil 2D 3D die Gerade 2N 2P in 2F schneiden etc.

(2) Nun denke man sich die Gerade 1T 1D verlängert, bis sie auf die folgende Ordinate 2B 2C in 1E trifft, und in derselben Weise treffe 2T 2D 2E auf die folgende Ordinate 3B 2E 3C in 2E. Unter diesen Voraussetzungen behaupte ich zuerst: Kleiner als das Rechteck 1D 1E 2D selbst, das ich komplementär nennen werde, ist die Differenz zwischen einer vierlinigen Teilfläche 1D 1B 2B 2D 1D und einem ihr entsprechenden Rechteck 1N 1B 2B 1P, das ich, weil es mit den übrigen ähnlichen Flächen eine treppenförmige Fläche bildet, elementares Rechteck nennen werde, – diese Bezeichnungen werde ich nur in dem Beweis dieses Satzes benutzen, damit man kürzer reden kann. Die Behauptung beweise ich folgendermaßen: von jeder der beiden sich unterscheidenden Flächen, der vierlinigen Teilfläche und dem elementaren Rechteck, wird abgezogen, was beiden