WILEY-VCH

Rainer Ansorge, Hans J. Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar

Brückenkurs Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften

Brückenkurs Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften

Brückenkurs Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften

Rainer Ansorge, Hans J. Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar

WILEY-VCH

Autoren

Prof. Dr. Rainer Ansorge
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Prof. Dr. Hans J. Oberle
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Dr. Kai Rothe
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Prof. Dr. Thomas Sonar
TU Braunschweig
Institut für Partielle Differentialgleichungen
Universitätsplatz 2
38106 Braunschweig

Titelbild
Unter Verwendung der Abbildung iStock, 624878906/nevarpp

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Druck und Bindung

Print ISBN 978-3-527-41378-2
ePDF ISBN 978-3-527-82298-0
ePub ISBN 978-3-527-82297-3

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur fünften Gesamtauflage

Dieser Band über den Brückenkurs ist neben den beiden Lehrbüchern mit den zugehörigen Aufgabenbänden der fünfte aus dem Zyklus Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften. Er ist entstanden aus dem Konzept und dem Unterrichtsmaterial eines zehntägigen Brückenkurses Mathematik mit drei Stunden Vorlesung, zwei Stunden Kleingruppenübung und zwei Stunden Hörsaalübung je Tag, der vor Studienbeginn von uns seit 2009 an der Technischen Universität Hamburg-Harburg durchgeführt wird. Dieser Brückenkurs wiederholt ohne Anspruch auf Vollständigkeit gelernte Schulmathematik und gibt einen Ausblick auf die Hochschulmathematik, wie sie traditionell im ersten Semester vermittelt wird.

Erfahrungsgemäß sind die mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten der Studienanfänger sehr unterschiedlich. Den verschiedenen Bedürfnissen wurden in den zurückliegenden Jahren die dargestellten Inhalte angepasst, so dass einige Themen ausführlicher besprochen oder sogar erst aufgenommen wurden.

Für dieses Buch wurde das in der Lehrveranstaltung verwendete Material in eine Form mit ausführlichem Text umgeschrieben. Zum besseren Verständnis wichtiger mathematischer Ergebnisse wurden vielfach die zugehörigen Begründungen ergänzt als Text vor dem jeweiligen Ergebnis oder mit der Bemerkung Beweis im Anschluss an das Ergebnis. An verschiedenen Stellen wurde der Inhalt auch erweitert, um Lücken in der Darstellung zu schließen und um einen besseren Überblick zu geben. Ein umfangreiches Inhalts- und Stichwortverzeichnis erleichtern das Auffinden mathematischer Themen und Begriffe. Etwa 300 Abbildungen dienen der Anschauung und dem besseren Verständnis zugehöriger Rechnungen. Die Anwendung der Theorie wird an mehr als 400 Beispielen erklärt. Am Ende eines jeden Kapitels werden Aufgaben zum eigenständigen Üben des vermittelten Stoffes gestellt. Die eigenen Rechnungen können mit den ausführlichen Lösungen der mehr als 100 Aufgaben am Ende Buches verglichen werden. Der vorliegende Band eignet sich damit sowohl als begleitender Text zu einem Brückenkurs als auch zum Selbststudium oder einfach nur zum Nachschlagen mathematischer Begriffe.

Der Inhalt beginnt im ersten Kapitel mit elementarer Aussagenlogik, der Basis mathematischer Denk- und Schlussweisen, gefolgt von Mengen und einem Überblick über das Zahlensystem mit zugehörigen Rechenregeln bis hin zu den reellen Zahlen. Zwischendurch werden an geeigneter Stelle Schulkenntnisse wie Teilbarkeit, binomische Formeln, Ordnungseigenschaften und Intervalle erklärt. Der Leser wird mit den abkürzenden und symbolischen Bezeichnung vertraut gemacht, auf die später immer wieder zurückgegriffen wird und ohne die mathematische Texte schwer verständlich sind.

Das zweite Kapitel über elementare Arithmetik ist auf vielfachen Wunsch von Studienanfängern aufgenommen worden, die ihre Schulkenntnisse aus dem Bereich der Mittelstufe und ihre Rechenfertigkeiten verbessern wollten, ohne dabei auf weitere Bücher zurückgreifen zu müssen. Dieses Kapitel kann also im Selbststudium bei Bedarf durchgearbeitet oder von Dozenten eines Brückenkurses übersprungen werden.

Im dritten Kapitel über Gleichungen und Ungleichungen wird der Weg zur Bestimmung von Lösungsmengen durch zulässige Termumformungen beschrieben und an Beispielen erklärt.

Funktionen und ihre Eigenschaften werden im vierten Kapitel dargestellt und durch Beispiele veranschaulicht. Es wird ein ausführlicher Überblick über elementare Funktionen wie Polynome, gebrochen rationale Funktionen, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktion und Hyperbelfunktionen sowie deren Umkehrfunktionen gegeben. Dabei soll die Vielzahl der aufgeführten Funktionsgraphen das qualitative Verständnis der Funktionen fördern. Rechentechniken wie quadratische Ergänzung oder Polynomdivision und Rechengesetze wie Additionstheoreme oder Logarithmengesetze können bei Bedarf später an dieser Stelle nachgeschlagen werden. Die Darstellung und Erklärung der Eigenschaften dieser elementaren Funktionen ist auch deshalb so umfangreich geworden, weil sie die Basis der Analysis reellwertiger Funktionen einer reellen Variablen bilden.

Als Vorbereitung auf Kapitel sechs werden in Kapitel fünf Vektoren mit den Verknüpfungen Vektoraddition und skalare Multiplikation erklärt. Für die Längenberechnung von Vektoren wird der Satz des Pythagoras benötigt. In diesem Zusammenhang werden auch Ergebnisse der Dreiecksgeometrie von Euklid und Thales dargestellt. Mit dem Skalarprodukt können Winkel zwischen Vektoren berechnet werden. Im dreidimensionalen Raum kann ein senkrechter Vektor zu zwei vorgegebenen Vektoren mit dem Kreuzprodukt berechnet werden.

Im sechsten Kapitel werden lineare Gleichungssysteme durch Matrizen und Vektoren dargestellt und mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren gelöst. Als Lösungsmengen im zwei und dreidimensionalen Raum ergeben sich beispielsweise Geraden oder Ebenen. Diese besitzen auch eine Darstellung in Parameterform. Anschließend wird ein Ausblick auf Lösungsmengen quadratischer Gleichungen gegeben. Es entstehen unter anderem Kreise, Ellipsen und Hyperbeln im zweidimensionalen Raum und Oberflächen von Zylindern, Kegeln und Kugeln im dreidimensionalen Raum. Auch diese geometrischen Objekte können durch Parameterformen beschrieben werden. Die Lösungsmengen des Gleichungssystems bestehend aus einer quadratischen Gleichung, die einen Doppelkegel beschreibt, und einer Ebenengleichung werden als Kegelschnitte bezeichnet und veranschaulicht.

Grundlegend für die nächsten drei Kapitel sind Grenzwertprozesse. In Kapitel sieben werden Grenzwerte für konvergente Folgen erklärt. Mit Hilfe der Grenzwerte bekannter elementarer Folgen und Rechenregeln für konvergente Folgen können weitere Folgen auf Konvergenz hin untersucht und berechnet werden. Reihen wie beispielsweise die geometrische Reihe können als Folgen von Partialsummen interpretiert werden. Über konvergente Folgen im Definitionsbereich einer Funktion können Grenzwerte von Funktionen im Wertebereich erklärt werden. Dies führt dann auf den Begriff der Stetigkeit einer Funktion. Stetige und unstetige Funktionen werden an verschiedenen Beispielen veranschaulicht.

Das Wachstumsverhalten einer Funktion wird im achten Kapitel durch die Ableitung, die als Differentialquotient definiert wird, beschrieben. Für elementare Funktionen werden dann die Ableitungen über Differentialquotienten hergeleitet. Über Ableitungsregeln können Ableitungen weiterer Funktionen, die sich aus elementaren Funktionen zusammensetzen, berechnet werden. Zu diesen Regeln wird eine große Anzahl von Beispielen angegeben. Durch Ableitungen erster und auch höherer Ordnung können Funktionen auf Monotonie, Extremwerte, Konvexität und Wendepunkte hin untersucht werden. An Beispielen werden anschließend in einer Kurvendiskussion die Ergebnisse der Funktionsanalyse zusammengefasst.

Integrale für beschränkte Funktionen werden im neunten Kapitel erklärt. Bestimmte Integrale können als Flächen interpretiert werden und unbestimmte Integrale geben Stammfunktionen zur Ableitung von Funktionen an. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass vereinfacht dargestellt die Integration die Differentiation umkehrt. An vielen Beispielen wird dann die Berechnung von Stammfunktionen durch Integrationsregeln erklärt. Zum Schluss wird ein Ausblick auf uneigentliche Integrale für unbeschränkte Funktionen gegeben.

Im zehnten und letzten Kapitel wird der Zahlenbereich um die komplexen Zahlen erweitert. Für quadratische Funktionen ohne reelle Nullstellen können durch die Definition einer imaginären Einheit komplexe Nullstellen berechnet werden. Eine komplexe Zahl setzt sich dann als Summe aus einem reellen und einem imaginären Anteil zusammen. Es werden anschließend die Rechenregeln für Addition und Multiplikation von den reellen auf die komplexen Zahlen übertragen. Mit diesem Ausblick auf das erste Semester endet der Inhalt dieses Bandes über den Brückenkurs.

Für die Initiative und die Anregung den Brückenkurs Mathematik, der seit vielen Jahren an der TU Hamburg-Harburg zu Beginn des ersten Semesters durchgeführt wird, uns zu übertragen, möchten wir uns bei Frau Dr. Kiani und Prof. Dr. Mackens bedanken. Der erste durchgeführte Kurs hat sich am Grundkonzept und dem zur Verfügung gestellten Material der Vorgängerinnen Dr. Bohnet und Dr. Kaland orientiert. Herzlichen Dank dafür an dieser Stelle. Wir danken nicht zuletzt dem Wiley-VCH Verlag, insbesondere den Herren Dr. Preuß und Dr. Sendtko, für die freundliche Zusammenarbeit und die Bereitschaft, unsere bisherigen Lehrbücher und Aufgabenbände durch diesen fünften Band über einen Brückenkurs zu ergänzen.

Hamburg, Braunschweig, im März 2022 *Die Verfasser*

1
Aussagenlogik, Mengen und Zahlen

In mathematischen Formulierungen werden vielfach abkürzende und symbolische Ausdrücke der Übersichtlichkeit wegen verwendet. In diesem Kapitel werden Grundlagen und symbolische Bezeichnungsweisen zusammengefasst, die bei späteren Darstellungen immer wieder verwendet werden. Als Basis mathematischer Denk- und Vorgehensweise werden zunächst Grundsätze der Aussagenlogik erklärt. Anschließend werden Mengen und deren Darstellungen beschrieben. Von grundsätzlicher Bedeutung für mathematische Berechnungen sind Zahlen mit den zugehörigen Rechenregeln für Addition und Multiplikation. Hier wird ein Überblick über das Zahlensystem bis einschließlich der reellen Zahlen gegeben. Dabei werden an geeigneter Stelle aus der Schule bekannte Begriffsbildungen wie beispielsweise Teilbarkeit, der binomische Lehrsatz und Intervalle erklärt.

1.1 Aussagenlogik

Grundlegend für die Untersuchung und Ergebnisformulierung mathematischer Sachverhalte ist die Aussagenlogik. In Sätzen werden Aussagen formuliert, die unter den dort angegebenen Voraussetzungen gelten. Die vollständige und lückenlose Erklärung, weshalb die Aussage im Satz unter den Voraussetzungen richtig ist, bezeichnet man als Beweis. In der Aussagenlogik werden Aussagen in unterschiedlicher Weise mit Aussagen verknüpft, um neue Aussagen zu erhalten.

1.1.1 Aussagen

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, bei dem eindeutig entschieden werden kann, ob es wahr oder falsch ist. Eine dritte Möglichkeit für den *Wahrheitswert* einer Aussage (*tertium non datur*) gibt es nicht. Ob oder von wem der Wahrheitswert ermittelt werden kann, ist nicht von Bedeutung. Der Inhalt einer Aussage ist nicht Gegenstand der Aussagenlogik.

Der Sachverhalt einer Aussage wird im Allgemeinen sprachlich durch einen grammatikalisch korrekten Satz beschrieben. Eine grammatikalisch falsche Formulierung verändert die Aussage jedoch nicht, solange der Sachverhalt unverändert bleibt.

Als Abkürzung für die sprachliche Formulierung einer Aussage werden häufig große Buchstaben aus dem Alphabet beispielsweise A, B oder C verwendet. Für den Wahrheitswert $w(A)$ einer Aussage A werden als Abkürzungen 1 oder w für richtig und 0 oder f für falsch verwendet.

Brückenkurs Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften, R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe und T. Sonar.

Keine Aussagen sind sprachliche Formulierungen wie Fragen, Befehle oder Ausrufe.

Beispiele für Aussagen

A: $3 \cdot 3 = 9$, $w(A) = 1$, B: $3 + 3 = 9$, $w(B) = 0$,
C: Napoleon Bonaparte ist 1,58 m groß gewesen. D: Wir sind in der Bibliothek.

Keine Aussagen

E: Welcher Tag ist heute? F: Geh in die Bibliothek! G: Hallo! H: $x^2 + y^2$.

1.1.2 Verknüpfung von Aussagen

Aussagen können untereinander verknüpft werden. Ein inhaltlicher Zusammenhang zwischen verknüpften Aussagen muss nicht bestehen. Die logischen Verknüpfungszeichen werden *Junktoren* genannt.

Der Wahrheitswert der durch Verknüpfung entstandenen neuen Aussage bestimmt sich allein durch die Wahrheitswerte der daran beteiligten elementaren Aussagen A und B. Es werden die folgenden Junktoren beschrieben.

Übersicht über Junktoren.

	Bezeichnung	**Sprachliche Formulierung**
$\neg A$	Negation	Nicht A
$A \vee B$	Disjunktion	A oder B
$A \wedge B$	Konjunktion	A und B
$A \Rightarrow B$	Implikation	Aus A folgt B
$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz	A ist äquivalent zu B

Die Wahrheitswerte verknüpfter Aussagen werden mit Hilfe von *Wahrheitstafeln* festgelegt. In einer Wahrheitstafel stehen in der ersten Zeile die beteiligten Aussagen und deren Verknüpfungen. In den weiteren Zeilen stehen die zugehörigen Wahrheitswerte. In der letzten Spalte der Tafel wird der Wahrheitswert der verknüpften Aussage aufgeführt.

Bei $n = 1, 2, 3, \ldots$ beteiligten elementaren Aussagen ergeben sich 2^n Zeilen für alle verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten der Wahrheitswerte. Diese Anzahl erhält man beispielsweise induktiv. Bei einer Aussage A gibt es zwei Möglichkeiten. Bei zwei Aussagen A und B gibt es die beiden Wahrheitswerte von A für die beiden Fälle, dass B richtig oder falsch ist. Damit erhält man vier verschiedene Wahrheitswertkombinationen. Kommt eine weitere Aussage C hinzu, so erhält man die vier Varianten von A und B für die beiden Fälle, dass C richtig oder falsch ist, also insgesamt acht Möglichkeiten. Dieses induktive Prinzip setzt sich dann allgemein für die nächst höhere Anzahl der beteiligten elementaren Aussagen fort.

Negation (nicht): Die Negation von A ist falsch, wenn A wahr ist, und wahr, wenn A falsch ist. Der Wahrheitswert wird durch $\neg$ also genau umgekehrt.

Wahrheitstafel zu „$\neg$“.

A	$\neg A$
1	0
0	1

Beispiele

a) $A\,:\,3 \cdot 3 = 9$, $w(A) = 1$ führt auf $\neg A\,:\,3 \cdot 3 \neq 9$, $w(\neg A) = 0$.

b) $B\,:\,3 + 3 = 9$, $w(B) = 0$ führt auf $\neg B\,:\,3 + 3 \neq 9$, $w(\neg B) = 1$.

Disjunktion (oder): Die Disjunktion von zwei Aussagen A, B ist nur dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind. Das umgangssprachliche „entweder A oder B“, bei dem nur eine Aussage richtig sein darf, ist hier nicht gemeint.

Wahrheitstafel zu „$\vee$“.

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Beispiele

a) $A \vee B\,:\,(3 \cdot 3 = 9) \vee (3 + 3 = 9)$ ist eine wahre Aussage.

b) A oder $\neg A$ ist in jedem Fall richtig, denn eine von beiden Aussagen A oder $\neg A$ ist immer wahr.

Wahrheitstafel zu „$A \vee \neg A$“.

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
1	0	1
0	1	1

Eine Aussage, die in jedem Fall richtig ist, wird als *Tautologie* bezeichnet.

Konjunktion (und): Die Konjunktion von zwei Aussagen A, B ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. In allen anderen Fällen ist sie also falsch.

Wahrheitstafel zu „$\wedge$“.

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Beispiel

Wahrheitstafel zu „$A \wedge \neg A$“.

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
1	0	0
0	1	0

Diese Aussage ist in jedem Fall falsch, denn A und $\neg A$ haben entgegengesetzte Wahrheitswerte, können also nicht beide richtig sein.

Implikation (wenn ..., dann ...): Für die Aussagen A und B ist die Implikation $A \Rightarrow B$ nur falsch beziehungsweise nicht zulässig, wenn A richtig und B falsch ist.

Das bedeutet, dass aus einer richtigen Aussage A nicht auf eine falsche Aussage B geschlossen werden kann, sondern nur auf eine richtige. Wenn also A gilt, dann gilt notwendig auch B. Dieses Prinzip bildet die Grundlage mathematischer Beweise. Beim direkten *Beweis* startet man mit einer richtigen Aussage (Voraussetzung) und erhält durch eine Folge von gültigen Implikationen am Ende notwendig eine richtige Aussage (Behauptung).

Vom Standpunkt der Aussagenlogik muss zwischen den beiden Aussagen A und B kein inhaltlicher Zusammenhang bestehen, damit $A \Rightarrow B$ richtig sein kann. Bei mathematischen Schlussfolgerungen besitzt dieser Aspekt in der Regel jedoch keine Bedeutung.

Wahrheitstafel zu „$\Rightarrow$“.

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Beispiele (die vier Fälle bei Gleichungsumformungen)
A: $1 = 1 \Rightarrow B : 3 = 3$, $+2$ auf jeder Seite von A ist erlaubt.
A: $1 = 1 \Rightarrow B : 1 = 3$, $+2$ nur auf einer Seite von A ist falsch.
A: $1 = 2 \Rightarrow B : 0 = 0$, $\cdot\, 0$ auf jeder Seite von A ist erlaubt.
A: $1 = 2 \Rightarrow B : 3 = 4$, $+2$ auf jeder Seite von A ist erlaubt.

Beispiel Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heißt *Primzahl*, wenn n genau die beiden Teiler 1 und n besitzt.

Betrachtet werden jetzt die beiden folgenden Aussagen A und B:

A: n ist eine Primzahl,
B: n ist eine ungerade Zahl.

Es soll nachgewiesen, dass für $n \geq 3$ die Implikation $A \Rightarrow B$ gilt:

$$n \geq 3 \text{ ist eine Primzahl} \quad \Rightarrow \quad n \text{ ist eine ungerade Zahl} .$$

Dazu wird für die vier verschiedenen Möglichkeiten der Wahrheitswerte von A und B in der Wahrheitstafel die Übereinstimmung mit den Wahrheitswerten von $A \Rightarrow B$ überprüft.

1. Fall A ist richtig: n ist eine Primzahl.
B ist richtig: n ist eine ungerade Zahl.
$A \Rightarrow B$ ist richtig,
denn wäre $n \geq 3$ als Primzahl gerade, gäbe es mindestens die drei Teiler $1, 2, n$ und A wäre falsch.
2. Fall A ist richtig: n ist eine Primzahl.
B ist falsch: n ist eine gerade Zahl.
$A \Rightarrow B$ ist falsch, Begründung wie im Fall 1.
3. Fall A ist falsch: n ist keine Primzahl und ungerade.
B ist richtig: da n ungerade ist.
$A \Rightarrow B$ ist richtig.
4. Fall A ist falsch: n ist keine Primzahl und gerade.
B ist falsch: da n gerade ist.
$A \Rightarrow B$ ist richtig.

Von mathematischem Interesse sind nur die ersten beiden Fälle. Nachgewiesen wurde darin, dass eine Primzahl $n \geq 3$ notwendig auch ungerade sein muss. Man nennt B dann auch *notwendige Bedingung* für A.

Andererseits reicht die Information $n \geq 3$ ist eine Primzahl hin, um auf eine ungerade Zahl zu schließen. Man nennt A dann auch *hinreichende Bedingung* für B.

Die Umkehrung $B \Rightarrow A$ ist nicht für alle ungeraden Zahlen $n \geq 3$ richtig, da die Primzahlen nur eine Teilmenge der ungeraden Zahlen sind. Aus der Kenntnis, dass $n = 9$ eine ungerade Zahl ist, kann also nicht geschlossen werden, dass $n = 9$ auch Primzahl ist. B ist also keine hinreichende Bedingung für A.

Äquivalenz (genau dann, wenn): Für die Aussagen A und B ist die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ genau dann wahr, wenn A und B den gleichen Wahrheitswert besitzen. A und B sind dann äquivalent und können überall durcheinander ersetzt werden. Sind die Wahrheitswerte verschieden, so ist $A \Leftrightarrow B$ falsch und A und B sind nicht äquivalent.

Bei mathematischen Betrachtungen wird zwischen den Aussagen A und B in der Regel ein inhaltlicher Zusammenhang bestehen. Notwendig ist dies vom Standpunkt der Aussagenlogik jedoch nicht.

Wahrheitstafel zu „⇔“.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Beispiele

a) (n ist eine gerade natürliche Zahl) ⇔ (n ist durch zwei teilbar),

b) ($3 \cdot 3 = 9$) ⇔ (alle durch vier teilbaren Zahlen sind gerade).

$A \Leftrightarrow B$ kann nachgewiesen werden durch die Gültigkeit von $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$, denn die Wahrheitstafel ergibt eine Tautologie. Beide Aussagen besitzen also immer den gleichen Wahrheitswert und sind gegeneinander austauschbar.

Wahrheitstafel zur Äquivalenz von $A \Leftrightarrow B$ und ($A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$).

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$	$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

1.1.3 Aussageformen

Eine *Aussageform* $A(\cdot)$ ist ein sprachliches Gebilde, dass von einer oder mehreren Variablen abhängen kann. Eine Aussageform selbst besitzt keinen Wahrheitswert. Erst durch konkretes Einsetzen von Variablen beispielsweise x wird $A(x)$ zu einer Aussage, von der entschieden werden kann, ob sie wahr oder falsch ist.

Die Variablen, die in die Aussageform eingesetzt werden, müssen quantifiziert werden. Es muss also festgelegt werden, welche Variablen verwendet werden sollen. Die Festlegung erfolgt durch Einsetzen einer konkreten Variablen oder durch einen *Quantor* der die Variable aus einem gewählten Bereich festlegt.

Übersicht über Quantoren.

	Bezeichnung	In Worten	Wirkungsweise
$\forall$	*Allquantor*	Für alle	$\forall x : A(x) \; :\Leftrightarrow$ Für alle x ist $A(x)$ wahr.
$\exists$	*Existenzquantor*	Es gibt	$\exists x : A(x) \; :\Leftrightarrow$ Es gibt (mindestens) ein x, für das $A(x)$ wahr ist.
$\exists_1$, $\exists!$	*Existenzquantor*	Es gibt genau ein	$\exists_1 x : A(x) \; :\Leftrightarrow$ Es gibt genau ein x, für das $A(x)$ wahr ist.

Der Doppelpunkt vor der Äquivalenz ($:\Leftrightarrow$) in der rechten Spalte bedeutet, dass an dieser Stelle der linke Ausdruck durch den rechten definiert wird.

Im vorangegangenen Primzahlbeispiel hätten also korrekterweise Aussageformen verwendet werden müssen. Durch Aussageformen beschrieben wurde die Richtigkeit nachgewiesen von

$$\forall \text{ Primzahlen } n \geq 3 \, : \, B(n) := n \text{ ist eine ungerade Zahl} \, .$$

Die Schreibweise $:=$ bedeutet wieder „wird definiert als". Zum Vergleich ist hier das Ergebnis nochmal in rein sprachlicher Formulierung: Alle Primzahlen ab drei sind ungerade Zahlen.

Die Reihenfolge, in der Allquantor und Existenzquantor auf eine Aussageform angewendet werden, besitzt einen entscheidenden Einfluss. Man kann nicht davon ausgehen, dass bei Vertauschung der Quantoren die Aussage und deren Wahrheitswert gleich bleibt. Für eine Aussageform mit zwei Variablen soll die Wirkungsweise der Vertauschung dargestellt werden.

Beispiel Mit x werde ein Fahrzeug bezeichnet aus der Menge aller Fahrzeuge und mit y ein Fahrzeughersteller aus der Menge aller Hersteller. Die Aussageform $A(x, y)$ lautet „x wird hergestellt durch y".

$\forall x \exists_1 y \, : \, A(x, y)$ bedeutet: Für jedes Fahrzeug x gibt es genau einen Hersteller y. Dies ist eine wahre Aussage.

$\exists_1 y \forall x \, : \, A(x, y)$ bedeutet: Es gibt genau einen Hersteller y, der alle Fahrzeug x herstellt. Die Aussage hat sich verändert und der Wahrheitswert ist falsch.

Um All- oder Existenzaussagen zu bewiesen, muss gelegentlich ein indirekter *Beweis* durchgeführt werden. Dies erfordert dann die Negation von $\forall x \, : \, A(x)$ oder $\exists x \, : \, A(x)$.

Die Negation von $\forall x \, : \, A(x)$, also $\neg(\forall x \, : \, A(x))$, bedeutet nicht, dass $A(x)$ für alle x falsch ist, also $\neg(\forall x \, : \, A(x)) \not\Leftrightarrow \forall x \, : \, \neg A(x)$, sondern dass $A(x)$ nicht für alle x richtig ist. Es gibt daher mindestens ein x, so dass $A(x)$ für dieses x falsch ist, also

$$\neg(\forall x \, : \, A(x)) \Leftrightarrow \exists x \, : \, \neg A(x) \, .$$

Beispiel Lässt man im Primzahlbeispiel die Bedingung $n \geq 3$ weg, dann ist die Aussage

$$\forall \text{ Primzahlen } n \, : \, B(n) := n \text{ ist eine ungerade Zahl}$$

nicht für alle n richtig, denn $n = 2$ ist Primzahl und gerade. Wahr ist also

$$\neg(\forall \text{ Primzahlen } n \, : \, B(n)) \Leftrightarrow \exists \text{ Primzahl } n \, : \, \neg B(n) \, .$$

Die Negation von $\exists x \, : \, A(x)$, also $\neg(\exists x \, : \, A(x))$, bedeutet nicht, dass ein x existiert für das $A(x)$ falsch ist, also $\neg(\exists x \, : \, A(x)) \not\Leftrightarrow \exists x \, : \, \neg A(x)$, sondern dass $A(x)$ für kein x richtig ist, also für alle x falsch ist, also

$$\neg(\exists x \, : \, A(x)) \Leftrightarrow \forall x \, : \, \neg A(x) \, .$$

1.1.4 Direkter und indirekter Beweis

Ein mathematischer *Beweis* ist die fehlerfreie und vollständige Erklärung dafür, dass eine Aussage B wahr ist. Verwendet werden dafür bekannte wahre Aussagen oder Axiome A. Grundlage vieler Beweise ist die Implikation $A \Rightarrow B$.

Wahrheitstafel zu „$\Rightarrow$“.

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Die Basis bilden die ersten beiden Zeilen aus der Wahrheitstafel. Sie bedeuten, dass bei einer gültigen Implikation aus einem wahren A nur auf ein wahres B geschlossen werden kann oder umgekehrt aus einem wahren A kann nicht auf ein falsches B geschlossen werden.

Direkter Beweis Ein direkter Beweis startet mit einer wahren Aussage A, der sogenannten *Voraussetzung*, und führt eine richtige Implikation auf die zu beweisende *Behauptung* B durch

$$A \Rightarrow B\,.$$

Häufig ist eine Behauptung B nicht durch eine einzige Implikation einsehbar. Man führt dann einen sogenannten *Kettenschluss* durch, also nacheinander ausgeführte und elementar einsehbare Implikationen mit wahren Zwischenaussagen $A_1, \dots, A_n$

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow B\,.$$

Beispiel Für reelle Zahlen x soll unter der Voraussetzung $A\,:\,x > 1$ die Behauptung $B\,:\,6x + 3 > 3x + 6$ durch einen direkten Beweis nachgewiesen werden.

$$A\,:\,x > 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{3x > 3}_{A_1} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{3x + 3 > 6}_{A_2} \quad \Rightarrow \quad 6x + 3 > 3x + 6\,:\,B\,.$$

Kein Beweis einer Behauptung B liegt vor, wenn der Schluss $B \Rightarrow A$ durchgeführt wird und A wahr ist. Denn aus der Wahrheitstabelle der Implikation mit vertauschtem A und B folgt, dass B als Start wahr (erste Zeile) oder falsch (dritte Zeile) gewesen sein kann, um auf wahres A zu schließen. Man weiß dann nicht, welcher Fall vorgelegen hat, also ob B wahr oder falsch ist.

Indirekter Beweis Bei einem indirekten Beweis wird die Aussage $A \Rightarrow B$ durch eine äquivalente Aussage ersetzt. Für die äquivalente Aussage wird dann wieder ein Kettenschluss durchgeführt. Man unterscheidet zwei Varianten:

a) Beweis durch *Widerspruch*:
Die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ ist eine Tautologie (siehe Aufgabe 1.1). Die Richtigkeit von $\neg(A \wedge \neg B)$ wird indirekt über einen Kettenschluss dadurch nachgewiesen, dass $A \wedge \neg B$ falsch ist:

$$(A \wedge \neg B) \Rightarrow A_1 \cdots \Rightarrow A_n \quad \text{(falsch)}\,.$$

Wenn A_n falsch ist, muss auch $A \wedge \neg B$ falsch gewesen sein, denn aus Richtigem kann nichts Falsches folgen. Also ist $\neg(A \wedge \neg B)$ richtig und damit $A \Rightarrow B$.

b) Beweis durch *Kontraposition*:
Die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ ist eine Tautologie (siehe Aufgabe 1.2). An Stelle von $A \Rightarrow B$ kann also äquivalent auch $\neg B \Rightarrow \neg A$ über einen Kettenschluss nachgewiesen werden:

$$\neg B \Rightarrow A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow \neg A\,.$$

Beispiel Für natürliche Zahlen n und die Aussagen

$$A\,:\; n^2 \text{ ist gerade} \quad \text{und} \quad B\,:\; n \text{ ist gerade}$$

soll indirekt durch Kontraposition $A \Rightarrow B$ bewiesen werden. Benötigt werden dafür

$$\neg A\,:\; n^2 \text{ ist ungerade} \quad \text{und} \quad \neg B\,:\; n \text{ ist ungerade.}$$

Gerade Zahlen n sind durch zwei teilbar und darstellbar durch $n = 2m$ und ungerade durch $n = 2m + 1$ mit einer natürlichen Zahl m. Der Kettenschluss beginnt mit $\neg B$:

$$\begin{aligned}
\neg B \quad &\Rightarrow \quad n = 2m + 1\,,\\
&\Rightarrow \quad n^2 = (2m+1)^2\,,\\
&\Rightarrow \quad n^2 = 4m^2 + 4m + 1\,,\\
&\Rightarrow \quad n^2 = 2(2m^2 + 2m) + 1\,, \quad k := 2m^2 + 2m\,,\\
&\Rightarrow \quad n^2 = 2k + 1\,,\\
&\Rightarrow \quad n^2 \text{ ist ungerade, dies ist } \neg A\,.
\end{aligned}$$

1.2 Mengen

Georg Cantor (1845–1918), ein Begründer der Mengenlehre, beschreibt eine *Menge* M als jede Zusammenfassung bestimmter wohl unterscheidbarer Objekte m unseres Denkens oder unserer Anschauung. Ein Objekt in einer Menge wird auch als *Element* bezeichnet. Für Mengen werden traditionell große Buchstaben und für Elemente kleine Buchstaben verwendet.

Man schreibt $m \in M$, wenn das Element m zur Menge M gehört und $m \notin M$, wenn m kein Element von M ist.

Mengen können auf verschiedene Weise dargestellt werden. Zwischen der sich öffnenden „{“ und der sich schließenden *Mengenklammer* „}“ der Menge wird dabei eine Auskunft über die Elemente gegeben.

Die *aufzählende Form* der Mengendarstellung führt alle Elemente der Menge durch Kommata getrennt zwischen den Mengenklammern auf. Gehören beispielsweise die Elemente m_1, m_2, m_3 zur Menge M, so schreibt man

$$M = \{m_1, m_2, m_3\}\,.$$

Besitzt eine Menge M keine Elemente, so ist sie leer. Man schreibt für die *leere Menge* zwischen die Mengenklammern nichts $M = \{\,\}$ oder alternativ auch $M = \emptyset$. Besitzt eine Menge abzählbar viele Elemente, so kann durch Nummerierung der Elemente und „...“ abkürzend auch

$$M = \{m_1, m_2, m_3, ..., m_{1000}\}$$

geschrieben werden, wenn klar ist, welche Elemente gemeint sind oder den Elementen ein bekanntes oder offensichtliches Bildungsgesetz zugrunde liegt. Ist das Bildungsgesetz nicht explizit genannt, besteht bei dieser Mengendarstellung jedoch die Gefahr von Missverständnissen.

Die *beschreibende Form* der Mengendarstellung schreibt zwischen die Mengenklammern ein Element m und davon durch | oder auch $:$ getrennt das zu m gehörige Bildungsgesetz $A(m)$:

$$M = \{m \mid A(m)\}\,.$$

Zur Menge M gehören jetzt die Elemente m aus einer Grundmenge G, die zusätzlich das Bildungsgesetz erfüllen. Ist nicht klar, aus welcher Grundmenge m genommen wird, so schreibt man statt m in der Mengendarstellung noch explizit $m \in G$.

Beispiele

A	$:=$	$\{a, b, c, d\}$,	aufzählende Form.
B	$:=$	$\{2, 4, 6, 8, 10\}$,	aufzählende Form.
C	$:=$	{Buchstaben im Alphabet | Buchstaben von a bis f},	beschreibende Form.
D	$:=$	$\{m \in \mathbb{N} \mid m$ ist gerade $\}$,	beschreibende Form.

Beziehungen zwischen Mengen

Gleichheit: $A = B :\Leftrightarrow \forall m \;:\; (m \in A \wedge m \in B)$,
A und B besitzen genau die gleichen Elemente,

Teilmenge: $A \subset B :\Leftrightarrow \forall m \;:\; (m \in A \Rightarrow m \in B)$,
alle Elemente von A sind auch in B enthalten, A ist Teilmenge von B oder B ist Obermenge von A.

Ist B Obermenge von A, so schreibt man alternativ auch $B \supset A$. Gilt sowohl $A \subset B$ als auch $B \subset A$, dann besitzen A und B die gleichen Elemente und es gilt $A = B$. Eine Unterscheidung zwischen dem Zeichen $\subset$ für eine echte Teilmenge, bei der keine Gleichheit möglich ist, und $\subseteq$ für eine Teilmenge, bei der auch Gleichheit möglich ist, soll hier nicht vorgenommen werden.

Verknüpfung von Mengen

Vereinigungsmenge: $A \cup B := \{m \mid m \in A \vee m \in B\}$,
die Elemente m von $A \cup B$ gehören zu A oder zu B.

Schnittmenge: $A \cap B := \{m \mid m \in A \wedge m \in B\}$,
die Elemente m von $A \cap B$ gehören zu A und zu B.
Differenzmenge: $A \setminus B := \{m \mid m \in A \wedge m \notin B\}$,
die Elemente m von $A \setminus B$ gehören zu A und nicht zu B.
Kartesisches Produkt: $A \times B := \{(m, n) \mid m \in A \wedge n \in B\}$,
die erste Koordinate m des geordneten Paares (m, n) ist Element von A und die zweite Koordinate n ist Element von B.

Wenn ein Element m sowohl zur Menge A gehört als auch zur Menge B, so wird es in der Vereinigungsmenge $A \cup B$ nur einmal aufgeführt. Mengen A und B, die keine gemeinsamen Elemente besitzen, heißen *disjunkt* und für die Schnittmenge gilt $A \cap B = \emptyset$. Bei Bildung der Differenzmenge $A \setminus B$ werden aus der Menge A alle Elemente der Menge B entfernt. Für disjunkte Mengen A und B gilt $A \setminus B = A$ und für $A \subset B$ gilt $A \setminus B = \emptyset$. Die Reihenfolge eines geordneten Paares (m, n) im kartesischen Produkt darf nicht vertauscht werden, es gilt also in der Regel $(m, n) \neq (n, m)$. Nur für $n = m$ sind die Paare gleich. Schreibt man $(a, b, c) \in A \times B \times C$, so bedeutet dies $a \in A$, $b \in B$ und $c \in C$.

Beispiele

a) $\{a, d, f, g\} \cup \{a, b, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
b) $\{a, d, f, g\} \cap \{a, b, c, d, e\} = \{a, d\}$,
c) $\{1, 4, 7, 8, 9, 10\} \setminus \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\} = \{1, 7, 9\}$,
d) $\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\} = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$,
e) $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

1.3 Zahlen

In diesem Abschnitt wird die systematische Erweiterung der bekannten Zahlen mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation dargestellt, beginnend mit den natürlichen Zahlen bis hin zu den reellen Zahlen. Die jeweils in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gültigen Rechenregeln werden dabei im Überblick angegeben. Die ausführliche Anwendung der Rechenregeln wird im Kapitel über elementare Arithmetik besprochen. Die komplexen Zahlen werden am Ende in einem eigenen Kapitel behandelt. Neben den Zahlen werden grundlegende mathematische Begriffsbildungen wie Summen- und Produktdarstellungen, Induktionsbeweis, Teilbarkeit, Binomialkoeffizienten, Ordnungseigenschaften und Intervalle erklärt.

1.3.1 Natürliche Zahlen

Der Begriff *Axiom* geht auf Euklid (um 300 v. Chr.) und Aristoteles (384–322 v. Chr.) zurück und steht für einen unmittelbar einleuchtenden und nicht beweisbaren Grundsatz (Prinzip), also eine wahre Aussage, auf die nicht geschlossen werden kann und die immer am Anfang einer Schlussfolgerung steht.

Die natürlichen Zahlen, abkürzend geschrieben durch $\mathbb{N}$, wurden von Peano (1858–1932) durch folgende Axiome eindeutig charakterisiert:

(P1) Eins ist eine natürliche Zahl.
(P2) Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger $n + 1$.

(P3) Eins ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(P4) Die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen n und m sind voneinander verschieden.

(P5) Für eine Menge A mit $A \subseteq \mathbb{N}$ gelte:
$1 \in A$ und $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$. Dann folgt $A = \mathbb{N}$.

Die Zahl eins ist also die erste natürliche Zahl und die eindeutig bestimmten nachfolgenden natürlichen Zahlen werden durch sukzessives und nicht endendes Addieren von eins erzeugt. Mit diesem Prozess erhält man dann alle natürlichen Zahlen. Diese Axiome formalisieren die intuitive Vorstellung des Zählens mit Hilfe natürlicher Zahlen. Die aufzählende Mengendarstellung lautet

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Das durch die Punkte angedeutete Bildungsgesetz ist das Addieren von 1. Die Null als Zahl mit dem Zeichen 0 hat erst ab dem Mittelalter zunehmend an Bedeutung gewonnen. Für die Vereinigung der natürlichen Zahlen mit null wird $\mathbb{N}_0$ verwendet, mit der aufzählenden Mengendarstellung

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Die Menge $\mathbb{N}_0$ kann auch direkt über die Peano Axiom erklärt werden, indem als kleinste Zahl nicht eins sondern null verwendet wird.

Ist die Anzahl der Elemente einer Menge endlich, so kann diese durch abzählen mit einer natürlichen Zahl beziffert werden. Besitzt eine Menge unendlich viele Elemente wie beispielsweise $\mathbb{N}$, so spricht man nicht von der Anzahl der Elemente, sondern allgemeiner von der Mächtigkeit. Mengen, die die gleiche Mächtigkeit wie die natürlichen Zahlen besitzen, werden als *abzählbare Mengen* bezeichnet. Über Diagonalverfahren, die auf Cantor zurückgehen, kann nachgewiesen werden, dass auch die ganzen und die rationalen Zahlen abzählbar sind. Die reelle Zahlen dagegen besitzen eine größere Mächtigkeit, die als überabzählbar bezeichnet wird.

Ausgehend von den Peano-Axiomen werden nun die beiden *Verknüpfungen* „+“ und „·“ mit den zugehörigen Rechenoperationen für natürliche Zahlen mit null motiviert. Die natürliche Zahl n kann als n-fache Nachfolgerbildung der Null erklärt werden durch

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{n\text{-mal}}.$$

Die *Addition* „+“ zweier Zahlen $n, m \in \mathbb{N}_0$ führt dann auf

$$n + m = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{n\text{-mal}} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{m\text{-mal}} \in \mathbb{N}_0,$$

also wieder auf eine natürliche Zahl mit null. Die Menge $\mathbb{N}_0$ wird daher auch als *abgeschlossen* bezüglich der Verknüpfung „+“ bezeichnet. Mit $k, n, m \in \mathbb{N}_0$ werden folgende Rechenregeln festgelegt:

Assoziativgesetz:	$(k + n) + m = k + (n + m)$.
Neutrales Element ist die Null:	$n + 0 = n$.
Kommutativgesetz:	$n + m = m + n$.

Die *Multiplikation* „·" zweier Zahlen $n, m \in \mathbb{N}_0$ wird durch m-fache Addition von n erklärt

$$n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdots + n + n}_{m\text{-mal}} \in \mathbb{N}_0 \,.$$

$\mathbb{N}_0$ ist also bezüglich der Verknüpfung „·" auch abgeschlossen. Mit $k, n, m \in \mathbb{N}_0$ werden folgende Rechenregeln festgelegt

Assoziativgesetz:	$(k \cdot n) \cdot m = k \cdot (n \cdot m)$.
Neutrales Element eins:	$n \cdot 1 = n$.
Multiplikation mit null:	$n \cdot 0 = 0$.
Kommutativgesetz:	$n \cdot m = m \cdot n$.

Für beide Verknüpfungen „+" und „·" zusammen gilt das

Distributivgesetz: $k \cdot (n + m) = k \cdot n + k \cdot m$.

Für wiederholtes Multiplizieren von $n \in \mathbb{N}$ mit sich selbst werden als abkürzende Schreibweise *Potenzen* eingeführt, mit $m, k \in \mathbb{N}_0$ durch

$$n^0 := 1\,, \quad n^1 = n\,, \quad n^m = \underbrace{n \cdot n \cdots n \cdot n}_{m\text{-mal}}\,, \quad n^m \cdot n^k = n^{m+k}\,, \quad (n^m)^k = n^{m \cdot k}\,.$$

Das Summenzeichen $\sum$

Häufig ist es erforderlich, eine größere Anzahl von beispielsweise n Zahlen oder Rechenausdrücken zu summieren. Um nicht alle Additionen einzeln aufführen zu müssen, wird der große griechische Buchstabe Sigma Σ als abkürzendes Zeichen für die Summation verwendet und die n Zahlen werden mit einem *Index* $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ durchnummeriert:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad \ldots\,, \quad a_n\,.$$

Mit dieser Bezeichnung wird die Summe der Zahlen a_1 bis a_n wird nun abkürzend folgendermaßen geschrieben:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,.$$

Die linke Seite der Definition mit dem *Summenzeichen* wird dann folgendermaßen ausgeführt: Wähle die Zahl a_1 zum kleinsten Index $k = 1$ und addiere dazu die nächste Zahl a_2 zum Index $k = 2$, addiere dazu nächste die Zahl a_3 zum Index $k = 3$ und so fort, bis hin zur Addition der Zahl a_n zum letzten Index $k = n$. Für den Index im Summenzeichen muss nicht k gewählt werden. Man kann auch j oder einen anderen Buchstaben verwenden, ohne dass sich das Summationsverfahren ändert, es gilt also

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j\,.$$

Der Index einer Summe muss auch nicht notwendigerweise mit eins beginnen. Man kann auch für $k = m, m + 1, m + 2, \ldots, n$ summieren. In der Regel gilt $m \leq n$. Eine Summe mit

$m > n$ wird als *leere Summe* bezeichnet und der Wert wird durch null festgelegt. Beginnt eine Summe bei $k = m$, so kann durch Verschiebung des Index $j = k - m$ der Start beispielsweise auch mit $j = 0$ beginnen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-m} a_{j+m} .$$

Beispiel Summiert werden sollen die folgenden 25 Quadratzahlen

$$\begin{array}{lllll}
a_1 = 1 , & a_2 = 4 , & a_3 = 9 , & a_4 = 16 , & a_5 = 25 , \\
a_6 = 36 , & a_7 = 49 , & a_8 = 64 , & a_9 = 81 , & a_{10} = 100 , \\
a_{11} = 121 , & a_{12} = 144 , & a_{13} = 169 , & a_{14} = 196 , & a_{15} = 225 , \\
a_{16} = 256 , & a_{17} = 289 , & a_{18} = 324 , & a_{19} = 361 , & a_{20} = 400 , \\
a_{21} = 441 , & a_{22} = 484 , & a_{23} = 529 , & a_{24} = 576 , & a_{25} = 625 .
\end{array}$$

In diesem Fall kann aus dem Index k auf die Zahl a_k selbst geschlossen werden. Das Bildungsgesetz lautet $a_k = k^2$ mit $k = 1, 2, 3, 4, \dots , 25$ und die Summe wird dann abkürzend geschrieben durch

$$\sum_{k=1}^{25} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \cdots + 576 + 625 .$$

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Die Gültigkeit einer von n abhängigen Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ kann mit Hilfe vollständiger Induktion bewiesen werden. Das *Beweisprinzip* beruht auf dem fünften Peano-Axiom: Wenn eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ die Zahl eins und mit n auch $n + 1$ enthält, dann ist die Teilmenge identisch mit $\mathbb{N}$.

Gelingt es die Gültigkeit von $A(1)$ (*Induktionsanfang*) nachzuweisen und kann unter der *Induktionsannahme*, dass für ein n die Aussage $A(n)$ gültig ist, die Gültigkeit von $A(n + 1)$ (*Induktionsschritt*) nachgewiesen werden, dann gilt die Aussage $A(n)$ für alle n. Die Induktionsannahme ist nicht unbegründet, denn die Richtigkeit von $A(1)$ wurde am Anfang schon nachgewiesen.

Ein Induktionsbeweis erfordert abkürzend geschrieben also den Nachweis der folgenden beiden Punkte:

Induktionsanfang: Zeige $A(1)$ ist richtig.
Induktionsschritt: Zeige $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$.

Startet der Induktionsanfang nicht mit $n = 1$, sondern mit $n_0 \in \mathbb{N}_0$, wird die Richtigkeit von $A(n)$ erst ab $n \geq n_0$ nachgewiesen. In der Regel startet man also mit der kleinsten Zahl n_0, für die die Aussage $A(n)$ gelten soll. Andernfalls müsste für alle $n < n_0$ die Gültigkeit von $A(n)$ in jedem Einzelfall zusätzlich geprüft werden.

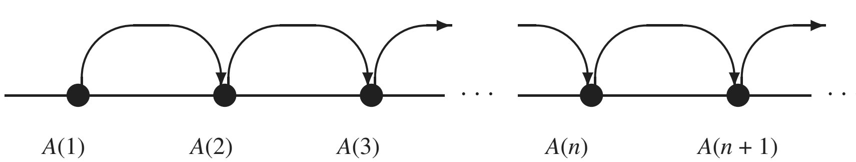

Abb. 1.1 Anwendung des Induktionsschrittes ab $A(1)$.

Beispiele

a) Durch Induktion soll nachgewiesen werden, dass der Wert der Summe der ersten n natürlichen Zahlen $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ durch die Formel $n(n+1)/2$ berechnet werden kann

$$A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Induktionsanfang $A(1): \quad \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$

Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \overset{IA}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Die Abkürzung „IA“ steht für Induktionsannahme und bedeutet, dass an dieser Stelle die angenommene Gültigkeit von $A(n)$ für ein n in der Rechnung verwendet wurde.

b) Man beweise durch Induktion die Berechnungsformel $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$n = 1: \quad \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{(1+1)(2+1)}{6}.$$

$$n \to n+1: \quad \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} j^2\right) + (n+1)^2 \overset{IA}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n(2n+3) + 2(2n+3))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Teilbarkeit natürlicher Zahlen

Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt *teilbar* durch eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$, wenn die Division von n durch m ohne Rest durchführbar ist. Es existiert also ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $n = k \cdot m$ gilt. m heißt dann *Teiler* von n und n *Vielfaches* von m.

Jede natürliche Zahl n besitzt die Teiler eins und n. Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt *Primzahl*, wenn sie nur die beiden (verschiedenen) Teiler eins und p besitzt. Die ersten 20 Primzahlen lauten

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, \ldots$$

Es gilt der Satz von der *Primfaktorzerlegung*:

Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ kann als Produkt von Primzahlpotenzen dargestellt werden. Für paarweise verschiedene Primzahlen $p_k, k = 1, \ldots, n$ mit Potenzen $r_k \in \mathbb{N}$ gilt also

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n}.$$

Bis auf Reihenfolge der Primzahlpotenzen ist die Darstellung eindeutig.

Die Primfaktorzerlegung von n kann durch wiederholte Division von n ohne Rest durch alle Primzahlen gegebenenfalls auch mehrfach beginnend mit zwei und in aufsteigender Reihenfolge bis hin zur größten Primzahl $p_n < \sqrt{n}$ ermittelt werden.

Für die gekürzte Darstellung eines Bruches oder die Addition von Brüchen ist die Kenntnis gemeinsamer Teiler oder Vielfacher zweier Zahlen m und n hilfreich. Man bezeichnet mit

kgV(n, m): das *kleinste gemeinsame Vielfache* und mit
ggT(n, m): den *größten gemeinsamen Teiler* von n und m.

Beispiel Berechnet werden sollen Primfaktorzerlegungen, kgV und ggT von 70, 100 und 121.

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7\,, \quad 100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2\,, \quad 121 = 11 \cdot 11 = 11^2\,.$$

Bei vorliegenden Primfaktorzerlegungen von n und m lässt sich gegebenenfalls durch Ergänzung von $p_k^0 = 1$ eine gemeinsame Darstellung finden

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n}\,, \quad m = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdots p_n^{s_n}\,.$$

Wählt man in dieser Darstellung jeweils von den Faktoren $p_k^{r_k}$ und $p_k^{s_k}$ nur den mit der höchsten Potenz aus und multipliziert dann die ausgewählten Faktoren, so erhält man das kgV(n, m). Werden die verbliebenen Faktoren, also die mit der niedrigsten Potenz, miteinander multipliziert, so erhält man den ggT(n, m).

$$\begin{aligned} \mathrm{kgV}(100, 70) &= 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 700\,, & \mathrm{ggT}(100, 70) &= 2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 10\,, \\ \mathrm{kgV}(121, 100) &= 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2\,, & \mathrm{ggT}(121, 100) &= 1\,. \end{aligned}$$

Man erhält also $n \cdot m = \mathrm{kgV}(n, m) \cdot \mathrm{ggT}(n, m)$.

1.3.2 Ganze Zahlen

Eine Gleichung wie beispielsweise $5 + x = 3$ besitzt keine Lösung x in den natürlichen Zahlen. Um die allgemeine Lösbarkeit einer linearen Gleichung der Form $n + x = m$ zu erreichen, muss die Menge $\mathbb{N}$ erweitert werden. Dazu legt man die eindeutige Lösung der folgenden Gleichung mit $n \in \mathbb{N}$ fest:

$$n + x = 0 \quad \text{wird gelöst durch} \quad x := -n\,, \quad \text{dann gilt} \quad n + (-n) = n - n = 0\,.$$

Ordnet man jeder natürlichen Zahl n das *inverse Element* der Addition $-n$ zu und erweitert $\mathbb{N}_0$ um diese Elemente, so erhält man die *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}\,.$$

Die Gleichung $5 + x = 3$ wird jetzt eindeutig gelöst durch $x = 3 + (-5) = -2 \in \mathbb{Z}$.

Die Rechenregeln und Gesetze der natürlichen Zahlen übertragen sich damit auf die ganzen Zahlen. Die Menge $\mathbb{Z}$ mit der Verknüpfung „+“ besitzt jetzt insgesamt folgende Gesetzmäßigkeiten für $a, b, c \in \mathbb{Z}$: