Perplex bei Polynomen? Kurvendiskussion = Achterbahn?
**Dieses Buch führt Sie ans Ziel!**

# Analysis II

## FÜR DUMMIES®

Mach Dich schlau

### Auf einen Blick:

- Einführung in die Integration
- Integration für Fortgeschrittene
- Das Wichtigste zur Mehrdimensionalen Analysis

Mark Zegarelli

# *Analysis II für Dummies – Schummelseite*

## *Die Riemann-Summenformal für das bestimmte Integral*

Die Riemann-Summenformel stellt eine präzise Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert einer unendlichen Reihe bereit:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

## *Drei wichtige Integrationsregeln*

Die Summenregel für die Integration besagt, dass lange Ausdrücke Term für Term integriert werden können. Hier die formale Regelung:

$$\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Die Faktorregel für die Integration besagt, dass eine Konstante vor dem Integrieren aus dem Integral herausgezogen werden kann. Hier in Symbolen:

$$\int nf(x)\,dx = n\int f(x)\,dx$$

Die Potenzregel für die Integration gestattet Ihnen, jede reelle Potenz von *x* (außer – 1) zu integrieren. Hier die formale Darstellung der Potenzregel:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{dabei gilt } n \neq -1$$

# *Die 17 grundlegenden Integrale basierend auf Anti-Ableitungen*

| Ableitung | Integral (Anti-Ableitung) | Ableitung | Integral (Anti-Ableitung) |
|---|---|---|---|
| $\frac{d}{dx}n=0$ | $\int 0dx=C$ | $\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x$ | $\int \sec x\tan x dx=\sec x+C$ |
| $\frac{d}{dx}x=1$ | $\int 1dx=x+C$ | $\frac{d}{dx}\csc x=-\csc x\cot x$ | $\int \csc x\cot x dx=-\csc x+C$ |
| $\frac{d}{dx}e^x=e^x$ | $\int e^x=e^x+C$ | $\frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$ |
| $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$ | $\int \frac{1}{x}dx=\ln x+C$ | $\frac{d}{dx}\arccos x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arccos x+C$ |
| $\frac{d}{dx}n^x=n^x\ln n$ | $\int n^x dx=\frac{n^x}{\ln n}+C$ | $\frac{d}{dx}\arctan x=\frac{1}{1+x^2}$ | $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$ |
| $\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$ | $\int \cos x dx=\sin x+C$ | $\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x=-\frac{1}{1+x^2}$ | $\int -\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arccot} x+C$ |
| $\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$ | $\int \sin x dx=-\cos x+C$ | $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ | $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\operatorname{arcsec} x+C$ |
| $\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$ | $\int \sec^2 x dx=\tan x+C$ | $\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc} x=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ | $\int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\operatorname{arccsc} x+C$ |
| $\frac{d}{dx}\cot x=-\csc^2 x$ | $\int \csc^2 x dx=-\cot x+C$ | | |

# *Integrale durch Variablensubstitution lösen*

Um ein Integral mittels Variablensubstitution auszuwerten, gehen Sie wie folgt vor:

1. **Deklarieren Sie eine Variable *u* und setzen Sie sie auf einen algebraischen Ausdruck, der im Integral vorkommt. Anschließend setzen Sie *u* für diesen Ausdruck im Integral ein.**

2. **Differenzieren Sie *u*, um $\frac{du}{dx}$ zu bestimmen, und isolieren Sie dann alle *x*-Variablen auf einer Seite des Gleichheitszeichens.**

3. **Nehmen Sie eine weitere Substitution vor, um *dx* und alle**

**andere Vorkommen von *x* im Integral auf einen Ausdruck mit *u* zu setzen.**

4. **Integrieren Sie mit *u* als neuer Integrationsvariablen.**
5. **Drücken Sie die Lösung unter Verwendung von *x* aus.**

***Partielle Integration***

Um ein Integral unter Verwendung der partiellen Integration auszuwerten, gehen Sie wie folgt vor:

1. **Zerlegen Sie das gesamte Integral (einschließlich *dx*) in zwei Faktoren.**
2. **Setzen Sie den Faktor ohne *dx* gleich *u* und den Faktor mit *dx* gleich *dv*.**
3. **Differenzieren Sie *u*, um *du* zu bestimmen, und integrieren Sie *dv*, um *v* zu bestimmen.**
4. **Wenden Sie die Formel $\int udu = uv - \int vdu$ an.**
5. **Berechnen Sie die rechte Seite dieser Gleichung, um das Integral zu lösen.**

*Partielle Integration mit Hilfe der DI-agonal-Methode*

Die partielle Integration ist praktisch für die Integration von Funktionen, bei denen es sich um Produkte von zwei kleineren Funktionen handelt (Weitere Informationen über die partielle Integration finden Sie in Kapitel 6.) Merken Sie sich die folgende grundlegende Tabelle für die partielle Integration unter Verwendung der DI-agonal-Methode:

| | I |
|---|---|
| D | |
| + | |
| – | |

### *Zwei Abkürzungen für die Substitution*

Einige Integrale zusammengesetzter Funktionen $f(g(x))$ können ganz schnell gelöst werden. Sie sollten die folgenden beiden Integraltypen erkennen:

### *Zusammengesetzte Funktionen, wobei die innere Funktion ax ist*

Diese Abkürzung funktioniert für zusammengesetzte Funktionen $f(g(x))$, für die gilt:

- Sie wissen, wie die äußere Funktion $f$ zu integrieren ist.
- Die innere Funktion $g(x)$ hat die Form $ax$ – d.h. sie wird zu einer Konstanten differenziert.

Beispiel:

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C$$

$$\int \tan 4x\,dx = \frac{1}{4}\sec^2 4x + C$$

### ***Zusammengesetzte Funktionen, wobei die innere Funktion ax + b ist***

Diese Abkürzung funktioniert für zusammengesetzte Funktionen *f*(*g*(*x*)), für die gilt:

- Sie wissen, wie die äußere Funktion *f* zu integrieren ist.
- Die innere Funktion *g*(*x*) hat die Form *ax* + *b* – d.h. sie wird zu einer Konstanten differenziert.

Beispiel:

$$\int \ln|2x+5|\,dx = \frac{1}{2|2x+5|} + C$$

$$\int \sin(3x-2) = \frac{1}{3}\cos(3x-2) + C$$

$$\int \sec^2 4x\,dx = \frac{1}{4}\tan 4x + C$$

*Mark Zegarelli*

# *Analysis II für Dummies*

*Übersetzung aus dem Amerikanischen von*
*Judith Muhr*

*Fachkorrektur von Katrin Jost*

WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

1. Auflage 2009

Korrektur: Enrico Barz
ISBN: 978-3-527-70509-2
ePDF ISBN: 978-3-527-65799-5
ePub ISBN: 978-3-527-65798-8
mobi ISBN: 978-3-527-65800-8

# Analysis II für Dummies

# Inhaltsverzeichnis


*Analysis II für Dummies – Schummelseite*
Titel
Impressum
*Einführung*
- *Zu diesem Buch*
- *Konventionen in diesem Buch*
- *Was Sie nicht lesen müssen*
- *Falsche Voraussetzungen*
- *Wie dieses Buch aufgebaut ist*
  - *Teil I: Einführung der Integration*
  - *Teil II: Unbestimmte Integrale*
  - *Teil III: Fortgeschrittene Integration*
  - *Teil IV: Unendliche Reihen*
  - *Teil V: Fortgeschrittene Themen*
  - *Teil VI: Der Teil der Zehn*
- *Symbole in diesem Buch*
- *Wie es weitergeht*

*Teil I - Einführung in die Integration*

- *1 - Ein flächendeckender Ansatz für das Flächenproblem*
  - *Es geht um die Fläche!*
  - *Vergleich der klassischen und der analytischen Geometrie*
    - *Ein neuer Studienbereich*
    - *Verallgemeinerung des Flächenproblems*

Das bestimmte Integral liefert bestimmte Antworten
Aufgeschnitten
Annäherung an ein schwieriges Problem mit Hilfe von Rechtecken
Eine Formel für die Flächenbestimmung aufbauen
Definition des Unbestimmten
Mit der Integration Aufgaben lösen
Ganz einfach: Die Fläche zwischen Kurven bestimmen
Die lange und kurvige Straße
Drehkörper
Unendliche Reihen
Folgen und Reihen unterscheiden
Reihen auswerten
Konvergente und divergente Reihen erkennen
Fortschreiten in die fortgeschrittene Mathematik
Mannigfaltige Analysis
Differentialgleichungen
Fourier-Analyse
Numerische Analyse
2 - Weg mit den Geistern der Vergangenheit: Ein Überblick über die Grundlagen der Analysis und Analysis I
Vergessen aber immer präsent: Ein Überblick über die Grundlagen der Analysis
Fakten über Fakultäten
Polynome aufpolieren
Potenzial durch Potenzen (Exponenten)
Die trigonometrische Notation
Winkel mit dem Bogenmaß vereinen
Allgemeine Funktionen graphisch darstellen

        - *Asymptoten*
        - *Transformation stetiger Funktionen*
        - *Einige wichtige trigonometrische Beziehungen identifizieren*
        - *Polarkoordinaten*
        - *Zusammenfassendes über die Sigma-Notation*
    - *Jüngste Erinnerungen: Ein Rückblick auf Analysis I*
        - *Grenzen kennen*
        - *Steigungen mit Hilfe von Ableitungen bestimmen*
        - *Die Grenzwertformel für Ableitungen*
        - *Zwei Notationen für Ableitungen*
        - *Die Differentiation verstehen*
    - *Mit der Regel von L' Hospital Grenzwerte bestimmen*
        - *Bestimmte und unbestimmte Formen von Grenzwerten verstehen*
        - *Die Regel von L'Hospital – Einführung*
        - *Alternative unbestimmte Formen*
- *3 - Vom Bestimmten zum Unbestimmten: Das unbestimmte Integral (Stammfunktion )*
    - *Eine Annäherung an die Integration*
        - *Drei Wege, Fläche mit Hilfe von Rechtecken anzunähern*
        - *Der Schlupffaktor*
        - *Zwei weitere Methoden, Fläche anzunähern*
    - *Summenformeln im Überblick*
        - *Die Summenformel für Aufzählungen*
        - *Die Summenformel für Quadratzahlen*
        - *Die Summenformel für Kubikzahlen*
    - *Schlimmer geht's immer: Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe der Riemann-Summenformel*

*Die Integrationsgrenzen einsetzen*
*Die Funktion als Summe mit i und n ausdrücken*
*Die Summe berechnen*
*Das Problem mit einer Summenformel lösen*
*Den Grenzwert berechnen*
*Licht am Ende des Tunnels: Der Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung (HDI)*
*Den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verstehen*
*Was hat die Steigung damit zu tun?*
*Einführung in die Flächenfunktion*
*Mathematische Verknüpfung von Steigung und Fläche*
*Eine dunkle Seite des Hauptsatzes der Differential-und Integralrechnung*
*Ihr neuer bester Freund: Das unbestimmte Integral (Stammfunktion)*
*Einführung der Anti-Differentiation*
*Flächenprobleme ohne die Riemann-Summenformel lösen*
*Vorzeichenbehaftete Fläche verstehen*
*Unterscheidung bestimmter und unbestimmter Integrale*

*Teil II - Unbestimmte Integrale*

*4 - Integration aus der Tüte: Einfach nur Wasser hinzufügen (und C)*
*Grundlegende Integrale berechnen*
*Die 17 grundlegenden Anti -Ableitungen für die Integration verwenden*
*Drei wichtige Integrationsregeln*

*Und was ist mit den anderen Regeln passiert?*
*Berechnung schwierigerer Integrale*
*Polynome integrieren*
*Rationale Ausdrücke integrieren*
*Mit Hilfe von Beziehungen trigonometrische Funktionen integrieren*
*Integrierbarkeit verstehen*
*Die beiden Täuschungsmanöver der Integrierbarkeit*
*Was bedeutet Integrierbarkeit eigentlich?*
*5 - Schneller Wechsel: Variablensubstitution*
*Anwendung der Variablensubstitution*
*Das Integral verschachtelter Funktionen bestimmen*
*Das Integral eines Produkts bestimmen*
*Integration einer Funktion, die mit einer Menge verschachtelter Funktionen multipliziert wird*
*Erkennen, wann die Substitution anzuwenden ist*
*Verschachtelte Funktionen integrieren*
*Eine Abkürzung für verschachtelte Funktionen*
*Substitution, wenn ein Teil einer Funktion zu dem anderen Teil differenziert wird*
*Mit Hilfe der Substitution bestimmte Integrale berechnen*
*6 - Partielle Integration*
*Partielle Integration – Einführung*
*Umkehr der Produktregel*
*Wissen, wie die partielle Integration durchgeführt wird*
*Wissen, wann eine partielle Integration angebracht ist*

Partielle Integration mit der DI-agonal-Methode
Die DI-agonal-Tabelle
Anwendung der DI-agonal-Methode
7 - Trigonometrische Substitution: Kennen Sie alle Dreiecke?
Die sechs trigonometrischen Funktionen integrieren
Potenzen von Sinus und Kosinus integrieren
Ungerade Potenzen von Sinus und Kosinus
Gerade Potenzen von Sinus und Kosinus
Potenzen von Tangens und Sekans integrieren
Gerade Potenzen von Sekans mit Tangens
Ungerade Potenzen von Tangens mit Sekans
Ungerade Potenzen von Tangens ohne Sekans
Gerade Potenzen von Tangens ohne Sekans
Gerade Potenzen von Sekans ohne Tangens
Ungerade Potenzen von Sekans ohne Tangens
Gerade Potenzen des Tanges mit ungeraden Potenzen des Sekans
Potenzen von Kotangens und Kosekans integrieren
Integration seltsamer Kombinationen trigonometrischer Funktionen
Funktionen mit Hilfe von Beziehungen umformen
Anwendung der trigonometrischen Substitution
Drei Fälle für die trigonometrische Substitution unterscheiden

- Die drei Fälle integrieren
- Wissen, wann eine trigonometrische Substitution zu vermeiden ist

8 - Wenn sonst nichts mehr geht: Integration durch Partialbrüche
- Seltsam aber wahr: Partialbrüche verstehen
  - Partialbrüche genauer betrachtet
  - Partialbrüche für rationale Ausdrücke verwenden
- Integrale mit Hilfe von Partialbrüchen lösen
  - Einrichtung von Partialbrüchen abhängig von der Situation
- Das ABC der Unbekannten
  - Partialbrüche integrieren
- Unechte rationale Ausdrücke integrieren
  - Echte und unechte rationale Ausdrücke unterscheiden
  - Zurück zur Polynomdivision
  - Ein Beispiel

## Teil III - Integration für Fortgeschrittene

9 - Flächendeckend Flächenprobleme lösen
- Machen wir zwei daraus
- Uneigentliche Integrale
  - Es wird horizontal
  - In die Vertikale!
- Flächenprobleme mit mehreren Funktionen lösen
  - Die Fläche unter mehr als einer Funktion finden
  - Die Fläche zwischen zwei Funktionen bestimmen
  - Die Suche nach dem Zeichen

Vorzeichenlose Fläche zwischen Kurven mit Hilfe eines schnellen Tricks bestimmen
Der Mittelwertsatz der Integralrechnung
Bogenlängen berechnen
10 - Volumen den ganzen Tag: Mit Analysis 3D-Aufgaben lösen
Schneiden Sie sich den Weg frei!
Das Volumen eines Körpers mit kongruenten Querschnitten bestimmen
Das Volumen eines Körpers mit ähnlichen Querschnitten bestimmen
Das Volumen einer Pyramide bestimmen
Das Volumen eines unregelmäßigen Körpers bestimmen
Ein Problem auf die Seite gelegt
Zwei revolutionäre Probleme
Ihr Verständnis für Rotationskörper verfestigen
Die Rotationsfläche bestimmen
Den Abstand ermitteln
Lassen Sie sich einwickeln!
Das Etikett einer Suppendose entfernen und messen
Anwendung der Mantelflächenmethode
Wissen, wann und wie 3D-Aufgaben zu lösen sind

Teil IV - Unendliche Reihen

11 - Folgen und Reihen
Unendliche Folgen
Notationen für Folgen
Konvergente und divergente Folgen
Unendliche Reihen
Die Sigma-Notation

Sigma-Notation in erweiterter Form
Mehrere Methoden für die Sigma-Notation
Die Faktorregel für Reihen
Die Summenregel für Reihen
Verknüpfung einer Reihe mit ihren zwei verwandten Folgen
Eine Reihe und ihre definierende Folge
Eine Reihe und ihre Partialsummenfolgen
Geometrische Reihen und P-Reihen erkennen
Geometrische Reihen
Die p-Reihe
12 - Wohin führt das Ganze? Konvergenzkriterien
Wir beginnen ganz vorne
Das Trivialkriterium
Viele Wege führen nach Rom
Tests in eine Richtung
Tests in zwei Richtungen
Vergleichstests
Direkte Antworten mit dem direkten Vergleichstest suchen
Die Grenzen mit dem Grenzwertvergleichstest austesten
Tests auf Konvergenz und Divergenz in zwei Richtungen
Eine Lösung mit dem Integralkriterium finden
Aufgaben mit dem Quotientenkriterium rational lösen
Mit dem Wurzelkriterium zu den Wurzeln unserer Antworten
Alternierende Reihen
Zwei Formen grundlegender alternierender Reihen erkennen
Aus alt mach neu
Auf konvergenten positiven Reihen

basierende alternierende Reihen
Der Test auf alternierende Reihen
Absolute und bedingte Konvergenz verstehen
Alternierende Reihen testen
13 - Schicke Funktionen mit der Taylor-Reihe
Grundlegende Funktionen
Zwei Nachteile von grundlegenden Funktionen
Warum sind Polynome so nett?
Grundlegende Funktionen als Polynome darstellen
Grundlegende Funktionen als Reihen darstellen
Potenzreihen: Doping für Polynome
Potenzreihen integrieren
Das Konvergenzintervall verstehen
Funktionen als Reihen ausdrücken
sin x als Reihe ausdrücken
cos x als Reihe ausdrücken
Die Maclaurin-Reihe
Die Taylor-Reihe
Rechnen mit der Taylor-Reihe
Konvergente und divergente Taylor-Reihen betrachten
Funktionen ausdrücken und Funktionen annähern
Fehlerspannen für Taylor-Polynome berechnen
Warum funktioniert die Taylor-Reihe?
Teil V - Fortgeschrittene Themen
14 - Mehrdimensionale Analysis
Vektoren visualisieren

Vektoren – Grundlagen
Vektoren und Skalare unterscheiden
Rechnen mit Vektoren
Der Sprung in eine andere Dimension
Verwendung alternativer 3D-Koordinatensysteme
Funktionen von mehreren Variablen
Partielle Ableitungen
Steigung in drei Dimensionen messen
Partielle Ableitungen auswerten
Mehrfachintegrale
Volumen unter einer Oberfläche messen
Mehrfachintegrale berechnen
15 - Was ist so anders an Differentialgleichungen?
Grundlagen der Differentialgleichungen
DGs klassifizieren
Genauere Betrachtung der DGs
Differentialgleichungen lösen
Separierbare Gleichungen lösen
Anfangswertprobleme (AWPs) lösen
Einen Integrationsfaktor verwenden

Teil VI - Der Teil der Zehn

16 - Zehn Aha!-Einsichten in Analysis II
Integrieren bedeutet, die Fläche zu bestimmen
Beim Integrieren ist Fläche vorzeichenbehaftete Fläche
Integration ist spektakuläre Addition
Integration verwendet unendlich viele unendlich dünne Scheiben
Integration beinhaltet einen Schlupffaktor

- *Die Berechnung eines bestimmten Integrals ergibt eine Zahl*
  - *Die Berechnung eines unbestimmten Integrals ergibt eine Funktion*
- *Integration ist inverse Differentiation*
- *Jede unendliche Reihe hat zwei zugehörige Folgen*
- *Jede unendliche Reihe konvergiert oder divergiert*

*17 - Zehn Tipps, um die Prüfung zu bestehen*
- *Atmen!*
- *Lesen Sie sich die Prüfung genau durch!*
  - *Die einfachste Aufgabe als Erstes lösen!*
  - *Vergessen Sie nicht, dx und + C hinzuzuschreiben!*
- *Machen Sie es sich so einfach wie möglich!*
- *Wenn Sie stecken bleiben, kritzeln Sie!*
- *Wenn Sie wirklich stecken bleiben, überspringen Sie die Aufgabe!*
- *Prüfen Sie Ihre Antworten!*
- *Wenn eine Lösung keinen Sinn ergibt, kommentieren Sie sie!*
- *Wiederholen Sie Ihr Mantra »Ich tue mein Bestes«, und tun Sie dann Ihr Bestes!*

*Stichwortverzeichnis*

# *Einführung*

Analysis ist der Mount Everest der Mathematik. Die meisten Menschen geben sich damit zufrieden, ehrfürchtig hinaufzustarren, aber einige Unerschrockene machen sich auf den Weg, um ihn zu erklimmen.

Oder auch nicht.

In den vergangenen Jahren ist die Analysis zu einer Voraussetzung nicht nur für die Hauptfächer Mathematik, Ingenieurwissenschaften und Physik geworden, sondern auch für Studenten aus den Bereichen Biologie, Wirtschaftswissenschaft, Psychologie oder Krankenpflege. Juristische Fakultäten und MBA-Programme nehmen gerne Studenten auf, die einen Analysis-Kurs belegt haben, weil dies von Disziplin und logischem Denken zeugt. Und immer mehr Hochschulen legen den Studenten nahe, Analysis in Vorbereitung auf ihre Aufnahmeprüfungen zu belegen.

Möglicherweise ist die Analysis jetzt eher wie ein gut besuchtes Mittelgebirge, mit zahlreichen Wegen und Campingplätzen und einem riesigen Skizentrum ganz oben. Wahrscheinlich brauchen Sie einiges Durchhaltevermögen, um es zu erklimmen, aber mit der richtigen Anleitung (diesem Buch beispielsweise) werden Sie sich nicht durch einen Schneesturm auf dem halben Weg zum Gipfel abhalten lassen.

## *Zu diesem Buch*

Auch Sie können Analysis lernen. Darum geht es in diesem Buch. Wenn Sie dies lesen, haben Sie vermutlich schon gewonnen und einen Kurs in Analysis I bestanden. In diesem Fall gratuliere ich Ihnen und klopfe Ihnen auf die Schulter.

Und jetzt sollen einige Gerüchte angesprochen werden, die Sie vielleicht über Analysis II gehört haben:

- Analysis II ist schwieriger als Analysis I.
- Analysis II ist schwieriger als Analysis III und Differentialgleichungen.
- Analysis II ist furchterregender als zwei Zombies mitten in der Nacht, und Sie werden sich ein emotionales Trauma einhandeln, für dessen Heilung mehrere Jahre Psychotherapie erforderlich sein werden.

Ich gebe es zu, Analysis II ist schwieriger als Analysis I. Außerdem kann ich berichten, dass viele – aber nicht alle – Mathematikstudenten es schwieriger als die zwei darauf folgenden Mathematiksemester finden. (Ich persönlich finde Analysis II einfacher als Differentialgleichungen.) Aber ich kann Ihnen versichern, dass Zombies sehr viel schlimmer sind als ein Semester Analysis II.

Die beiden wichtigsten Themen von Analysis II sind Integration und unendliche Reihen. *Integration* ist das Inverse der Differentiation, um die es in Analysis I gegangen ist. (Für praktische Zwecke: Integration ist eine Methode, die Fläche unregelmäßiger geometrischer Formen zu bestimmen.) Eine *unendliche Reihe* ist eine Summe von Zahlen, die endlos läuft, etwa 1 + 2 + 3 + … oder $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$ … . Man kann davon ausgehen, dass sich die meisten

Lehrer in den ersten zwei Dritteln des Semesters auf die Integration konzentrieren, und das letzte Drittel auf unendliche Reihen.

Dieses Buch verschafft Ihnen eine solide Einführung dazu, was in einer Vorlesung zu Analysis II behandelt wird. Sie können es für das Eigenstudium einsetzen, aber auch als Begleitung zu einer Vorlesung zu Analysis II.

Blättern Sie also beliebig herum. Wenn ich zu einem Thema komme, für das Sie Informationen von einer früheren Stelle des Buchs benötigen, verweise ich auf diese Stelle – für den Fall, dass Sie noch einmal nachlesen wollen.

Hier zwei Hinweise – denken Sie daran, wenn Sie das Buch lesen:

- **Lernen Sie jeden Tag**. Ich weiß, dass Studenten immer versucht sind, ein Buch bis in die Nacht vor der Prüfung im Regal stehen zu lassen. Das ist kein sinnvoller Ansatz für Analysis II. Irgendwann können Sie den Stoff nicht mehr aufholen.

Wenn Sie also eine Hausaufgabe erhalten, lesen Sie sich die Aufgaben so schnell wie möglich durch und lösen Sie die einfacheren. Sehen Sie sich die schwierigeren jeden Tag an, auch wenn Sie sie nur einfach noch einmal durchlesen, und denken Sie darüber nach. Sie werden feststellen, dass Sie irgendwann selbst für das undurchschaubarste Problem eine Lösung finden.

- **Üben Sie**. Nachdem Sie ein Beispiel durchgelesen haben, und glauben, es verstanden zu haben, schreiben Sie die Aufgabe ab, schließen das Buch und versuchen, die Lösung nachzuvollziehen. Wenn Sie es vollständig lösen können, lesen Sie den nächsten Abschnitt. Andernfalls schlagen Sie die Lösung noch einmal nach – aber versuchen später erneut, die Aufgabe ohne Spicken zu lösen. (Sie wissen, in Prüfungen wird auch nicht gespickt!)

## *Konventionen in diesem Buch*

Im gesamten Buch halte ich die folgenden Konventionen ein:

- *Kursiv* ausgezeichneter Text kennzeichnet neue Wörter und definierte Begriffe.
- **Fett** ausgezeichneter Text kennzeichnet Schlüsselwörter, Aufzählungen und den Aktionsteil von nummerierten Schritten.
- Text in Listingschrift kennzeichnet Webadressen.
- Winkel werden im Bogenmaß statt in Grad gemessen, es sei denn, ich gebe dies gesondert an. Eine Beschreibung der Vorteile bei der Verwendung des Bogenmaßes bei der Winkelmessung finden Sie in Kapitel 2.

## *Was Sie nicht lesen müssen*

Alle Autoren sind der Meinung, dass sie reines Gold schreiben, aber Sie müssen nicht jedes Wort in diesem Buch lesen, wenn Sie das nicht wirklich wollen. Sie können die Einschübe (die grau unterlegten Kästen) überspringen, es sei denn, Sie finden diese Exkurse interessant. Außerdem müssen Sie die mit dem Symbol »Achtung, Technik!« gekennzeichneten Absätze nicht unbedingt lesen.

Wenn Sie keine Prüfungen erwarten, können Sie auch die Absätze mit dem Symbol »Tipp« überspringen und langwierige schrittweise Beispiele auslassen. Wenn Sie das Buch studienbegleitend einsetzen, lesen Sie jedoch diese Dinge sorgfältig durch und üben Sie anhand der Beispiele selbst.

## Falsche Voraussetzungen

Natürlich baut Analysis II auf Analysis I und den Grundlagen der Analysis auf. Hier also ein paar Voraussetzungen, die ich von Ihnen als Leser erwarte:

- Wenn Sie Student einer Vorlesung zu Analysis II sind, gehe ich davon aus, dass Sie Analysis I bestanden haben.

- Wenn Sie das Buch zum Eigenstudium einsetzen, gehe ich davon aus, dass Sie zumindest die Grundkenntnisse zu Analysis I beherrschen.

Ich erwarte, dass Sie einige Dinge aus Analysis wissen, aber ich werfe Sie nicht ins kalte Wasser und lasse Sie ertrinken. Kapitel 2 enthält viele praktische Informationen, an die Sie vielleicht nicht mehr gedacht haben. Und im gesamten Buch verweise ich gegebenenfalls auf andere Kapitel oder Abschnitte, so dass Sie jederzeit nachlesen können.

## Wie dieses Buch aufgebaut ist

Dieses Buch ist in sechs Teile untergliedert. Ich fange ganz vorne bei Analysis II an, führe Sie durch den gesamten Stoff und zeige Ihnen schließlich einen Ausblick auf fortgeschrittenere Themen, die in weiteren Mathematikkursen auf Sie warten.

## *Teil I: Einführung der Integration*

In Teil I biete ich Ihnen einen Überblick über Analysis II und wiederhole einige grundlegende Konzepte aus der Mathematik.

Kapitel 1 führt das bestimmte Integral ein, eine mathematische Ausdrucksweise für die Fläche. Ich zeige Ihnen, wie Sie mit Hilfe der Analysis ein Flächeproblem formulieren und lösen. Außerdem stelle ich Ihnen die Riemann-Summengleichung für das Integral vor, die die Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert schafft. Darüber hinaus erhalten Sie einen Überblick über das gesamte Buch.

In Kapitel 2 finden Sie eine Auffrischung zu Themen aus den Grundlagen der Analysis und Analysis I.

Kapitel 3 führt das unbestimmte Integral als allgemeinere und häufig praktischere Methode ein, im Vergleich zum bestimmten Integral.

## *Teil II: Unbestimmte Integrale*

Teil II konzentriert sich auf eine Vielfalt an Möglichkeiten, unbestimmte Integrale zu lösen.

Kapitel 4 zeigt Ihnen, wie Sie eine begrenzte Menge unbestimmter Integrale durch Anti-Differentiation lösen – das bedeutet, indem Sie den Differentiationsprozess umkehren. Ich zeige Ihnen 17 grundlegende Integrale, die die 17 grundlegenden Ableitungen aus Analysis I widerspiegeln. Außerdem stelle ich Ihnen einige wichtige Regeln für die Integration vor.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit Variablensubstitution, die den Nutzen der Anti-Differentiation wesentlich steigert. Sie werden erfahren, wie man die Variable einer zu integrierenden Funktion ändert, um die in Kapitel 4 vorgestellten Integrationsmethoden besser anwenden zu können.

Kapitel 6 stellt die partielle Integration vor, die Ihnen gestattet, Funktionen zu integrieren, indem Sie sie in zwei separate Faktoren aufteilen. Ich zeige Ihnen, wie Sie Funktionen erkennen, die für diesen Ansatz geeignet sind. Außerdem stelle ich Ihnen eine praktische Methode vor, schnell und einfach partiell zu integrieren – die DI-agonal-Methode.

In Kapitel 7 lernen Sie, alle möglichen trigonometrischen Funktionen schnell zu integrieren. Ich zeige Ihnen, wie Sie Potenzen von Sinus und Kosinus, Tangens und Sekans und schließlich Kotangens und Kosekans integrieren. Anschließend werden Sie diese Methoden für die trigonometrische Substitution einsetzen.

In Kapitel 8 geht es darum, wie Sie Partialbrüche für die Integration komplizierter rationaler