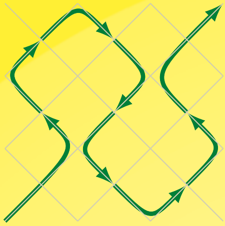
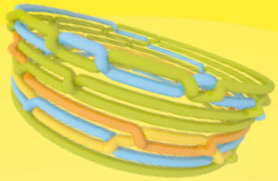
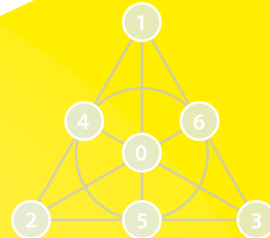
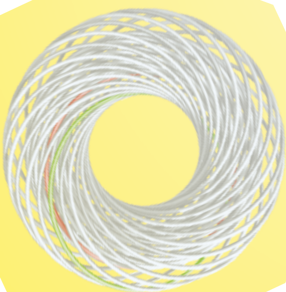


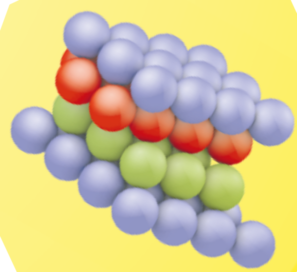




Andreas Loos · Rainer Sinn · Günter M. Ziegler

Panorama der Mathematik





Springer

Panorama der Mathematik

Andreas Loos · Rainer Sinn · Günter M. Ziegler

Panorama der Mathematik

Springer

Andreas Loos
Berlin, Deutschland

Rainer Sinn
Universität Leipzig
Leipzig, Deutschland

Günter M. Ziegler
Freie Universität Berlin
Berlin, Deutschland
https://orcid.org/0000-0003-1502-1915

ISBN 978-3-662-54872-1 ISBN 978-3-662-54873-8 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-54873-8

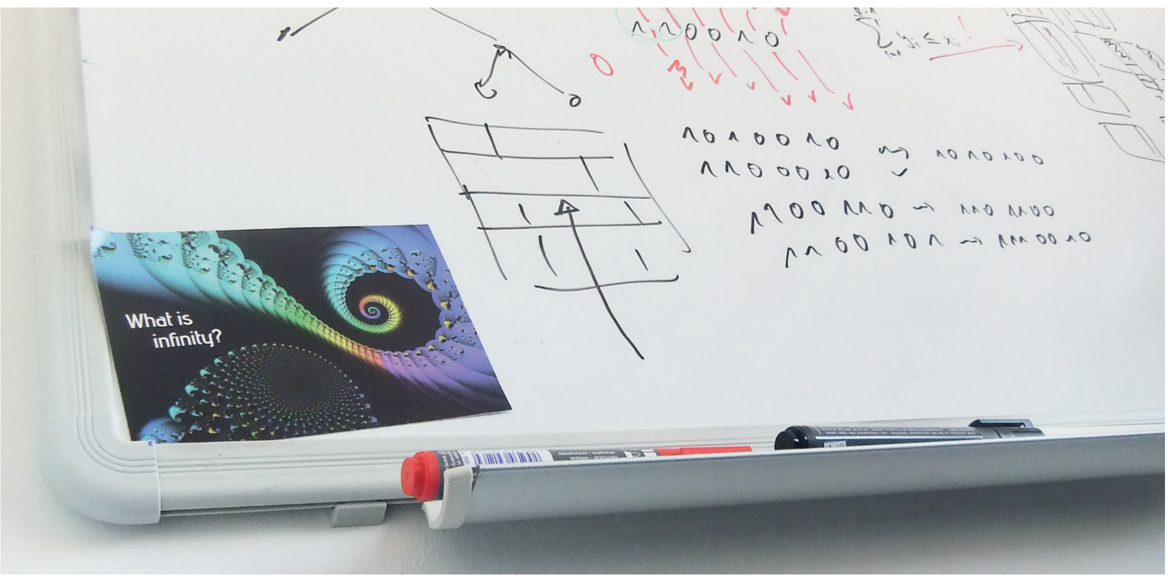
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Andreas Rüdinger
Zeichnungen: Katrin Gloggengiesser
Satz: Christoph Eyrich
Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Was ist Mathematik? Und wo zeigt sie sich: Nur in unseren Köpfen? An Tafeln? In Büchern und Aufsätzen, gesammelt in Bibliotheken? In Technik und Natur? Und entdeckt man sie, als Teil der Natur oder wird sie erfunden, „gemacht“, passend für Anwendungen? Passiert das irgendwie systematisch und zielgerichtet, oder ist das eine Mischung von Wachstum und Entwicklung, Zufall und Wildwuchs? Gibt es eine große Kathedrale der Mathematik, die Stein auf Stein errichtet wird, mit Zement aus Beweisen dazwischen? Oder ist das Haus der



Mathematik eher eine Villa Kunterbunt – mit vielen An- und Umbauten, die alle unterschiedlichsten Zwecken dienen und immer wieder umgewidmet werden, und mit Fundamenten, von denen niemand sagen kann, ob sie das Gebäude in alle Ewigkeiten tragen können, obwohl sie es seit Jahrtausenden tun?

Was ist Mathematik? Sie halten mit diesem Band unsere persönliche Antwort auf diese Frage in Händen. Es ist ein dickes Buch mit sehr unterschiedlichen Teilen und Themen geworden, das die Vielfalt unserer Ideen und Erfahrungen, Entdeckungen und Erkundungen widerspiegelt. Das Ganze ist als ein Lese- und Schmökerbuch gedacht, das kreuz und quer gelesen werden kann und soll. Es kann und soll aber auch Grundlage für eine Vorlesung für Studierende der Anfangssemester sein, die zum Beispiel *Panorama der Mathematik* heißen kann, und die an der Freien Universität Berlin über viele Jahre gehalten worden ist. Die Vorlesung soll Bachelorstudierende zu der Entdeckung einladen, dass Mathematik viel mehr ist als ein Buch oder ein Klassenzimmer oder ein Vorlesungssaal, wo man „Analysis I, II, III“, „Lineare Algebra I und II“, „Diskrete Mathematik“ oder „Numerik“ in kleinen, sorgfältig zubereiteten Lektionen präsentiert bekommt.

Mathematik ist eine gewaltige Landschaft, in der sich weltweit und jeden Tag viele sehr unterschiedliche Menschen tummeln, forschen, arbeiten. Das Schmökerbuch soll Geschichten aus dieser Welt erzählen, Fragen aufwerfen und Lust machen, selbst dieses Land zu betreten und es zu erforschen. Es soll Lust machen, Erkundungen anzustellen in die Welten der Mathematik, ihre Geschichte, Probleme, Anwendungen, und ihre Protagonistinnen und Protagonisten kennenzulernen.

Die Erkundung der bunten Welt der Mathematik, für die wir in diesem Buch ein Panorama entwerfen, haben wir in drei Teile gegliedert. Der erste Teil heißt *Was ist Mathematik?*, wie ein berühmtes gleichnamiges Buch von Richard Courant und Herbert Robbins [101], in dem es um den Zugang zur Mathematik, ihre Probleme, mathematische Forschung, Beweise, Bilder und die Philosophie der Mathematik geht. Dann kommt ein zweiter Teil, in dem wir uns beispielhaft Konzepte vornehmen, etwa Zahlen, Dimensionen, Zufall und die Unendlichkeit. Im dritten Teil geht es (trotz „Mathematik ist nicht Rechnen“) um das Rechnen, Algorithmen, Anwendungen und um das Bild der Mathematik in der Öffentlichkeit.

Weil es zu jedem unserer drei Teile und fünfzehn Kapitel (fast) unendlich viel zu erzählen gibt und die Auswahl der Aspekte und Geschichten und Perspektiven doch eine sehr persönliche und teils auch zufällige ist, fassen wir in jedem Kapitel zunächst „das Wesentliche“ in einem Abschnitt zusammen, der mit „Thema“ betitelt ist. Hier haben wir versucht, auf wenigen Seiten zusammenzufassen, „was man wissen sollte“. Diesen Teilen folgen jeweils die „Variationen“, in denen wir uns aus lockerer Perspektive (und manchmal auch ein bisschen journalistisch) denselben Themen nähern und erzählen, erläutern, illustrieren. Dann kommt jeweils eine kurze kommentierte Liste von „Partituren“: Das sind weniger Quellenangaben als Lesehinweise und Tipps für weitere Erkundungen. Jedes Kapitel schließt dann mit „Etüden“ ab – die man als Übungsaufgaben verwenden kann, aber mehr noch als Ausgangspunkte für eigene Erkundungen. Immerhin hat ein weiser Mathematiker (nämlich George Pólya in [393]) mal behauptet, Mathematik sei kein Zuschauersport, und da ist natürlich etwas Wahres dran, wenn es auch natürlich keine vollständige Antwort ist.

Insgesamt ist das Buch als ein Lesebuch gedacht, das *erzählt*, aber nur in sehr kleinem Umfang Mathematik *erklärt*. Aber – etwas Mathematik illustrieren und *vorführen* müssen und wollen wir eben doch. Und so steigen wir in manchen Passagen etwas tiefer in ein Thema ein, zum Beispiel mit einem komplexeren Beweis. Um das Überspringen solcher Passagen zu erleichtern, markieren wir unser „Hinein-“ und „Herauszoomen“ mit Symbolen am Rand.

Lebensdaten zu den Personen und Protagonisten in diesem Band finden sich im Anhang, ebenso wie ein Stichwortverzeichnis und ein ausführliches Literaturverzeichnis, das hoffentlich zum Weiterlesen animiert.

Man sieht diesem Buch sicher an, dass wir sehr viele Jahre daran gearbeitet haben – mehr als elf. Trotz aller Mühe und versuchter Sorgfalt gibt es sicher noch Fehler und Ungenauigkeiten: Hinweise darauf interessieren uns genauso wie Kritik und Verbesserungsvorschläge. Gleichzeitig sind

wir all denen ausgesprochen dankbar, die über die Jahre die Arbeit an diesem Buch begleitet haben, mit Korrekturen und wertvollen Hinweisen, im Großen zum Konzept wie auch zu Tausenden Details. Besonders genannt seien dafür, neben den vielen Studentinnen und Studenten in unseren Panorama-Vorlesungen und -Seminaren an der Freien Universität Berlin, Moritz Firsching, Jonathan Kliem und Johanna Steinmeyer sowie Joshua Aaron, Daniel Ambrée, Baltus Baumbauer, Dirk Frettlöh, Anna Hartkopf, Annette März-Löwenhaupt, David Muschke, Karsten Pfaff, Daniel Plaumann, Moritz W. Schmidt, Thomas Schmidt, Jan Schneider, Jonathan Spreer, Hannes Stoppel und Thomas Vogt. Klaus Haße hat das Projekt über Jahre hinweg mit unzähligen klugen und aufmunternden Hinweisen begleitet, Alexander Schulte verdanken wir viele der wunderbaren Graphiken in diesem Buch, Katrin Gloggengiesser gebührt herzlicher Dank für die Portraitzeichnungen und Andreas Rüdinger bei Springer-Spektrum für Unterstützung, viele wertvolle Kommentare und die jahrelange Geduld. Schließlich danken wir für nachhaltige Unterstützung dieses Projekts über viele Jahre der Freien Universität Berlin sowie der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Berliner Forschungszentrums MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“ und des Berlin-Münchener Sonderforschungsbereichs „Diskretisierung in Geometrie und Dynamik“.

Andreas Loos, Rainer Sinn und Günter M. Ziegler
Berlin/Leipzig/Berlin, Mai 2022

Teil I
Was ist Mathematik?

Was ist Mathematik?

„Was ist Mathematik?" Das ist die zentrale Frage dieses Buches. In diesem Kapitel präsentieren wir einige Definitionsversuche, skizzieren Beschreibungen aus sehr unterschiedlichen Perspektiven und tauchen damit ein in die Vielfalt und Komplexität all dessen, was unter dem Begriff „Mathematik" zusammengefasst wird.

A. Loos et al., *Panorama der Mathematik*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-54873-8_1

Thema

Was ist Mathematik? Eine Definition ist offenbar schwierig, wie der Eintrag in *Wikipedia* zeigt:

> Die Mathematik [...] ist eine Wissenschaft, die aus der Untersuchung von geometrischen Figuren und dem Rechnen mit Zahlen entstand. Für Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition; heute wird sie üblicherweise als eine Wissenschaft beschrieben, die durch logische Definitionen selbstgeschaffene abstrakte Strukturen mittels der Logik auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht. [Version vom 26. Dezember 2020]

In der Tat entstand die Mathematik historisch aus „Zahlen und Figuren", aber das beschreibt nicht die Untersuchungsgegenstände der modernen Wissenschaft Mathematik. Diese riesige moderne Wissenschaft lässt sich nicht klar umreißen, also *definieren*. Stattdessen weichen die Autoren in Wikipedia auf eine vagere Beschreibung aus, die ihrerseits problematisch ist: Wenn Mathematik nur „selbstgeschaffene abstrakte Strukturen" betrachtet, wieso kann sie dann interessant sein? Überrascht dann nicht die offenkundige Widerspruchsfreiheit der Mathematik? Und wie kann dann Mathematik relevant sein für die Welt, für Physik, Chemie, Technik und Wirtschaft, sogar für die Kunst?

Ein Teil der Schwierigkeit besteht darin, dass der Begriff „Mathematik" mindestens drei unterschiedliche – aber eng miteinander verbundene und voneinander abhängige – Aspekte vermischt:

1. Mathematik als Teil der Kultur,
2. Mathematik als Werkzeugkasten, ein Reservoir von Hilfsmitteln für den Alltag, und
3. Mathematik als hochentwickelte, eigenständige, aktive Wissenschaft, eine essenzielle Grundlage für Informatik, Naturwissenschaften und Technik.

Mathematik als Teil der Kultur

Mathematik ist ein entscheidendes Hilfsmittel zum Verständnis der Welt, trägt wesentlich bei zur Gestaltung des Lebens, ist ein integraler (nicht abtrennbarer) Teil der Kultur. Wir alle haben Mathematik als Schulfach kennengelernt und dadurch einen (mitunter sehr subjektiven) Eindruck bekommen. Darüberhinaus ist sie auch Studienfach mit exzellenten Berufsaussichten. Sie ist aber um einiges bunter und vielfältiger, als man nach der Schule oder dem Studium vielleicht denkt.

Anfänge der Kultur. Mathematik ist so alt wie die menschliche Kultur: Wir finden geometrische Muster auf steinzeitlichen Fundstücken; zum Beispiel Markierungen in Gruppen von 11, 13, 17 und 19 Kerben (Zahlen? Bestandteil eines Kalenders? Oder wirklich Primzahlen?) auf dem etwa 22 000 Jahre alten „Ishango-Knochen", der in Zentralafrika gefunden wurde. In der ägyptischen Hochkultur wurde Geometrie entwickelt, um das Niltal nach Überschwemmungen neu zu vermessen und die Pyramiden nach den Gestirnen auszurichten. Aus Mesopotamien sind vor fast 4000 Jahren Untersuchungen etwa zu Brüchen und zu quadratischen und kubischen Gleichungen belegt. Seit der klassischen griechischen Hochkultur gibt es die Mathematik als Wissenschaft, mit Definitionen, Lehrsätzen und Beweisen – und mit bemerkenswerten Ergebnissen, die auch heute noch klassisches Wissen der Mathematik sind, darunter die Unendlichkeit der Primzahlen, der Satz von Pythagoras, der euklidische Algorithmus und die Klassifikation der platonischen Körper.

Schlüssel zum Verständnis der Welt. Mathematik wurde entwickelt, um die Welt zu beschreiben und zu erklären – und ist dabei ausgesprochen erfolgreich. Galileo Galilei behauptete 1623 in seiner Schrift *Il Saggiatore*, das Buch der Natur sei in der Sprache der Mathematik geschrieben. In der Tat ist die Mathematik heutzutage die Sprache, in der die Modelle in den quantitativen Wissenschaften geschrieben sind. Der Physik-Nobelpreisträger Eugene Wigner sprach in einem berühmten Vortrag 1959 in New York von der „unvernünftigen Effektivität der Mathematik in den Naturwissenschaften“, der vielleicht überraschenden Nützlichkeit der Mathematik dabei, diese Modelle zu formulieren und die Natur zu verstehen. Darauf werden wir im Kapitel „Anwendungen“ (S. 335 ff.) zurückkommen.

Ästhetik und Schönheit. Mathematik, mathematische Formeln, Strukturen und Beweise werden vielfach als schön beschrieben: Die Mathematik hat ihre eigene Ästhetik. Sie wird aber auch in der Ausführung und zur Analyse verschiedener Künste verwendet, zur Beschreibung von musikalischen Harmonien (schon bei Platon!), in der Proportionenlehre (Stichwort „Goldener Schnitt“ $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$), der Entwicklung der Perspektive (hierzu hat Albrecht Dürer 1525 ein Standardwerk verfasst), aber auch in der Architektur (praktisch bei Kühltürmen von Kraftwerken oder auch ästhetisch bei biomorphen Spannkonstruktionen wie dem Zeltdach des Münchner Olympiastadions, bis zu den mathematischkonstruierten „Freiformen“ von Frank Gehry). Mathematik ist ein Baustein von Schönheit!

Mathematik als Werkzeugkasten

Die Anfänge der Mathematik sind verbunden mit der Lösung von Alltagsproblemen, etwa der Landvermessung, dem Zählen und Ordnen usw. Aus antiker Zeit kennt man hochentwickelte Kalender, Maßeinheiten, astronomische Geräte und Abschätzungen.

Das *Rechenbüchlein* von Adam Ries (erste Auflage: 1522) war ein Bestseller, in dem allgemein verständlich, auf Deutsch, die Mathematik erklärt wurde, die damals zur Bewältigung des Alltags nötig war: Zahlen in Dezimaldarstellung, Brüche, Dreisatz, Zins und Zinseszins, das Umrechnen von vielfältigen Maßeinheiten, dazu etwas Geometrie. Damit konnte der Kaufmann auf dem Markt seine Geschäfte selbst in die Hand nehmen, anstatt auf den Rechenmeister zu warten: ein möglicherweise entscheidender Beitrag zum wirtschaftlichen Aufschwung im Deutschland des 16. Jahrhunderts!

Bis heute liefert der Teil der Mathematik, den man auf der Schule lernt, wichtige Hilfsmittel mit großer wirtschaftlicher Bedeutung. Dazu gehören auch der Umgang mit Wahrscheinlichkeiten und Statistiken, sowie algorithmische Fähigkeiten, etwa Sortieren, Routenplanung etc. Das Spektrum von mathematischen Methoden, denen wir im Alltag begegnen, ist aber weitaus größer – auch wenn sie oft versteckt bleiben. Zum Beispiel kommen bei der Bewältigung großer Datenmengen auch Ergebnisse aktueller Forschung zum Einsatz: Für die Verarbeitung von *Big Data* wird komplizierte neue Mathematik entwickelt (Beispiel: „Compressed Sensing"). Die Geschäftsmodelle von Firmen wie Microsoft, Google, Amazon oder Facebook basieren nicht nur auf effektiver (mathematischer!) Analyse und Optimierung von Daten, sondern auch darin, anderen Firmen Wissen und Infrastruktur für die Auswertung deren Daten zur Verfügung zu stellen.

Dass und mit welch großem Einfluss auf die Gesellschaft heute Daten ausgewertet werden, ist Gegenstand wachsender Kritik – beispielhaft seien *Weapons of Math Destruction* von Cathy O'Neil, das Buch *Counting: How We Use Numbers to Decide What Matters* der Politologin Deborah Stone oder Brian Christians *The Alignment Problem* genannt. Auch die Debatte um den Einfluss von Computer-Algorithmen in sozialen Netzen und die Beeinflussung von Wahlen hat also einen mathematischen Hintergrund.

Die Mathematik im Alltag bleibt aber vielfach unter der Oberfläche verborgen: In Wetterbericht und Klimaprognosen stecken modernste Numerik, Statistik und große Datenmengen und Rechnerleistungen. „Computer-Aided Design" heißt, dass geometrische Formen (etwa Automobilkarosserien) zuerst im Computer entstehen. Und bei Computergraphiken, wie sie in Kinofilmen (im Animationsfilm oder im Realfilm) zum Einsatz kommen, ist die Unsichtbarkeit der mathematischen Hilfsmittel sogar entscheidend! Haben wir ein Gefühl für die Macht der Mathematik unter der Oberfläche?

Mathematik als Wissenschaft. Mathematik (als Wissenschaft) ist schwierig – sie verallgemeinert und destilliert Strukturen und Eigenschaften, löst sie von beobachteten Phänomenen und Objekten, studiert und konstruiert abstrakte Strukturen. Dabei bauen neue Theorien systematisch auf früheren Erkenntnissen auf. Es entstehen Theoriegebäude, die man zum Verständnis systematisch, ein Stockwerk nach dem anderen, erarbeiten muss. Mathematik stellt also die schwierigsten intellektuellen Probleme der Welt; manche brauchen Jahrhunderte von der Formulierung bis zur Lösung. In der Schwierigkeit liegt gleichzeitig der Reiz, die Herausforderung: Mathematik liefert große Ziele für gemeinsame Anstrengung.

Die Geschichte der Mathematik über 6000 Jahre hat der Mathematikhistoriker Hans Wußing 2008/2009 in zwei gewichtigen Bänden [539, 540] dokumentiert: In diesem Kapitel können daher nur große Bögen skizziert werden. Um ein umfassendes Bild zu bekommen, muss die Geschichte der Mathematik aus vielen verschiedenen Perspektiven betrachtet werden. Zu diesen gehören, mit großen Veränderungen und Entwicklung über die Jahrhunderte,

◇ die Motivation für die Forschung,
◇ die Gegenstände und die zugehörigen Teilgebiete, und darin die großen, zentralen Probleme,
◇ die gelösten Probleme und erzielten Resultate als „Meilensteine“,
◇ die Mathematiker und erst später dann auch Mathematikerinnen, die Wesentliches beigetragen oder Forschungsrichtungen motiviert und initiiert haben,
◇ die Arbeitsweisen und Hilfsmittel, etwa die Rolle der Messgeräte, Rechenmaschinen und Computer,
◇ die wachsenden Ansprüche an und Fortschritte in Hinblick auf Formalisierung und Präzision, beim Bau und der Sicherung der Fundamente der Mathematik, sowie
◇ die sozialen Rahmenbedingungen für das Betreiben von Mathematik als Hobby oder als Beruf, an Akademien und Universitäten, an Schulen und in der Industrie.

Das Werden der Wissenschaft. Aus den frühen Hochkulturen in Ägypten und Mesopotamien sind trickreiche Rechnungen und geometrische Konstruktionen dokumentiert. Mathematik als Wissenschaft mit dem Anspruch der Formulierung von Aussagen mit unbestreitbar gültigen Beweisen ist allerdings eine Leistung der griechischen Antike – dokumentiert in den *Elementen* des Euklid aus dem dritten Jahrhundert vor Christus, in denen das Wissen ihrer Zeit systematisch zusammengefasst ist und die noch bis in die Neuzeit als Lehrbuch verwendet wurden. Seit Euklid wird Mathematik ausgehend von Axiomen (Grundannahmen) entwickelt, es werden Theoreme (Hauptsätze), Propositionen (Lehrsätze) und Lemmata (Hilfsätze) formuliert und dann formal bewiesen.

Entwicklung als moderne Wissenschaft. Mathematik als moderne Wissenschaft wird ab dem 17. Jahrhundert betrieben: Methoden der Zahlentheorie werden systematisch entwickelt und führen zur Algebra. Alltagsbeobachtungen führen zu den Anfängen von Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Motiviert auch durch physikalische und astronomische Fragenstellungen begründen Newton und Leibniz die Analysis (Differential- und Integralrechnung); Euler und Cauchy gießen sie später in einflussreiche Lehrbücher.

Professionalisierung und Präzisierung. Erst ab dem 18. Jahrhundert bieten Akademien und später dann Universitäten, technische Hochschulen und Gymnasien die Möglichkeit, Mathematik als Beruf zu betreiben. Gleichzeitig beginnt die Entwicklung der Mathematik als *eigenständige* Wissenschaft, die auch losgelöst von externen Fragestellungen, etwa der

Astronomie und Physik, betrieben wird: Es werden „abstrakte“ Strukturen konstruiert und studiert und man beschäftigt sich mit ihrer eigenen Struktur und ihren Grundlagen. Parallel dazu werden ab dem 19. Jahrhundert die modernen Standards an Präzision und an Ausformulierung der gültigen Grundlagen für große Bereiche der Mathematik geschaffen: So verbindet man

- mit dem Namen von Weierstraß die in „Weierstraß’scher Strenge“ entwickelte Analysis (mit dem „ε-δ-Kalkül“),
- mit Dedekind grundlegende Betrachtungen über „Was sind und was sollen die Zahlen?“,
- mit Cantor die Entwicklung der Mengenlehre,
- mit Boole, Frege und anderen die Formalisierung der Logik, und
- mit Riemann, Klein und Hilbert die Grundlegungen der modernen Geometrie.

Mit Hilfe von algebraischen Theoriebildungen werden in dieser Zeit große klassische Probleme der Antike gelöst: Carl Friedrich Gauß hat gezeigt, dass das regelmäßige n-Eck nur für ganz spezielle Werte von n mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Und es wird bewiesen, dass die Verdopplung des Würfels, die Dreiteilung des Winkels und die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal *nicht* exakt gelöst werden können.

20. und 21. Jahrhundert. Das 20. Jahrhundert wird mit den von David Hilbert auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress 1900 in Paris vorgestellten 23 „Hilbert’schen Problemen“ eröffnet. Hoffnungen auf eine vollständige Mechanisierbarkeit oder auch nur theoretische Vollständigkeit der Mathematik werden durch die von Kurt Gödel 1930 in Königsberg präsentierten Unvollständigkeitssätze zerstört: Die Widerspruchsfreiheit der Grundlagen der Mathematik ist prinzipiell nicht beweisbar und in jeder hinreichend komplexen Theorie gibt es nichtentscheidbare Sätze.

Andererseits verzeichnet das 20. Jahrhundert die Konstruktion gigantischer neuer Theoriegebäude, etwa der Algebraischen Topologie, der Algebraischen Geometrie sowie der Analytischen und der Algebraischen Zahlentheorie, mit denen fundamentale Probleme gelöst werden. Es kommt insbesondere nach dem Zweiten Weltkrieg zu einer Wissensexplosion: Inzwischen verzeichnet man mehr als 100 000 Forschungsbeiträge pro Jahr, die in Dutzende große Teilgebiete mit vielfältigen Verästelungen eingeteilt werden, etwa nach der Mathematics Subject Classification (MSC) in der aktuellen Version von 2020 in 63 große Teilgebiete und mehr als 6000 einzelne Themenbereiche [134].

Gleichzeitig wird Mathematik zu einer unverzichtbaren Grundlage der Hochtechnologie: moderne Physik, Informatik, Technik, Industrie und Wirtschaft sind ohne ihre mathematischen Grundlagen und ohne hochentwickelte mathematische Methoden und Verfahren nicht denkbar. Daher kann man große Bereiche von Wirtschaft und Technik, wie etwa die

Logistik, die Telekommunikationsindustrie, Versicherungs- und Finanzwirtschaft, mit einigem Recht als „mathematische Industrie“ auffassen.

Neue Themen verändern aktuell das Gesicht der Mathematik, darunter die Zusammenarbeit vieler hunderter Mathematikerinnen und Mathematiker im Internet in „Polymath-Projekten“ und die systematische Konstruktion von Computer-überprüfbaren „formalen Beweisen“.

Es bleibt viel zu tun: Zu den großen offenen Problemen der Mathematik gehören sechs der sieben im Jahr 2000 verkündeten „Millenniumsprobleme“ der *Clay*-Stiftung, von denen bisher nur ein einziges (nämlich die Poincaré-Vermutung durch Grigori Perelman) gelöst wurde, darunter

- die *Riemann'sche Vermutung* aus der Zahlentheorie, die sehr genaue Abschätzungen über die Verteilung der Primzahlen liefern würde,
- die $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$*-Vermutung* der Komplexitätstheorie, wonach Probleme, für die Lösungen schnell überprüft werden können, nicht unbedingt selbst schnell lösbar sind, sowie
- eine Lösungstheorie für die *Navier-Stokes-Gleichungen*, die strömende Flüssigkeiten beschreiben.

Mathematik als Studienfach und als Beruf

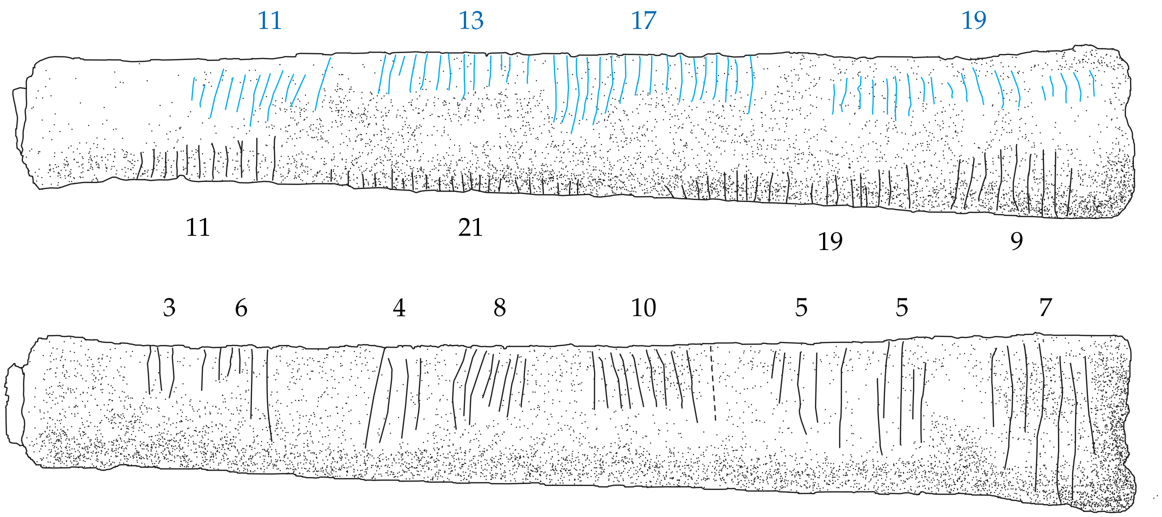
Wie viele Mathematikerinnen und Mathematiker gibt es? Wenn damit die promovierten Mathematikerinnen und Mathematiker weltweit und aller Zeiten gemeint sind, dann liefert das *Mathematics Genealogy Project* (www.genealogy.ams.org) einen Anhaltspunkt: Anfang 2022 führte es schon mehr als 275 000 Mathematikerinnen und Mathematiker auf, die meisten davon aus den letzten fünfzig Jahren.

Betrachtet man die gegenwärtigen Mitgliederzahlen der Fachverbände, so kommt man weltweit auf weit mehr als 100 000 „organisierte“ Mathematikerinnen und Mathematiker: So hat die *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* DMV rund 5000 Mitglieder. Von den drei großen mathematischen Gesellschaften der USA, die alle auch viele internationale Mitglieder haben, ist die *American Mathematical Society* AMS die größte (rund 30 000 Mitglieder), gefolgt von der *Mathematical Association of America* MAA (mehr als 25 000) und der *Society for Industrial and Applied Mathematics* SIAM (knapp 15 000).

Mathematik ist ein kleineres Studienfach, für das die Statistiken relativ hohe Abbrecherzahlen ausweisen. Andererseits sind die Berufsaussichten für die Absolventinnen und Absolventen sehr gut und ausgesprochen vielfältig: Viele von ihnen unterrichten später an Schulen und Hochschulen oder arbeiten für Beratungsunternehmen und in der Software-, Finanz- und Versicherungsindustrie.

Variationen

Mathematik als Teil der Kultur



Die beiden Seiten des etwa 22 000 Jahre alten Ishango-Knochens. Was hier gezählt wurde, bleibt ein Geheimnis. Entdeckte ein Urmensch die Primzahlen zwischen 10 und 20? (Mehr zur Geschichte des Knochens im Kapitel „Primzahlen“, S. 155, und Ziegler [548])

Anfänge der Kultur

> Proklos, ein antiker Philosoph sagt: ‚Das aber ist Mathematik: Sie erinnert dich an die unsichtbaren Formen der Seele; sie gebiert ihre eigenen Entdeckungen; sie erweckt den Geist und reinigt den Intellekt; sie erleuchtet die uns innewohnenden Ideen; sie vernichtet das Vergessen und die Ahnungslosigkeit, die uns mit der Geburt zu eigen sind ...‘ Aber ich mag Mathematik einfach, weil sie Spaß macht.

So beginnt Terence Tao sein Buch *Solving Mathematical Problems* [492] über Strategien zur Lösung mathematischer Wettbewerbsaufgaben. Tao ist einer der wichtigsten Mathematiker der Gegenwart. 2006 wurde er mit der Fields-Medaille gewürdigt, die häufig als „Nobelpreis der Mathematik“ bezeichnet wird. Er war einer der jüngsten Teilnehmer und Preisträger der Internationalen Mathematik-Olympiade aller Zeiten: Mit noch nicht einmal elf Jahren hielt er seine erste Bronzemedaille in Händen, ein Jahr darauf holte er Silber und dann Gold.

Das Zitat von Proklos deckt bereits eine ganze Reihe von Blickwinkeln auf die Mathematik ab. In seiner Charakterisierung der Mathematik als einer Schule des Denkens greift er auf seinen Vordenker Platon zurück, der etwa sechshundert Jahre vor Proklos in seiner *Politeia* Ähnliches behauptete – und zudem den Nutzen der Angewandten Mathematik andeutet:

> Also, Bester, wäre sie [die Geometrie] auch eine Leitung der Seele zur Wahrheit hin und ein Bildungsmittel philosophischer Gesinnung. [. . .] So sehr als möglich müssen wir also, sprach ich, darauf halten, dass dir die Leute in deinem Schönstaate der Geometrie nicht unkundig seien. Und auch der Nebengewinn davon ist nicht unbedeutend [. . .] ja auch bei allen andern Kenntnissen, um sie vollkommener aufzufassen, wird ein gewaltiger Unterschied sein zwischen denen, die sich mit Geometrie abgegeben haben und denen, die nicht. (Platon, *Politeia* VII 107d527)

Ästhetik und Schönheit. „Sie gebiert ihre eigenen Entdeckungen", schreibt Proklos über die Mathematik. Mathematik haftet etwas Irreales an, eine Existenz unabhängig von der Welt, in der wir leben. Und warum konnte es schon Proklos so vorkommen, als ob man beim Forschen einen abgeschlossenen, fertigen Kosmos aus Zahlen, Strukturen und Verknüpfungen durchkämmt, der auf wundersame Weise in sich schlüssig erscheint? (Mehr dazu im Kapitel „Philosophie der Mathematik", S. 123 ff.)

Vielen Mathematikerinnen und Mathematikern scheint die rätselhafte tiefe Schlüssigkeit der Mathematik eine Befriedigung zu verschaffen; sie empfinden sie deshalb als „schön". Carl Friedrich Gauß etwa schrieb:

> Der Geschmack an den abstrakten Wissenschaften im allgemeinen und im besonderen an den Geheimnissen der Zahlen ist äußerst selten, darüber braucht man sich nicht zu wundern: Die reizenden Zauber dieser erhabenen Wissenschaft enthüllen sich in ihrer ganzen Schönheit nur denen, die den Mut haben, sie gründlich zu untersuchen. [541, S. 125]

Diese Zeilen stammen aus einem Brief an Sophie Germain, die ihn zuvor über mehrere Jahre hinweg über ihre wahre Identität getäuscht hatte: Die mathematische Autodidaktin hatte 1804 nach der Lektüre von Gauß' Lehrbuch zur Zahlentheorie *Disquisitiones Arithmeticae* mit ihm eine Korrespondenz über ihre

Terence Chi-Shen Tao (*1975) wurde in Adelaide in Australien geboren und ist heute an der University of California in Los Angeles tätig. Er fiel schon früh als mathematisches Wunderkind auf: Er besuchte schon mit 9 Jahren mathematische Vorlesungen und nahm schon mit 10 Jahren an der Internationalen Mathematik-Olympiade teil, zuerst ohne Auszeichnung. Er gewann aber mit 11 Jahren eine Bronze-, mit 12 eine Silber- und mit 13 eine Goldmedaille. Seine mathematische Karriere ging steil weiter: Er veröffentlichte seine erste wissenschaftliche Arbeit mit 15, machte seinen Masterabschluss mit 16 und promovierte dann an der Princeton University mit 21. Er wurde im Alter von 31 Jahren mit einer Fields-Medaille ausgezeichnet (und gewann viele andere Preise und Auszeichnungen). Kolleginnen und Kollegen, die ihn persönlich kennen, äußern sich beeindruckt von der Breite und auch der Tiefe seines mathematischen Wissens. Neben den vielen wichtigen wissenschaftlichen Arbeiten und Fachbüchern zu modernen Gebieten der Mathematik, die er geschrieben hat, ist er der mathematischen Öffentlichkeit auch durch seinen aktiven (und auch für die Forschung einflussreichen) Blog zur Mathematik bekannt.

mathematischen Forschungsthemen begonnen und sich dabei als „Monsieur Le Blanc“ ausgegeben.

Ein anderes Beispiel: Eduard Kummer, ein Zeitgenosse von Gauß, hielt 1867 eine Festrede vor der Berliner Akademie der Wissenschaften. Es war das Jahr nach Leibniz’ 150. Todestag und so behandelte Kummer in seiner Rede Leibniz’ Entdeckung der unendlichen Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Kummer erwähnte, Leibniz habe dieser Reihe in seiner ersten Veröffentlichung den Satz *numero deus impari gaudet* angefügt, also: „Gott erfreut sich an der ungeraden Zahl“, und fährt fort:

> Wir erkennen aus dieser Äußerung zunächst, daß Leibniz selbst die neue unendliche Reihe in ihrer einfachen und dabei unendlich mannichfaltigen Form mit Staunen und mit Verwunderung angeschaut hat, und daß dieselbe auf ihn in ähnlicher Weise gewirkt hat, wie der Anblick des Meeres in seiner Unbegränztheit, oder der Anblick einer großartigen Gebirgsgegend auf den Menschen wirkt. Solcher Eindrücke wird auch jeder Mathematiker sich bewußt sein, denn in dem Reiche des Mathematischen herrscht eine eigenthümliche Schönheit, welche nicht sowohl mit der Schönheit der Kunstwerke, als vielmehr mit der Schönheit der Natur übereinstimmt und welche auf den sinnigen Menschen, der das Verständniß dafür gewonnen hat, ganz in ähnlicher Weise einwirkt, wie diese. Daß aber Leibniz ausruft Gott freut sich über die ungraden Zahlen, hat einen noch tieferen Sinn, denn es spricht sich hierin das Bewußtsein darüber aus, daß das Reich des Mathematischen mit seinem ganzen unendlich mannigfaltigen Inhalte nicht menschliches Machwerk ist, sondern ebenso als Gottes Schöpfung uns objectiv entgegentritt wie die äußere Natur. [293]

Rätsel, Herausforderung, Wettbewerb. Mathematik ist aber auch eine Art Sport. Proklos’ obiges Zitat findet sich am Anfang von Taos Buch über das Lösen von Aufgaben aus Mathematik-Olympiaden. Tatsächlich ist Mathematik für viele Menschen (auch) eine Herausforderung zum Knobeln, zum Rätseln und Problemlösen. Jedes Jahr treten rund 600 Schülerinnen und Schüler aus mehr als 100 Ländern zur Internationalen Mathematik-Olympiade an (höchstens sechs aus jedem Land). Der Frauenanteil liegt bei etwa 10 %.

Eine typische Olympiade-Aufgabe, aus dem Jahr 2010
Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass die Zahl $g(m) + nm + g(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ eine Quadratzahl ist.

Weniger spezialisiert, aber mit viel Begeisterung: Weit mehr als 100 000 Schülerinnen und Schüler lösen jedes Jahr die 24 vorweihnachtlichen Knobelaufgaben des mathematischen Adventskalender unter www.mathekalender.de. Und mehr als sechs Millionen Schülerinnen und Schüler nehmen jedes Jahr am Schulwettbewerb „Känguru der Mathematik“ teil; diese Schülerwettbewerbe haben rund 50 % weibliche Teilnehmer.

Mathematik als Werkzeugkasten

Tom Lehrer, ein amerikanischer Kabarettist mit Mathematik-Abschluss von der Harvard University, schrieb in den 1990er Jahren seine eigene Antwort auf unsere Titelfrage als Titelsong für eine Kinderfernsehsendung über Mathematik. Er stellt einen weiteren Aspekt der Mathematik in den Vordergrund, die praktische Anwendbarkeit:

That's Mathematics

Counting sheep
When you're trying to sleep,
Being fair
When there's something to share,
Being neat
When you're folding a sheet,
That's mathematics!

When a ball
Bounces off of a wall,
When you cook
From a recipe book,
When you know
How much money you owe,
That's mathematics!

How much gold can you hold
in an elephant's ear?
When it's noon on the moon,
then what time is it here?
If you could count for a year,
would you get to infinity,
Or somewhere in that vicinity?

Schäfchen zu zählen,
wenn man einschlafen will,
gerecht zu sein,
wenn es was zu teilen gibt,
ordentlich zu sein,
wenn man ein Bettlaken faltet –
das ist Mathematik!

Wenn ein Ball
von der Wand abprallt,
wenn du nach
Kochbuch kochst,
wenn du weißt,
wie viel Geld du schuldest –
das ist Mathematik!

Wie viel Gold kannst du in einem
Elefantenohr halten?
Wie viel Uhr ist es hier,
wenn es auf dem Mond Mittag schlägt?
Wenn man ein Jahr lang zählt,
kommt man dann bis unendlich
oder zumindest in die Nähe davon?

When you choose
How much postage to use,
When you know
What's the chance it will snow,
When you bet
And you end up in debt,
Oh try as you may,
You just can't get away
From mathematics!

Wenn du heraussuchst,
wie viel Porto du brauchst,
wenn du weißt,
wie wahrscheinlich es schneit,
wenn du wettest,
und am Ende mit Schulden dasitzt –
oh, dreh's wie du willst,
du entkommst ihr einfach nicht,
der Mathematik!

Andrew Wiles gently smiles
Does his thing and voilà.
QED we agree and we all
shout horrah,
As he confirms what Fermat
Jotted down in that margin
Which could've used some enlargin'.

Andrew Wiles lächelt fein
macht sein Ding und voilà.
QED, wir stimmen ein und schreien
alle Hurra!
wenn er bestätigt, was Fermat
auf einem Rand notierte,
der ein Stück breiter hätte sein können.

Tap your feet,
Keepin' time to a beat,
Of a song
While you're singing along,
Harmonize
With the rest of the guys,
Yes, try as you may,
You just can't get away
From mathematics!

Wippe mit dem Fuß,
um den Takt zu halten,
bei einem Lied,
bei dem du mitsingst,
stimme dich ab,
mit dem Rest der Leute –
ja, dreh's wie du willst,
du entkommst ihr einfach nicht,
der Mathematik!

Mathematik ist ohne Zweifel nützlich – im Alltag begegnen wir alle verschiedensten Formen von Mathematik, sehen und benutzen sie. Wirtschaft und Industrie, Ingenieurwesen und Produktion, Logistik und Technologie basieren heutzutage sämtlich auf hochentwickelter Mathematik. (Mehr dazu im Kapitel „Anwendungen“, S. 335 ff.)

Was ist also Mathematik?

> Diese Frage kann nicht durch philosophische Allgemeinheiten, semantische Definitionen oder journalistische Umschreibungen befriedigend beantwortet werden. Beschreibungen dieser Art werden ja auch der Musik oder der Malerei nicht gerecht[,]

schrieb der namhafte Mathematiker Richard Courant 1964 [98]. Und weiter:

> Wie so oft gesagt wird, zielt die Mathematik auf fortschreitende Abstraktion, logisch strenge, axiomatische Deduktion und immer größere Verallgemeinerung. Eine solche Charakterisierung entspricht der Wahrheit, jedoch nicht der ganzen Wahrheit; sie ist einseitig, nahezu eine Karikatur der lebendigen Realität. [. . .] Die Wechselwirkung zwischen Allgemeinheit und Individualität, Deduktion und Konstruktion, Logik und Imagination – das ist das fundamentale Wesen der lebendigen Mathematik. Jeder einzelne dieser Aspekte der Mathematik kann im Mittelpunkt einer gegebenen Leistung stehen. Bei einer weitreichenden Entwicklung werden alle beteiligt sein. [98]

Richard Courant (1888–1972), Namensgeber eines der bekanntesten mathematischen Fachbereiche, des *Courant Institute for Mathematical Sciences* an der New York University (NYU), wurde 1888 in Schlesien geboren. Promoviert wurde er in Göttingen als Assistent von David Hilbert. 1933 emigrierte er nach New York.

Bekannt ist Courant nicht nur für seine Forschung, sondern auch für sein Buch *What is Mathematics?*, das in großen Teilen der jüngere Topologe Herbert Robbins in Rücksprache mit Courant schrieb. Courant hatte Geschäftssinn – so nahm er bereitwillig Thomas Manns Ratschlag an, das Buch nicht *Mathematische Untersuchungen grundlegender elementarer Probleme für das allgemeine Publikum* zu nennen.

Die erste Auflage brachte Courant 1941 im Selbstverlag heraus – und ließ auf den Probedrucken Robbins als Autor weg, was zu einem Zerwürfnis der beiden führte. Robbins bekannte später: „Als ich dieses Titelblatt sah, schoss es mir durch den Kopf: ‚Mein Gott, dieser Mann ist ein Gauner!' " [414]

Mathematik als Wissenschaft

Das Werden der Wissenschaft. Die Mathematik wächst – so rasant, dass heute niemand mehr einen kompletten Überblick über sie haben kann. Inzwischen wird man schier von der Masse erschlagen: Mehr als 100 000 Veröffentlichungen pro Jahr registriert inzwischen das zbMATH. Dieses Projekt, 1931 als *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* gegründet, hat die Aufgabe, mathematische Veröffentlichungen aufzuführen und, wenn sie wichtig sind, in Kurzzusammenfassungen darzustellen. Inzwischen ist das Zentralblatt als Datenbank unter zbmath.org im Internet zugreifbar: Es hat mehr als 4,3 Millionen Einträge aus fast zweihundert Jahren gesammelt, wobei weit über 90 % der Einträge in den letzten 50 Jahren hinzugekommen sind.

Doch auch schon viel früher war es nicht leicht, einen Überblick über weite Bereiche der mathematischen Forschung zu erarbeiten, was etwa um 1900 nur noch einzelnen großen Köpfen wie David Hilbert und Henri Poincaré gelang.

Vor 200 oder 300 Jahren hat sich in Europa nur eine relativ kleine Elite mit Mathematik beschäftigt, die ihr Wissen in der Regel auf dem Postweg teilte. Erst allmählich veränderte sich im 18. Jahrhundert der Wissensaustausch. Die ersten Journale entstanden und Mathematik wurde zunächst gleichberechtigt neben anderen Wissenschaften behandelt. Das erste Wissenschaftsjournal, die 1682 gegründete *Acta Eruditorum*, kann man sich wie eine Briefsammlung vorstellen. Der Literaturwissenschaftler Olaf Simons zählt darin zwischen 10 und 15 % mathematische Beiträge; die Mathematik lag damit weit hinter der Philosophie und der Medizin.

Unter anderem die – im Vergleich zu heute – schwierige Kommunikation und die fehlenden Suchmöglichkeiten führten dazu, dass viele Entdeckungen mehrmals gemacht wurden, bevor sie zu Allgemeingut wurden. Oft ist es nicht einmal klar, wer was wann beigetragen hat und ab wann man davon sprechen kann, dass der Geburtsvorgang einer Theorie oder eines Objektes abgeschlossen war.

Die Professionalisierung der Wissenschaften setzte erst allmählich ein, mit einer Beschleunigung um 1800. Dazu trug vor allem die Einrichtung von Wissenschaftsakademien und – in napoleonischer Zeit – polytechnischen Hochschulen bei. Viele Namen derer, die dort im ausgehenden 18. und beginnenden 19. Jahrhundert forschten und lehrten, kennt man noch heute: Leonhard Euler, Augustin-Louis Cauchy, Joseph Fourier, Pierre-Simon de Laplace, Joseph-Louis Lagrange und Carl Friedrich Gauß. Aus derselben Zeit stammt auch die erste Fachzeitschrift, die allein mathematischer Forschung gewidmet ist (in der Anfangszeit neben Aufsätzen aber auch viele Briefe publiziert hat) und auch heute noch weitergeführt wird: Das *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1826 von August Leopold Crelle gegründet und noch heute unter dem Namen Crelles Journal bekannt.

Die Mathematik fand erst langsam zu dem, was heute in der Literatur als „Strenge“ (rigor) bezeichnet wird. Wie nötig es ist, Aussagen und Beweise klar (auch typographisch) zu trennen, Annahmen und Voraussetzungen explizit zu formulieren und Beweise sauber durchzuführen, wurde erst im Laufe der vergangenen 200 Jahren klar. Diese Entwicklung ist noch nicht abgeschlossen: Seit einigen Jahren werben Mathematiker wie Georges Gonthier oder Leslie Lamport oder der 2017 verstorbene Vladimir Voevodsky dafür, Beweise standardmäßig so aufzuschreiben (zu formalisieren), dass sie mit Computerhilfe auf Richtigkeit überprüft werden können.

Wer glaubt, dass Mathematik ein Gebäude ist, das ohne Fehler und Lücken Stein auf Stein nach einem großen Plan errichtet wird, der irrt. Mathematische Begriffe wandeln sich: Was wir heute als „Menge“ kennen, hieß zum Beispiel eine Zeit lang „System“ und zu anderer Zeit „Mannigfaltigkeit“. Die „Gruppen“, die der jugendliche Evariste Galois in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts betrachtete, machen nur einen Teil dessen aus, was wir heute unter „Gruppen“ verstehen. Der publizierte und allgemein anerkannte Beweis eines Theorems kann aus hunderten oder tausenden Teilbeweisen bestehen, von denen manche auch falsch oder zumindest unvollständig oder unverständlich sein könnten. Große Forschungsprojekte wie die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen oder der Beweis der Fermat'schen Vermutung basieren auf der Arbeit vieler Autorinnen und Autoren, die über viele Jahrzehnte hinweg entstanden sind. Es ist mindestens schwierig, über solche Mammutprojekte in ihrer Gesamtheit einen Überblick zu gewinnen und sich von der Richtigkeit, Vollständigkeit und Stimmigkeit der Hauptergebnisse zu überzeugen. Kurz: Die Mathematik und ihre Geschichte sind verzweigt und verzwickt.

„Ich arbeite auf einer Reihe von Gebieten, aber ich sehe sie nicht als unzusammenhängend an; ich tendiere dazu, Mathematik als ein ungeteiltes Fach anzusehen und bin besonders froh, wenn ich Gelegenheit habe, an einem Projekt zu arbeiten, in dem mehrere Arbeitsfelder zusammenkommen.“ – Terence Tao [491]

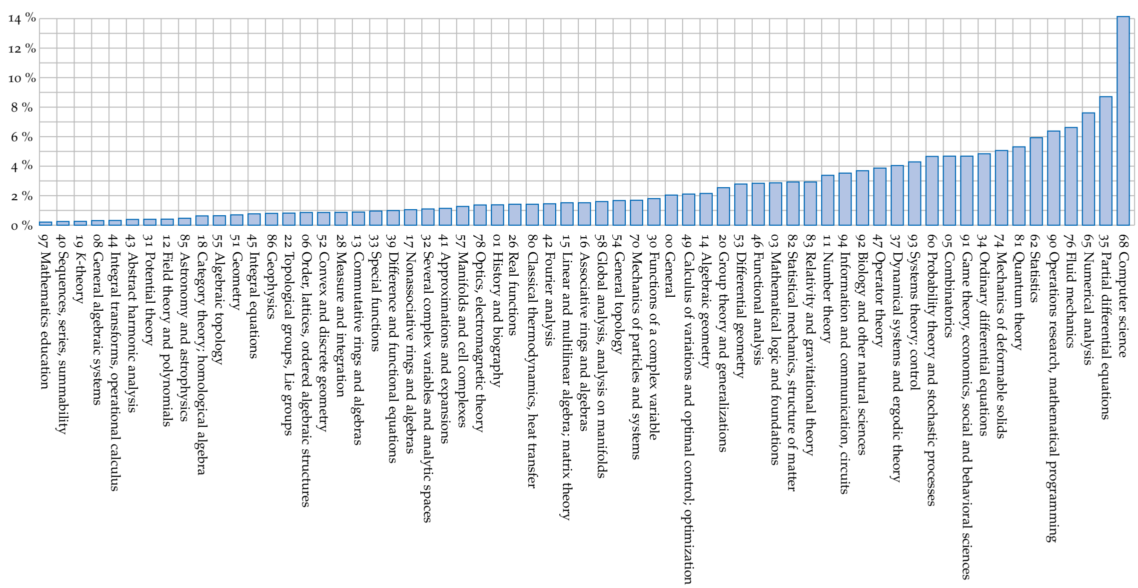
„Mathematik macht Spaß, solange du dich dabei nicht von Mathematikern rumschubsen lässt.“ – Jack Edmonds, A Glimpse of Heaven [316, S. 35]

Versuchen wir dennoch einen groben Überblick. Wie sah die mathematische Forschung vor 100 Jahren aus? Was hat man vor 500 Jahren erforscht? Keith Devlin, ein britischer Mathematiker, Buchautor und Wissenschaftsjournalist, entwarf vor einigen Jahren einen Kurzabriss der Mathematik [123], auf dem wir hier aufbauen; wir erweitern und ergänzen Devlins Kurzgliederung:

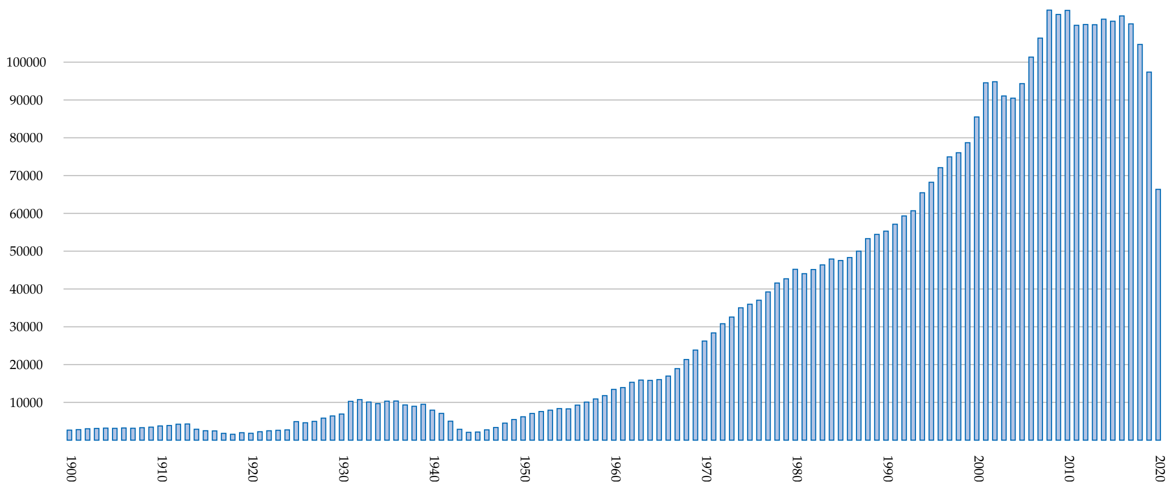
- ◇ Bis 500 v. Chr.: Mathematik ist „Wissenschaft von den Zahlen“, dominiert von praktischer Anwendung.
- ◇ 500–300 v. Chr.: Griechische Mathematik nimmt Zahlen vornehmlich als (Längen-)Maße wahr. Die Griechen haben einen geometrischen Blick auf die Dinge. Anwendungen sind nicht mehr der einzige Grund, um Mathematik zu studieren: Sie wird zu einer intellektuellen Beschäftigung, die religiöse und ästhetische Elemente in sich vereint.
- ◇ 9.–17. Jahrhundert: Allmählich entstehen die Anfänge der Algebra, vor allem durch Einflüsse aus dem arabischen Raum. So entdeckt man zum Beispiel neue systematische Wege, Gleichungen zu lösen. Allmählich entsteht die Basis der modernen Notation.

◇ 17. Jahrhundert: Die Entwicklung der Differential- und Integralrechnung führt zu einem neuen, gewaltigen Schub in den Anwendungen, denn nun können erstmals nichtstatische Probleme angepackt werden (z. B. die Newtonschen Gesetze in der Mechanik). „Nach Newton und Leibniz wurde Mathematik zu einem Studium von Zahlen, Formen, Bewegung, Änderung und Raum.“ (Devlin [123])
◇ 18./19. Jahrhundert: Die Mathematik beginnt sich in der Folge von der Physik abzulösen und zu einer eigenständigen Wissenschaft zu entwickeln, die die mathematischen Werkzeuge untersucht, die in der Zeit zuvor entwickelt wurden.
◇ 20. Jahrhundert: Es findet eine Wissensexplosion statt.

Die moderne Mathematik lässt sich in eine Unmenge verschiedener Teilgebiete aufgliedern. An einer Klassifizierung dieser Teilgebiete arbeiten unter anderem das zbMATH und die Mathematical Reviews, die zwei großen Referateorgane der Mathematik, gemeinsam seit dem Jahr 2000. Aktuell gliedern sie die Mathematik nach dem Standard der Mathematics Subject Classification 2020 (MSC2020) in einer Baumstruktur in drei



Die Größe der mathematischen Fachgebiete nach der MSC-Klassifikation, gemessen an der Zahl der in der Datenbank des zbMATH aufgeführten Arbeiten im Jahr 2011.



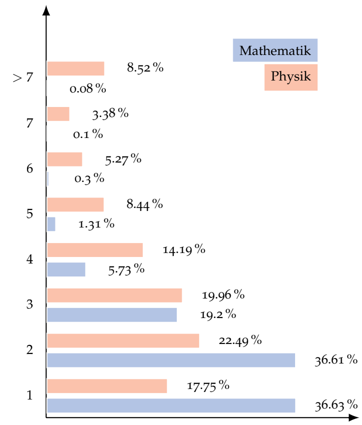
Vom zbMATH bis Dezember 2020 registrierte mathematische Veröffentlichungen 1900–2020. Man beachte, dass das Zentralblatt MATH seit seiner Gründung 1931 mehrere andere Referenzorgane „geschluckt“ hat, wobei Dopplungen nicht eliminiert wurden. Dadurch werden Arbeiten doppelt gezählt, was die Statistik besonders in den 1930er und 1940er Jahren verfälscht. Zudem sind die Arbeiten aus den letzten Jahren noch nicht vollständig registriert.

Ebenen. Es gibt 63 große Forschungsfelder. Aus historischen Gründen sind sie von 00 bis 97 durchnummeriert.

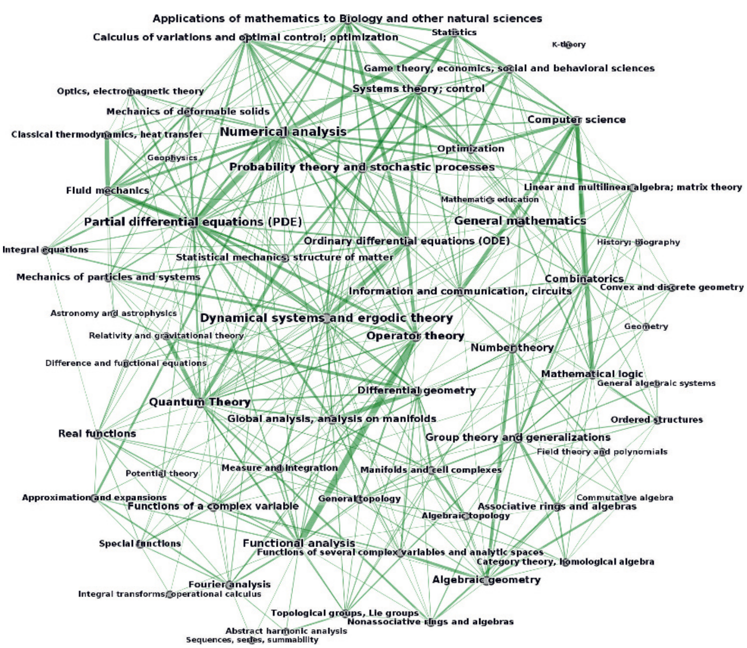
In den Ebenen darunter gliedert sich die Mathematik in mehr als 6000 Unterklassen auf. Im Forschungsgebiet 52 geht es zum Beispiel um „Convex and discrete geometry“, also Konvexgeometrie und Diskrete Geometrie. Dieses wird aufgeteilt in Übersichtsdarstellungen, Lehrbücher, Historisches, Software, Daten, usw., und ansonsten die drei großen Teile 52A „General convexity“, 52B „Polytopes and polyhedra“ sowie 52C „Discrete geometry“, zu dem wiederum zum Beispiel 34M03 gehört: „Quasicrystals and aperiodic tilings in discrete geometry“, also Quasikristalle und andere aperiodische Pflasterungen.

MSC ist jedoch nicht die einzige Gliederungsschema für die Mathematik. Auf dem größten und bekanntesten Preprint-Server für Mathematik, Informatik und Physik, dem `arXiv`, das unter arXiv.org frei zugänglich ist, werden mathematische Arbeiten in 32 andere Themengebiete eingeteilt; „Konvexgeometrie“ und „Diskrete Geometrie“ (MSC-Gebiet 52) sind hier zum Beispiel gar nicht explizit aufgeführt; die Aufsätze aus diesen Gebieten finden sich im `arXiv` hauptsächlich unter „Combinatorics“ und „Metric Geometry“. Im `arXiv`, das seit 1991 existiert, stehen aktuell (Anfang 2022) über 2 Millionen wissenschaftliche Aufsätze frei zum Abruf bereit, um gelesen und vielleicht auch diskutiert zu werden. Ein knappes Drittel davon ist aus der Mathematik; insgesamt wurden im Jahr 2021 insgesamt fast 380 Millionen Downloads registriert.

Entwicklung als moderne Wissenschaft. Will man die Entwicklung der modernen Mathematik seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts etwas detaillierter beschreiben, kommt man an einem Namen nicht vorbei: Augustin-Louis Cauchy. Von der Ausbildung her war er eigentlich Ingenieur – und damit ein Kind seiner Zeit. In den Jahren um 1800 wurden in Frankreich die Anwendungen der Mathematik gefördert, weil die Revolution vielen Intellektuellen buchstäblich Kopf und Kragen gekostet hatte. So herrschte ein Fachkräftemangel. Gleichzeitig waren die Universitäten nicht mehr „modern“ genug zur fachlichen Ausbildung der künftigen Beamten und Militärs, die der neuen (bald: napoleonischen) Verwaltung dienen konnten. 1794 wurde daher in Paris die *École Centrale des Travaux Publics* (Zentrale Schule für öffentliche Arbeiten) gegründet und im folgenden



Autorenzahl pro Arbeit im `arXiv`. Erfasst wurde hier der Zeitraum Januar 2012 bis Dezember 2013. In der Physik sind Arbeiten mit mehreren Autorinnen und Autoren verbreiteter als in der Mathematik.



Ein Bild der modernen Mathematik, wie es sich im zbMATH widerspiegelt. Gezeigt werden die Oberbegriffe aus dem MSC-Schema. Die Stärke der Kanten zwischen zwei Bereichen deutet an, wie viele Arbeiten es gibt, die in beiden Gebieten eingeordnet sind. Die Schriftgröße deutet die Anzahl der Arbeiten im jeweiligen Feld an.

Jahr in *École Polytechnique* (Polytechnikum) umbenannt; bis heute ist sie dem Verteidigungsministerium untergliedert. Sie wurde für die Mathematik besonders wichtig, auch, weil 1815 Cauchy dort zu lehren begann. 1821 veröffentlichte er mit seinem *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* ein Lehrbuch, das sehr schnell zum Standardwerk für die Analysis avancierte. Es liest sich sehr anders als die Vorläufer: klar, knapp, konzentriert. Cauchy versucht, alle Begriffe, die er benötigt, exakt zu fassen, und erfindet dafür auch neue Notation – Beispiel: Mehrwertige Funktionen bezeichnet Cauchy mit Doppelklammern, etwa bei der Wurzelfunktion $((x))^{\frac{1}{a}}$.

Die Differential- und Integralrechnung hatte im 18. Jahrhundert völlig neue Möglichkeiten in der Physik und Ingenieurskunst eröffnet. Was nun, zu Anfang des 19. Jahrhunderts, gebraucht wurde, war: Analysis, eine Lösungstheorie für Differentialgleichungen und Methoden zur Integration.

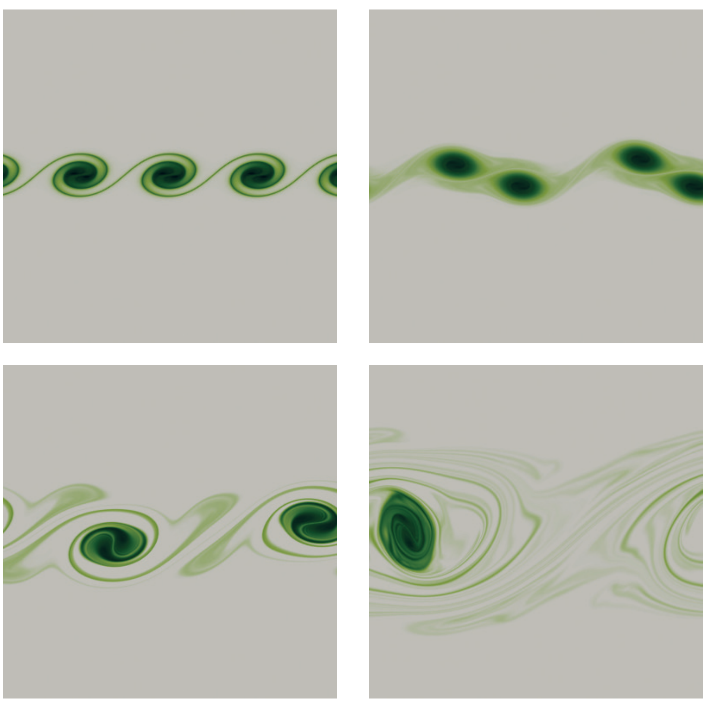
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) wurde mitten in die Französische Revolution geboren. Er lernte an der jungen École Polytechnique von 1805–1807 und arbeitete ab 1810 am Bau des Militärhafens von Cherbourg mit. In der Mathematik untersuchte er zunächst – privatim – Polyeder und veröffentlichte dazu ab 1812 mehrere Arbeiten. Seine Interessen wandelten sich aber allmählich in Richtung Integralrechnung, Funktionen und Analysis. Immer wieder und mit wachsender Verzweiflung bewarb er sich um einen akademischen Posten in Paris. Seine schwierige Persönlichkeit, sein strenger Katholizismus und seine Herkunft aus royalistischem Elternhaus machten es ihm indessen in Revolutionszeiten nicht leicht, im akademischen Bereich Fuß zu fassen. 1815 erhielt er endlich einen Lehrstuhl an der École Polytechnique, der Beginn der ersehnten Laufbahn als akademischer Forscher und Lehrer. 1821 veröffentlichte Cauchy die ersten Früchte dieser Lehre, den *Cours d'Analyse*. 1830 musste er aber aus politischen Gründen aus Frankreich emigrieren und verbrachte die folgenden zehn Jahre in Freiburg, Turin und Prag. 1839 konnte er nach Paris zurückkehren.

Ein Bild der modernen Mathematik, wie es sich im `arXiv` widerspiegelt. Gezeigt sind die 32 `arXiv`-Klassen der Mathematik (blau) und die angrenzenden Gebiete (rot: Informatik, lila: Physik, grün: Statistik). Die Stärke der Kanten deutet an, wie viele Arbeiten es gibt, die in jeweils beiden Gebieten eingeordnet sind. Die Größe der Schrift reflektiert die Anzahl der Arbeiten im jeweiligen Gebiet.

Anwendungen gab es allerorten. Beispiel: 1820, als Cauchy noch an seinem Lehrbuch arbeitete, formulierte sein Kollege Claude-Louis Navier, Professor an der École des Ponts et Chaussées (Schule für Brücken und Landstraßen), die heute nach ihm benannten Differentialgleichungen zur Beschreibung der Bewegung von Flüssigkeiten. Einige Jahre später sollte Navier Cauchy an der École Polytechnique ablösen, als dieser ins Exil ging. An einer Lösungstheorie der Navier-Stokes-Gleichungen wird heute noch gearbeitet; sie ist eines der Millenniumsprobleme, auf die eine Million Dollar ausgeschrieben sind.

Cauchys *Cours d'Analyse* wurde zu einem wichtigen und einflussreichen Werk. Viel ehrgeiziger, aber heute kaum mehr als eine Randnotiz der Mathematik, war dagegen das Vorhaben Martin Ohms, des älteren Bruders des bekannten Physikers Georg Simon Ohm. Martin wurde 1821 Privatdozent für Mathematik in Berlin und unternahm bis 1855 einen „ohngefähr auf

Naviers Brücke. Naviers ehrgeizigstes Projekt war der Bau einer Hängebrücke über die Seine. Nach jahrelanger Planung begannen die Arbeiten im August 1824. In der Nacht vom 6. zum 7. September 1826, wenige Wochen vor der geplanten Eröffnung, wurde einer der Pfeiler unterspült und brach. Die Brücke wurde unbenutzt wieder abgerissen [72] – eine herbe Enttäuschung für Navier.



Die Navier-Gleichungen, unabhängig auch von George Stokes formuliert, beschreiben, wie eine Flüssigkeit in zwei oder drei Dimensionen unter Einbeziehung von Wärmefluss und Reibung strömt. Sie bestehen aus drei Teilen: der *Kontinuitätsgleichung* (Flüssigkeit geht nirgendwo „verloren" oder wird aus dem Nichts erzeugt), den *Impulsgleichungen* (Impulserhaltung) und den *Energiegleichungen* (Energieerhaltung).

Navier-Gleichungen werden in Physik und Technik zwar oft numerisch gelöst, eine allgemeine Lösungstheorie fehlt aber noch immer: Eines der *Millennium-Probleme* des Clay Mathematics Institutes dreht sich um die Frage, unter welchen Bedingungen es eindeutige stetige Lösungen für das Gleichungssystem gibt, wann die Gleichungen also die Strömung eindeutig festlegen.

Die Bilder zeigen sich mischende Flüssigkeiten gleicher Viskosität, die quasi aufeinander gleiten und dabei ineinander wirbeln. Die Farben kodieren die Wirbelstärke: Je stärker die Wirbel, desto dunkler das Grün. (Bilder: Volker John, WIAS/FU Berlin)