

Landerl | Vogel | Kaufmann

Dyskalkulie

4. Auflage



Eine Arbeitsgemeinschaft der Verlage

Brill | Schöningh – Fink · Paderborn
Brill | Vandenhoeck & Ruprecht · Göttingen – Böhlau · Wien · Köln
Verlag Barbara Budrich · Opladen · Toronto
facultas · Wien
Haupt Verlag · Bern
Verlag Julius Klinkhardt · Bad Heilbrunn
Mohr Siebeck · Tübingen
Narr Francke Attempto Verlag – expert verlag · Tübingen
Psychiatrie Verlag · Köln
Ernst Reinhardt Verlag · München
transcript Verlag · Bielefeld
Verlag Eugen Ulmer · Stuttgart
UVK Verlag · München
Waxmann · Münster · New York
wbv Publikation · Bielefeld
Wochenschau Verlag · Frankfurt am Main

Karin Landerl, Stephan E. Vogel, Liane Kaufmann

Dyskalkulie

Modelle, Diagnostik, Intervention

4., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 23 Abbildungen, 5 Tabellen und 33 Übungsfragen

Ernst Reinhardt Verlag München

Prof. Dr. *Karin Landerl* leitet die Arbeitseinheit Entwicklungspsychologie an der Universität Graz.

Assoz.-Prof. Mag. *Stephan E. Vogel*, PhD ist wissenschaftlicher Mitarbeiter im Arbeitsbereich Begabungsforschung an der Universität Graz.

Priv.-Doz. Dr. *Liane Kaufmann* ist Senior Scientist am Institut für Psychologie der Universität Innsbruck.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

UTB-Band-Nr.: 3066

ISBN 978-3-8252-5734-7 (Print)

ISBN 978-3-8385-5734-2 (PDF-E-Book)

ISBN 978-3-8463-5734-7 (EPUB)

© 2022 by Ernst Reinhardt, GmbH & Co KG, Verlag, München

Dieses Werk, einschließlich aller seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne schriftliche Zustimmung der Ernst Reinhardt GmbH & Co KG, München, unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen in andere Sprachen, Mikroverfilmungen und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen. Der Verlag Ernst Reinhardt GmbH & Co KG behält sich eine Nutzung seiner Inhalte für Text- und Data-Mining i. S.v. § 44b UrhG ausdrücklich vor.

Printed in EU

Einbandgestaltung: Atelier Reichert, Stuttgart

Cover unter Verwendung eines Fotos von © Halfpoint/Fotolia

Satz: ew print & medien service gmbh, Würzburg

Ernst Reinhardt Verlag, Kemnatenstr. 46, D-80639 München

Net: www.reinhardt-verlag.de E-Mail: info@reinhardt-verlag.de

Inhalt

Hinweise zur Benutzung dieses Lehrbuches

Vorwort zur 4. Auflage

1 Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Erwachsenen

1.1 Einleitung

1.2 Erste Fallberichte von Personen mit erworbenen Rechenstörungen

1.3 Akalkulie aus der Sicht der klinischen Neuropsychologie und der kognitiven (Neuro-)Psychologie

1.4 Neurokognitive Modelle der numerischen Kognition bei Erwachsenen

1.5 Zentrale Komponenten der arithmetischen Verarbeitung

1.5.1 Basisnumerische Verarbeitung

1.5.2 Rechenfertigkeiten

1.6 Neuronale Grundlagen der Zahlenverarbeitung und des Rechnens

2 Allgemeine Entwicklung der Zahlenverarbeitung und der Rechenleistungen

- 2.1 Zahlenverständnis bei Tieren
- 2.2 Präverbales Verständnis von Numerositäten bei Babys
- 2.3 Die Entwicklung des Zählens
- 2.4 Symbolische Repräsentation von Numerositäten: Zahlwörter und arabische Zahlen
- 2.5 Mehrstellige Zahlen
- 2.6 Erwerb der arithmetischen Kompetenzen
- 2.7 Fingerrechnen
- 2.8 Der Übergang vom zählenden Rechnen zum Abruf von arithmetischen Fakten
- 2.9 Auswahl der besten Rechenstrategie
- 2.10 Intuitive und kulturelle Mathematik
- 2.11 Geschlechtsunterschiede
- 2.12 Leistungsmotivation, Selbstbild, Emotion und Rechenleistung
- 2.13 Modelle der Entwicklung der Rechenleistung
 - 2.13.1 Ein Vier-Stufen-Entwicklungsmodell der Zahlenverarbeitung nach von Aster
 - 2.13.2 Entwicklungsmodell der Zahl-Größen-Verknüpfung nach Krajewski
 - 2.13.3 Modell der mathematischen Kompetenzentwicklung nach Fritz und Ricken

3 Dyskalkulie

- 3.1 Definition
- 3.2 Epidemiologie

- 3.3 Prognose
- 3.4 Neurobiologische Befunde
- 3.5 Typische Symptomatik
- 3.6 Kognitive Defizite bei Dyskalkulie
 - 3.6.1 Kognitive Repräsentation von Numerositäten
 - 3.6.2 Langzeitgedächtnis
 - 3.6.3 Arbeitsgedächtnis
 - 3.6.4 Exekutive Funktionen
 - 3.6.5 Visuell-räumliche Verarbeitung
 - 3.6.6 Motorische Verarbeitung
- 3.7 Komorbiditäten mit anderen Störungen
- 3.8 Die Frage der Subtypen
- 3.9 Dyskalkulie – ein Kausalmodell

4 Diagnostik

- 4.1 Schulleistungstests
- 4.2 Tests, die auf neurokognitiven Theorien der Zahlenverarbeitung und des Rechnens basieren
- 4.3 Verfahren zur Früherkennung
- 4.4 Synopsis der vorgestellten Verfahren

5 Instruktion, Förderung und Intervention

- 5.1 Überlegungen zur Mathematikdidaktik
 - 5.1.1 Instruktionsmethoden
 - 5.1.2 Optimierung des Lernprozesses – Scaffolding
 - 5.1.3 Anschauungshilfen

- 5.1.4 Pragmatische Aspekte der Mathematikdidaktik
- 5.2 Frühförderprogramme
- 5.3 Förderung und Intervention bei Dyskalkulie
 - 5.3.1 Allgemeine Überlegungen zur Interventionsplanung
 - 5.3.2 Differenzielle Interventionseffekte
 - 5.3.3 Dyskalkulie-Interventionsprogramme
 - 5.3.4 Besser rechnen durch neuronale Stimulation – derzeit noch Zukunftsmusik
- 5.4 Synopsis Intervention

Glossar

Literatur

Sachregister

Hinweise zur Benutzung dieses Lehrbuches

Zur schnelleren Orientierung werden in den Randspalten Piktogramme benutzt, die folgende Bedeutung haben:



Literaturempfehlung



Begriffserklärung, Definition



Pro und Contra, Kritik



Beispiel



Forschungen, Studien



Fragen zur Wiederholung am Ende des Kapitels

Vorwort zur 4. Auflage

Im Vorwort der ersten Auflage dieses Buches, die im Jahr 2008 erschien, wurde Dyskalkulie als eine von Forschung und Praxis vernachlässigte Lernstörung präsentiert. Fast 15 Jahre später ist die Charakterisierung der Dyskalkulie als vernachlässigte Lernstörung nach wie vor nicht ganz unrichtig, aber der Rückstand in unserem Wissen um dieses Störungsbild, etwa im Vergleich zum Kenntnisstand zu Beeinträchtigungen des Schriftspracherwerbs (Legasthenie), ist sehr viel kleiner geworden. In dieser Neuauflage wurden Entwicklungen in Forschungsstand, Diagnostik und Intervention berücksichtigt.

Insbesondere in den [Kapiteln 2](#) und [3](#) wurden die aktuellen Forschungsbefunde zu typischer und atypischer Entwicklung der Zahlenverarbeitung und der Rechenleistungen eingearbeitet. Dazu gehören Befunde, die die hohe Relevanz des Verständnisses für symbolische Zahlenrepräsentationen (also Zahlwörter und arabische Zahlen) als Grundlage der Entwicklung der Rechenleistungen verdeutlichen. Kinder mit Dyskalkulie zeigen persistierende Probleme, analoge Zahlenmengen effizient mit den korrespondierenden symbolischen Zahlencodes in Verbindung zu setzen. Auch neue Entwicklungen in unserem Verständnis der neuronalen Spezialisierung für Zahlenverarbeitung und Rechenleistungen werden dargestellt.

[Kapitel 4](#) und [5](#) zu Diagnostik und Intervention wurden ebenfalls wesentlich erweitert. In den Kanon der Verfahren zur Diagnose von Rechenleistungen und Rechenstörungen

konnte eine Reihe von interessanten, konzeptuell und methodisch fundierten Neuerscheinungen aufgenommen werden. Für Diagnose und Intervention ist evidenzbasiertes Vorgehen von wachsender Bedeutung. Darunter verstehen wir theoretisch fundierte Methoden, deren Wirksamkeit durch wissenschaftlich kontrollierte und unabhängige Studien empirisch belegt ist. Hier ist insbesondere auf die von der deutschen Arbeitsgemeinschaft der Wissenschaftlichen Medizinischen Fachgesellschaften geführten, konsensual entwickelten evidenzbasierten Richtlinien für Best Practice der Diagnose und Behandlung von Rechenstörungen hinzuweisen (s. Haberstroh / Schulte-Körne 2019 diskutiert in [Kapitel 3.1](#)), welche für die Praxis eine wichtige Orientierung darstellen können. Im Bereich Diagnostik und Intervention erweisen sich auch computerbasierte Instrumente zunehmend als eine wesentliche Unterstützung herkömmlicher psychologisch-pädagogischer Zugänge.

Weiterhin bleibt aber viel zu tun für Forschung und Praxis. Nach wie vor ist wenig bekannt über genetische Grundlagen der Dyskalkulie. Auch wenn unser Verständnis von der typischen und atypischen Gehirnentwicklung aufgrund beständiger methodischer Weiterentwicklungen und erster Metaanalysen rasche Fortschritte macht, ist unser Wissen über Gehirnfunktion und -struktur bei Kindern mit guten und schwachen Rechenleistungen derzeit noch beschränkt und die Relevanz dieser Befunde für Unterricht und Förderung nicht immer deutlich. Eine Herausforderung für die numerische Kognitionsforschung wird es sein, diesen Praxisbezug zu erarbeiten. Auch die Untersuchung der vorschulischen Entwicklung von Kindern, die später eine Dyskalkulie entwickeln, gestaltet sich methodisch schwierig, obwohl derartige Befunde zentrale Erkenntnisse für die Früherkennung dieser Lernstörung erbringen könnten. Bereits in der 1. Auflage hatten wir darauf hingewiesen, dass im deutschsprachigen

Raum Dyskalkulie von den meisten Schulsystemen nicht offiziell als Lernstörung anerkannt wird und keine adäquaten Maßnahmen des Nachteilsausgleichs vorgesehen sind. Wir hoffen, mit dieser Neuauflage unseres Buches einen Beitrag leisten zu können, um derartige relevante Entwicklungen in der nahen Zukunft anzuregen.

Bei Anna Exel bedanken wir uns herzlich für das aufmerksame Korrekturlesen der aktuellen Auflage.

Juli 2022

Karin
Landerl
Stephan
E. Vogel

1 Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Erwachsenen

1.1 Einleitung

Gute Rechenfertigkeiten sind in unserer Gesellschaft mindestens ebenso wichtig wie gute Lesefertigkeiten. Diese Aussage gilt nicht nur für die Schulzeit, sondern auch für das Berufsleben. Wer gravierende Schwierigkeiten beim Rechnen hat, ist sowohl im Alltag (beim Einkaufen, Einparken: Schätzen, ob die Parklücke groß genug für das Auto ist, etc.) als auch in der Berufswahl erheblich eingeschränkt. Personen, die Schwierigkeiten beim Kopfrechnen haben oder solche, denen beim Lesen und Schreiben arabischer Zahlen leicht Fehler passieren, werden den Anforderungen von Berufen, die den Umgang mit (Wechsel-)Geld erfordern, nicht entsprechen können (z. B. VerkäuferInnen, Bankangestellte). Auch die meisten naturwissenschaftlichen Professionen sind mathematiklastig (z. B. Physik, [Bio-]Chemie) und werden von Menschen mit Rechenschwierigkeiten meist vermieden.

Rechnen ist eine neurokognitiv hochkomplexe Leistung. Bereits intuitiv ist uns klar, dass wir die einfache Rechnung „ $2 + 6$ “ anders lösen als die komplexe Rechnung „ 23233×72 “. Bei Textaufgaben besteht das Problem oft nicht in der eigentlichen Ausführung der geforderten Rechenleistung, sondern in der Entwicklung des korrekten Lösungsweges. Rechnen setzt voraus, dass wir mit Zahlen kompetent umgehen können. Eine wesentliche Erkenntnis der neurokognitiven Forschung ist, dass schon die einfache Verarbeitung von Zahlen in eine ganze Reihe von

Teilkomponenten zerfällt, die im Einzelfall sehr spezifisch gestört sein können.

Der Begriff *numerische Kognition* umfasst all jene Denkprozesse, die mit dem Verstehen und Verarbeiten von Zahlen (gesprochene Zahlwörter, geschriebene arabische Zahlen) sowie mit dem Ausführen von Rechenoperationen (mental im Sinne von Kopfrechnungen oder beim schriftlichen Rechnen) zu tun haben. Die numerische Kognition unterscheidet sich von anderen Domänen der Kognition in vielerlei Hinsicht. [Noël \(2000\)](#) hebt hier vor allem drei Aspekte der Zahlenverarbeitung hervor:



- (a) Zahlen stellen einen besonderen Aspekt der Realität dar (es geht um Größe bzw. Mächtigkeit);
- (b) Zahlen sind Objekte spezifischer Denkprozesse, wie z. B. Rechnen, Größenvergleich, Paritätsbeurteilung; und
- (c) Zahlen können in verschiedenen Formaten repräsentiert werden, nämlich als arabische Zahlen (Ziffernfolgen, wie z. B. 37), geschriebene Zahlwörter (Buchstabenfolgen, wie z. B. *siebenunddreißig*), gesprochenen Zahlwörter (phonologische Sequenzen, wie z. B. „sieben und dreißig“), römische Zahlen (z. B. XXXVII) etc.

Während sich die Forschung erst in jüngerer Zeit mit der typischen und atypischen Entwicklung der Zahlenverarbeitung und Rechenleistungen beschäftigt, gibt es eine lange und reiche Tradition der wissenschaftlichen Untersuchung der Teilkomponenten des Rechnens bei Erwachsenen. Ausgangspunkt dieser Forschungstradition war die detaillierte neuropsychologische Beschreibung von erworbenen Rechenstörungen, also Ausfällen der Rechenleistungen als Folge einer Hirnschädigung, in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. In der zweiten



Teilkomponenten des Rechnens

Hälfte des 20. Jahrhunderts ermöglichten insbesondere die detailreichen Methoden der Kognitionspsychologie zunehmend die Untersuchung der numerischen Kognition bei kompetenten Erwachsenen. Auf dieser Forschungsrichtung basieren die wesentlichen neurokognitiven Modelle der Zahlenverarbeitung und des Rechnens, mit denen wir heute arbeiten.

Einen weiteren wesentlichen Entwicklungsschub erfuhre die Untersuchung der Rechenleistungen durch die modernen Techniken der Neurowissenschaften, die durch diverse bildgebende Verfahren die Erforschung der Gehirnaktivität bei Kindern und Erwachsenen mit unauffälligen Rechenleistungen ermöglichen. Wesentliche Erkenntnisse dieser reichen Forschungstradition sind die Identifikation einer ganzen Reihe von Teilkomponenten der Zahlenverarbeitung und der arithmetischen Leistungen bei Erwachsenen, die zum Teil erstaunlich unabhängig voneinander funktionieren und auch sehr spezifisch gestört sein können. Diese Erkenntnisse stellen eine wichtige Grundlage für die Erstellung von Modellen der typischen und atypischen Entwicklung der Rechenleistungen dar, daher sollen sie in diesem Kapitel detailliert erläutert werden.

1.2 Erste Fallberichte von Personen mit erworbenen Rechenstörungen

Probleme mit der Zahlenverarbeitung und / oder dem Rechnen treten nicht nur bei Kindern in Form von entwicklungsbedingten Rechenstörungen (bzw. Dyskalkulie) auf. Auch Erwachsene mit vormals guten arithmetischen Fertigkeiten können im Zuge einer neurologischen Erkrankung (also einer erworbenen Hirnschädigung infolge eines Hirntumors, Schlaganfalls oder Schädel-Hirn-Traumas) spezifische

entwicklungsbedingte vs. erworbene

Defizite beim Rechnen „erwerben“ (für eine Übersicht siehe z. B. Cipolotti / van Harskamp 2001; [Dehaene 1999](#)). Im Gegensatz zu den entwicklungsbedingten Rechenstörungen spricht man in diesem Zusammenhang von sogenannten erworbenen Rechenstörungen.

Die ersten detaillierten und systematischen Fallberichte von Personen mit erworbenen Rechenstörungen wurden 1919 von Henschen veröffentlicht, der auch den Begriff „Akalkulie“ einführte. Henschen konnte zeigen, dass Akalkulie sehr unterschiedliche Erscheinungsformen haben kann. Sie kann sowohl isoliert auftreten (also als einziges Symptom nach einer Hirnschädigung) als auch mit anderen Störungen wie Aphasie (erworbene Sprachstörung), Alexie (erworbene Lese- störung) oder Agraphie (erworbene Schreibstörung) einhergehen. Besonders hervorzuheben ist, dass die Arbeit von Henschen auch der erste Bericht einer spezifischen Beeinträchtigung des Erkennens und Lesens arabischer Zahlen ist, die unabhängig vom Ausführen von Rechenoperationen auftreten kann.

Bereits vor Henschen's einflussreicher Publikation wurde in der neurologischen Fachliteratur darauf hingewiesen, dass strukturelle Hirnschädigungen Rechenstörungen bedingen können (z. B. [Lewandowsky / Stadelmann 1908](#); [Peritz 1918](#); [Sittig 1917](#)). Diese frühen Berichte waren jedoch meist auf die Beschreibung von Personen mit Sprachstörungen (Aphasie) beschränkt, die zusätzlich auch Probleme beim Lesen und / oder Schreiben arabischer Zahlen oder beim Rechnen zeigten. Diese Form der erworbenen Rechenstörung, die mit anderen funktionellen Störungen wie Aphasie assoziiert ist, wurde von [Berger \(1926\)](#) als „sekundäre“ Akalkulie bezeichnet und folgegemäß von der „primären“ Akalkulie differenziert, die sich isoliert – also unabhängig von anderen kognitiven Defiziten – manifestiert. Berger war es auch, der erstmals berichtete, dass die

**Akalku
lie**

**primär
vs.
sekund
är**

Rechenfehler von Personen mit erworbenen Hirnschädigungen nicht alle Rechenoperationen gleichermaßen betreffen müssen, sondern dass spezifische Rechenoperationen selektiv gestört sein können: So kann beispielsweise Multiplikationswissen besser erhalten sein als Subtraktionswissen. Vor allem Schädigungen der linken hinteren (posterioren) Hirnabschnitte, die häufig in Sprachstörungen resultieren, wurden auch als Ursache für Rechenstörungen erkannt.

[Gerstmann \(1927; 1940\)](#) beschrieb erstmals einen Patienten, der nach einer Läsion in der Nähe des Gyrus angularis (lokalisiert im Scheitel- oder Parietallappen, der Teil hinterer Hirnabschnitte ist) eine Rechenstörung zeigte: Sie trat in Assoziation mit Fingeragnosie (defizitäres Erkennen der Finger), Agraphie (Schreibstörung) sowie Rechts-links-Desorientierung auf. Die Kombination dieser vier Symptome (Akalkulie, Fingeragnosie, Agraphie und Rechts-links-Störung) wurde nach deren Erstbeschreiber als Gerstmann-Syndrom benannt.

B
Gerstmann-Syndrom

Eine moderne Einzelfallanalyse der Rechenleistungen eines Patienten mit Gerstmann-Syndrom findet sich z. B. bei Delazer und Benke (1997; s. [Abschnitt 1.3](#)).

In der unmittelbaren Folgezeit auf Gerstmanns Publikationen wurde allgemein die Ansicht vertreten, dass Rechenstörungen lediglich ein sekundäres Symptom von grundlegenden visuell-räumlichen Defiziten seien (z. B. [Krapf 1937](#); [Singer / Low 1933](#)). So prägte [Krapf \(1937\)](#) den Begriff der „konstruktiven Akalkulie“ für eine Art der Rechenstörung, bei der Schwierigkeiten beim Schreiben von Zahlenkolonnen bzw. deren räumlicher Anordnung bestehen.

konstruktive Akalkulie

Häufig wird angezweifelt, ob es sich beim Gerstmann-Syndrom um ein einheitliches Störungsbild handelt, weil viele Personen nur eines, zwei oder drei der vier charakteristischen Symptome zeigen ([Benton 1977](#)). Nichtsdestotrotz ist das Interesse der aktuellen Forschung zur numerischen Kognition am Gerstmann-Syndrom wieder

neu erwacht, vor allem im Hinblick auf einen potenziellen Zusammenhang zwischen räumlicher und numerischer Kognition (Schlagwort „Zahlenraum“). Erst kürzlich wurde ein Sonderheft einer renommierten neurowissenschaftlichen Fachzeitschrift diesem Thema gewidmet (Sonderheft von Cortex [2008]: „Number, Space, and Action“, herausgegeben von Martin Fischer und Guilherme Wood).

Von Interesse ist, dass auch das Wissen um die Bedeutung der Operationszeichen gestört sein kann: So beschrieben [Ferro und Botelho bereits 1980](#) zwei neurologische Fälle (AL und MA), deren Rechenfehler bei einfachen Multiplikationen auf Operationsfehler zurückzuführen waren (z. B. $3 \times 5 = 8$ bzw. $9 \times 3 = 6$). Bei MA traten diese Fehler interessanterweise nur in der schriftlichen Modalität auf (also beim Bearbeiten arabischer Zahlen), nicht jedoch beim verbalen Lösen derselben Aufgaben (also beim Bearbeiten gehörter / gesprochener Rechenaufgaben). Diese Diskrepanz zeigt, dass rechnerische Fertigkeiten modalitätsspezifisch beeinträchtigt sein können: So kann die Verarbeitung arabischer Zahlen gestört, die Verarbeitung von Zahlwörtern aber erhalten sein.

B
modali
tätssp
ezifisc
he
Beeint
rächtigt
ungen

1.3 Akalkulie aus der Sicht der klinischen Neuropsychologie und der kognitiven (Neuro-)Psychologie

Der Hauptverdienst der ersten neurologischen Fallberichte ist sicher darin zu sehen, dass Rechenstörungen erstmals als Folgeerscheinung von Hirnläsionen beschrieben wurden (z. B. [Lewandowsky / Stadelmann 1908](#)). Der Großteil der damaligen neuro(psycho)logischen Fachwelt war allerdings lange Zeit der Meinung, dass Akalkulie als ein Begleitsymptom von anderen Störungen anzusehen sei. So publizierten Hecaen et al. mehrere Arbeiten, in denen sie einen Klassifikationsversuch von Akalkulie in folgende drei Subtypen vornahmen: (a) Akalkulie infolge von Lese- und / oder Schreibstörungen (von Zahlen); (b) Akalkulie infolge von räumlichen Defiziten beim schriftlichen Rechnen; und (c) die sogenannte Anarithmetie, welche Defizite beim

Ausführen arithmetischer Operationen reflektiert ([Hecaen / Angelerques 1961](#); [Luria 1973](#)).

Bereits in den frühen Falldarstellungen zeigt sich, dass Rechenstörungen von anderen kognitiven Störungen dissoziieren können, d. h. sie treten manchmal trotz intakter kognitiver Leistungen auf. Auch zwischen Teilkomponenten der numerischen und arithmetischen Fertigkeiten zeigen sich bei einzelnen Personen Dissoziationen, die uns wesentliche Aufschlüsse über unser kognitives System geben.

**Dissozi
ation**

Dissoziation und doppelte Dissoziation



Wenn eine Leistung A intakt ist, aber eine Leistung B defizitär, dann spricht man von einer *Dissoziation*. Eine *doppelte Dissoziation* liegt dann vor, wenn bei einer Person eine Leistung A erhalten, eine Leistung B jedoch defizitär ist und bei einer anderen Person das umgekehrte Leistungsprofil vorliegt (Leistung B ist intakt, aber Leistung A ist defizitär). Das Vorhandensein von doppelten Dissoziationen wird in der kognitiven Psychologie als Evidenz für die modulare Architektur kognitiver Systeme betrachtet ([Shallice 1988](#)). Man nimmt also an, dass die Leistungen A und B voneinander unabhängig sind, sowohl hinsichtlich ihrer funktionellen Aufgaben als auch hinsichtlich ihrer strukturellen (neuronalen) Korrelate.

Dissoziation zwischen Rechenfertigkeiten und intellektuellem Leistungsniveau: Eine Schlüsselarbeit für die aktuelle numerische Kognitionsliteratur war die von [Grafman et al.](#)



(1982) publizierte Gruppenstudie neurologisch auffälliger Personen. Untersucht wurden – erstmals mit einem standardisierten Rechentest – 76 Personen mit Hirnläsionen (41 mit links- und 35 mit rechtsseitigen Strukturschäden) sowie 26 Kontrollpersonen. Zwei Aspekte sind an dieser Analyse relevant:

- (a) Das Vorliegen bzw. der Schweregrad der Rechenstörung war unabhängig vom allgemeinen intellektuellen Leistungsniveau (s. [Lewandowsky / Stadelmann 1908](#); [Warrington 1982](#)); und
- (b) Personen mit linksseitiger Hirnstrukturschädigung hatten relativ zu jenen mit rechtshemisphärischen Läsionen und Kontrollpersonen die gravierendsten Rechenprobleme (s. [Jackson / Warrington 1986](#)).

Im Hinblick auf die intellektuelle Leistungsfähigkeit liegt eine doppelte Dissoziation vor: Wenn schwache Rechenleistungen bei unauffälligen intellektuellen Leistungen auftreten, sprechen wir von „Dyskalkulie“. Wenn umgekehrt überdurchschnittliche Rechenleistungen trotz niedrigem Intelligenzniveau vorliegen, dann sprechen wir vom „Savant-Syndrom“ (z. B. [Kelly et al. 1997](#)).

**Savant
-
Syndro
m**

Dissoziation zwischen Rechenfertigkeiten und Sprachleistung: Großen Einfluss auf die moderne Zahlen- und Rechenforschung hatten auch die Arbeiten von Elizabeth Warrington. Warrington konnte bereits 1982 anhand detaillierter Einzelfallanalysen zeigen, dass verschiedene Komponenten des Rechnens modular organisiert sind.

Im Jahre 1995 beschrieben Warrington et al. einen Patienten, die trotz globaler Aphasie gute Leistungen hinsichtlich der Zahlenverarbeitung und des Rechnens zeigte ([Rossor et al. 1995](#)). Dieses Fallbeispiel demonstriert

eindrücklich, dass gute Rechenleistungen nicht unbedingt intakte sprachliche Fähigkeiten voraussetzen (Hodges et al. 1992; [Lewandowsky / Stadelmann 1908](#)).

Dissoziation zwischen numerischem und nichtnumerischem Gedächtnis: [Cappelletti et al. \(2001\)](#) publizierten einen detaillierten Fallbericht eines Patienten (IH) mit semantischer Demenz: Das ist eine progrediente hirnorganische Erkrankung, die im Anfangsstadium meist durch beeinträchtigte Gedächtnisleistungen und Sprachstörungen charakterisiert ist. IH zeigte erstaunlich gut erhaltene numerisch-rechnerische Fertigkeiten, jedoch gravierende Defizite bei nichtnumerischen Gedächtnisinhalten. IH verfügte über sehr gutes Additions- und Subtraktionswissen beim Rechnen mit ein- und zweistelligen Zahlen (seine Bearbeitungsgenauigkeit von Multiplikations- und Divisionsrechnungen war etwas niedriger, jedoch weit über dem Rateniveau) und zeigte exzellente Leistungen beim Platzieren von Zahlen auf einem Zahlenstrahl. Offenbar führen Gedächtnisdefizite nicht zwangsläufig zu Beeinträchtigungen der Rechenleistungen.

Dissoziation zwischen Zahlenverständnis und Zahlenproduktion sowie zwischen dem Lesen von arabischen Zahlen und Zahlwörtern: [Benson und Denckla \(1969\)](#) stellten zwei Personen mit Gerstmann-Syndrom vor, die auch eine Aphasie hatten. Beide konnten einstellige Additionsaufgaben wie „4 + 5“ nicht korrekt verbal beantworten. Dennoch konnte eine Person die richtige Lösung niederschreiben und die andere die richtige Antwort unter mehreren möglichen auswählen. Diese Arbeit war ein Eckpfeiler für die moderne Kognitionspsychologie, weil sie erstmals anhand von Dissoziationen aufzeigte, dass Zahlenverständnis- und Zahlenproduktionssysteme funktionell voneinander unabhängig sein können.

Cipolotti et al. (1995; [Cipolotti 1995](#)) zeigten, dass Schwierigkeiten beim Lesen arabischer Zahlen sehr spezifisch sein können. Die von Cipolotti beschriebenen Personen hatten Schwierigkeiten beim Lesen arabischer Zahlen, nicht jedoch beim Lesen von Zahlwörtern. Die umgekehrte Dissoziation wurde ebenfalls beschrieben, so dass von einer doppelten Dissoziation zwischen den Lesemechanismen für arabische Zahlen und jenen für Zahlwörter gesprochen werden kann (s. [Abschnitt 1.5.1](#) „Struktur des Zahlensystems“).

Dissoziation zwischen verschiedenen Rechenoperationen: [Benson und Weir \(1972\)](#) beschrieben – erstmals nach [Berger \(1926\)](#) – eine Person, deren Rechenschwierigkeiten auf bestimmte Operationsarten beschränkt waren: Während Additionen und Subtraktionen intakt waren, bereiteten Multiplikationen und Divisionen auffällige Schwierigkeiten. Es gibt zahlreiche Fallberichte von Personen mit operationsspezifischen Defiziten beim Lösen einfacher Rechnungen. Selektive Probleme beim Lösen einfacher Additionen zeigte beispielsweise FS ([Van Harskamp / Cipolotti 2001](#)), während SS eine selektive Beeinträchtigung beim Lösen simpler Subtraktionsaufgaben zeigte.

Da auch ein Fallbericht von BB mit erhaltenem Subtraktionswissen bei defizitärem Additions- und Multiplikationswissen existiert ([Pesenti et al. 1994](#)), liegt in Bezug auf das Subtrahieren eine doppelte Dissoziation vor: Es kann sowohl selektiv erhalten als auch selektiv gestört sein. Letzteres gilt auch für das Multiplikationswissen (selektiv erhalten: JG [[Delazer / Benke 1997](#)], selektiv beeinträchtigt: VP [[Van Harskamp / Cipolotti 2001](#)]). Diese doppelten Dissoziationen stützen die Annahme, dass das arithmetische Wissen je nach Operationsart modular organisiert ist. In anderen Worten: Die Verarbeitungsprozesse und -mechanismen für jede

Operationsart scheinen unabhängig voneinander zu funktionieren.

Dissoziation zwischen arithmetischem Faktenwissen und prozeduralem Wissen: Eine grobe Differenzierung von Rechenfertigkeiten ist jene in das *arithmetische Faktenwissen* und das Wissen um *arithmetische Prozeduren* (s. [Abschnitt 1.5.2](#)).

Als *Faktenwissen* bezeichnet man einfache Rechnungen, deren Ergebnis man direkt aus dem Gedächtnis abrufen kann, ohne es „ausrechnen“ zu müssen (z. B. Einmaleins). *Prozedurales Wissen* umfasst alle Rechenprozeduren, die wir benutzen, um zu einem Ergebnis zu kommen. So muss man z. B. beim Lösen mehrstelliger schriftlicher Additionen wissen, wie man die Zahlen untereinander schreibt, ob man bei den Einern oder Zehnern / Hundertern mit dem Additionsprozess beginnt, wie man Überträge behandelt, wie man mit Nullen umzugehen hat etc. Die Unterscheidung zwischen Faktenwissen und prozeduralem Wissen wurde anhand von Einzelfallstudien wiederholt empirisch validiert (z. B. [Delazer / Benke 1997](#); [Hittmair-Delazer et al. 1994](#); [1995](#); [McCloskey et al. 1985](#); [Warrington 1982](#)).

Eine der frühesten detaillierten Beschreibungen einer Dissoziation zwischen arithmetischem Fakten- und Prozedurenwissen war eine Einzelfallstudie von einer hirngeschädigten Person (DRC), die Probleme beim direkten Faktenabruf hatte, dieselben einstelligen Rechnungen jedoch mit Hilfe sogenannter Backup-Strategien (in diesem Falle zeitaufwändige Zählprozeduren) lösen konnte ([Warrington 1982](#)).



Einzelfallstudien zur Unterscheidung zwischen Faktenwissen und prozeduralem Wissen

B

Mehr als ein Jahrzehnt später wurde Warringtons Bericht einer Dissoziation zwischen arithmetischem Faktenwissen und prozeduralem Wissen von Margarete Delazer et al. repliziert und sogar um die umgekehrte Dissoziation erweitert (Hittmair-Delazer et al. 1994; [Delazer / Benke 1997](#)). BE war ein 45-jähriger Buchhalter, der nach einem Hirninfarkt linker subkortikaler Hirnstrukturen (Basalganglien) zusätzlich zu einer rechtsseitigen Lähmung und einer Sprachstörung auch spezifische Probleme beim Abruf von Multiplikationsfakten zeigte (einfache Additionen und Subtraktionen bereiteten ihm vergleichsweise weniger Schwierigkeiten; Hittmair-Delazer et al. 1994). Erstaunlich war, dass dieser – von Berufs wegen in Arithmetik sehr geübte – Mann seine Faktenabrufdefizite durch teils sehr komplexe prozedurale Lösungsstrategien spontan kompensierte. So konnte er zwar die Lösung von „5 x 8“ nicht direkt aus dem Langzeitgedächtnis abrufen, konnte das korrekte Resultat (40) jedoch über Umwege lösen (z. B. $[8 \times 10] : 2$ bzw. $[5 \times 10] - [2 \times 5]$).

Ein konträres Leistungsprofil zeigte JG, eine 56-jährige Patientin, die nach einem hirnchirurgischen Eingriff zur Entfernung eines Tumors in linken parietalen Hirnarealen ein Gerstmann-Syndrom entwickelte ([Delazer / Benke 1997](#)). JG zeigte relativ gut erhaltenes Multiplikationsfaktenwissen, aber defizitäres Additions- und Subtraktionswissen. Im Gegensatz zu BE konnte JG ihr Abrufdefizit nicht durch prozedurales arithmetisches Wissen kompensieren.

Empirische Evidenz an Erwachsenen stützt die Annahme einer modularen Architektur von Rechenleistungen. Dissoziationen zwischen Rechenleistungen und nichtnumerischen Fähigkeiten einerseits sowie Dissoziationen zwischen verschiedenen Komponenten der Zahlenverarbeitung und des Rechnens andererseits zeigen, dass (a) Zahlenverarbeitung und Rechnen unabhängig von der allgemeinen intellektuellen Leistungsfähigkeit und von nichtnumerischen Fähigkeiten wie Sprache und Gedächtnis sind; und (b) dass verschiedene Teilbereiche des Rechnens nach erworbenen Hirnschädigungen selektiv beeinträchtigt sein können (z. B. operationsspezifische Defizite).

Zusammenfassung

1.4 Neurokognitive Modelle der numerischen Kognition bei Erwachsenen

Einer Vielzahl von systematischen und sehr differenzierten Einzelfall- und Gruppenstudien von gesunden und neurologisch auffälligen Personen mit Hirnverletzungen ist es zu verdanken, dass unser aktuelles Verständnis der kognitiven Prozesse und Mechanismen, die einer intakten Zahlenverarbeitung und guten Rechenfertigkeiten zugrunde liegen, bereits recht umfassend ist. Dass es trotz des akkumulierten Wissens immer noch beträchtliche Wissenslücken und Kontroversen gibt, spiegelt sich in den im Folgenden dargestellten Rechenmodellen wider.

Modell von McCloskey et al.: Das erste auf neuropsychologischen Theorien und erworbenen Rechenstörungen basierende Rechenmodell, das der Differenzierung unterschiedlicher Teilkomponenten der Zahlenverarbeitung und der arithmetischen Leistungen Rechnung trägt, stammt von McCloskey et al. (1985; s. [Abb. 1.1](#)).

Das Modell unterscheidet zwischen einem Inputsystem (Zahlenverständnis) und einem Outputsystem (Zahlenproduktion). Innerhalb beider Systeme findet sich jeweils eine Komponente für Verständnis / Produktion von Zahlwörtern und eine

Input- und Output system

weitere Komponente für Verständnis / Produktion arabischer Zahlen. Jede dieser Repräsentationsformen von Zahlen steht mit der zentralen abstrakten semantischen Repräsentationskomponente in Verbindung. McCloskey et al. (1985; [McCloskey 1992](#)) nehmen an, dass jede Zahl – in welcher Form auch immer sie präsentiert wird – eine interne abstrakte Größenrepräsentation generiert, welche ihrerseits wiederum das Outputsystem (also die Produktion) von Zahlen und Zahlwörtern aktiviert. Folglich evoziert jede Zahlenverarbeitung (Lesen / Schreiben gesprochener / geschriebener Zahlen) automatisch auch das Wissen um die numerische Größe dieser Zahl.

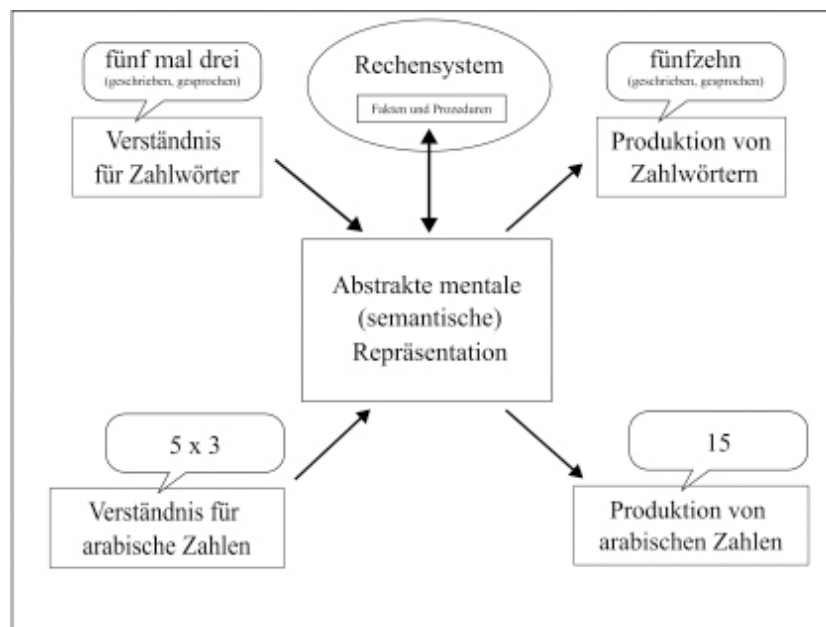


Abb. 1.1: Das Rechenmodell von McCloskey et al. (1985)

Zusätzlich zu diesen Komponenten der Zahlenverarbeitung enthält das Modell von McCloskey ein Rechensystem, das sich wiederum in eine Reihe von Teilkomponenten zerlegen lässt. Zum einen müssen für kompetentes Rechnen die speziellen Symbole (also etwa die Rechenoperationszeichen +, –, x und :) bekannt sein. Eine weitere wichtige Unterscheidung innerhalb der Rechenfertigkeiten ist die zwischen

**Reche
nsyste
m**

arithmetischen Prozeduren und arithmetischem Faktenwissen. Unter prozeduralem Wissen versteht man das Wissen um Lösungsalgorithmen. Unter arithmetischem Faktenwissen versteht man einfache Rechnungen mit einstelligen Operanden, die von Personen mit guten Rechenleistungen meist direkt aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden können.

Triple-Code-Modell: Das Triple-Code-Modell von Dehaene (1992; Dehaene / Cohen 1995) enthält – ebenso wie das Modell von McCloskey et al. – unterschiedliche Komponenten für unterschiedliche Repräsentationsformen von Zahlen und Mengen, die hier als unterschiedliche „Codes“ bezeichnet werden (s. Abb. 1.2). Die *visuell-arabische Zahlenform* ist für die Verarbeitung von arabischen Zahlen zuständig, die *verbal(-phonologisch)e Zahlenform* verarbeitet dagegen gesprochene und geschriebene Zahlwörter. Die dritte Komponente der *analogen Größenrepräsentation* ist bei all jenen Zahlenverarbeitungs- und Rechenprozessen involviert, die auf die Numerosität von Mengen oder Zahlen zugreifen. Anders ausgedrückt repräsentiert diese Komponente die eigentliche Zahlensemantik, also das Wissen um die numerische Größe bzw. Mächtigkeit einer Menge oder Zahl. Bei kompetenten Erwachsenen interagieren diese drei Codes, wann immer Zahlenverarbeitung stattfindet. Jede dieser Komponenten kann aber laut Dehaene auch spezifisch beeinträchtigt sein, so dass bei Beeinträchtigung der analogen Größenrepräsentation Zahlenlesen (Übersetzung einer arabischen Zahl in ein Zahlwort) oder Zahlenschreiben (Übersetzung eines Zahlworts in eine arabische Zahl) noch möglich sein sollte, ohne dass die Bedeutung der Zahlen bzw. deren Numerosität erfasst werden könnte.

3
Zahlen
modul
e / -
codes

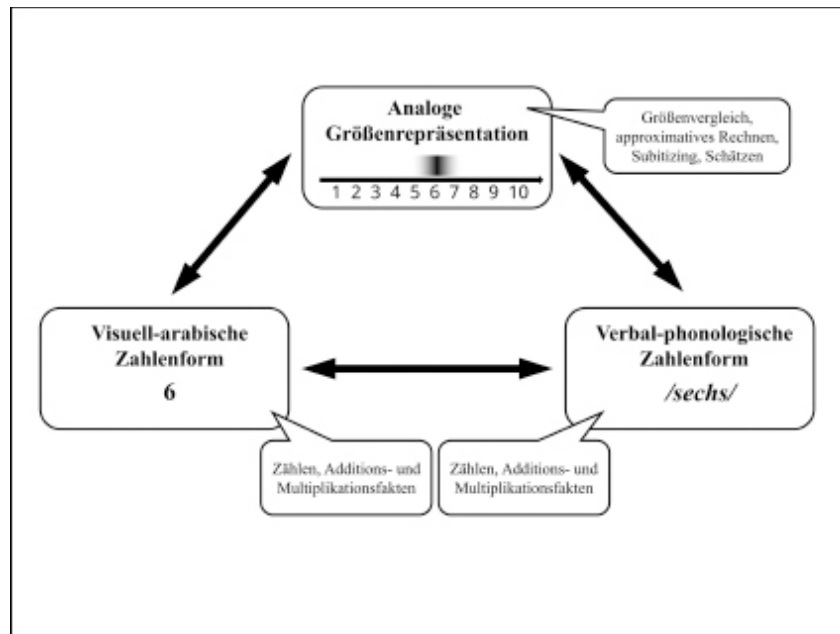


Abb. 1.2: Das Triple-Code-Modell von [Dehaene \(1992\)](#)

Mit der Annahme der funktionellen Unabhängigkeit der drei Zahlenformate unterscheidet sich Dehaenes Triple-Code-Modell vom Rechenmodell von McCloskey et al., das besagt, dass jede Zahlenverarbeitung zu einer automatischen Aktivierung der internalen semantischen Größenrepräsentation führt. Ein weiterer Unterschied zwischen den zwei Modellen ist deren Implikation für die Organisation bzw. die Verarbeitung von Rechenoperationen. So gibt es im Gegensatz zum McCloskey-Modell beim Triple-Code-Modell keine separate Komponente für Rechenleistungen. Vielmehr werden Leistungen der Zahlenverarbeitung und des Rechnens der Komponente zugeordnet, auf deren Repräsentationsform sie basieren. So erfordert schriftliches Rechnen mit mehrstelligen Zahlen den kompetenten Umgang mit arabischen Zahlen und ist somit der visuell-arabischen Zahlenform zugeordnet. Zählen sowie arithmetisches Faktenwissen (Addition und Multiplikation) sieht Dehaene als vorwiegend verbale Leistungen und ordnet sie daher der verbal-phonologischen Zahlenform zu. Die analoge Größenrepräsentation ist die

Unterschiede zum McCloskey-Modell

Grundlage von approximativen Rechenprozessen wie Schätzen, Größenvergleich oder dem Subitizing (ein spezieller Zählmechanismus im kleinen Zahlenraum, s. [Abschnitt 3.6.1](#)).

Im nächsten Abschnitt werden die wichtigsten Erkenntnisse zur numerischen Kognition dargestellt, auf denen diese beiden Modelle basieren.

1.5 Zentrale Komponenten der arithmetischen Verarbeitung

Im Gegensatz zu den frühen neurologischen und klinisch-neuropsychologischen Arbeiten, die meist unsystematische und eher anekdotische Fallbeispiele berichten, beruhen die Erkenntnisse der modernen Kognitionspsychologie auf sehr detaillierten und systematischen Untersuchungen von Denkprozessen und kognitiven Fähigkeiten ([Shallice 1988](#)).

An einem einfachen Beispiel sei dies illustriert: Wenn man ein 6-jähriges Kind und einen Erwachsenen bittet, die Aufgabe „4 + 2“ zu lösen, so werden beide Personen diese Rechenaufgabe richtig lösen.  Erst die exakte Erhebung der Bearbeitungszeit zeigt, dass das 6-jährige Kind viel länger braucht, um das Ergebnis zu produzieren, als der Erwachsene. Daraus lässt sich schließen, dass das Kind beim Lösen dieser einfachen Rechenaufgabe komplexe, mehrstufige Lösungsprozesse in Anspruch nehmen muss (z. B. Rechnen mit Hilfe der Finger). Die meisten Erwachsenen müssen für das Lösen derselben Rechenaufgabe nicht auf rechnerische Denkprozesse zurückgreifen, sondern können die Aufgabenlösung (6) spontan nennen.

Eine zentrale Erkenntnis dieser Forschungsrichtung ist, dass die arithmetische Verarbeitung *multikomponentiell* ist, sich also aus zahlreichen Teilkomponenten zusammensetzt. Zu unterscheiden sind die Komponenten der *Zahlenverarbeitung* im engeren Sinn (Lesen / Schreiben arabischer Zahlen, Vergleichen arabischer Zahlen etc.) einerseits und der *Rechenfertigkeiten* (Kopfrechnen, schriftliches Rechnen etc.) andererseits.

multikomponentielle Verarbeitung

Diese beiden Komponenten lassen sich in jeweils weitere Subkomponenten zerlegen, die im Folgenden im Detail dargestellt werden.

1.5.1 Basisnumerische Verarbeitung

Der Begriff *basisnumerische Verarbeitung* bezeichnet basale und für den Erwerb arithmetischer Kompetenzen grundlegende numerische Fertigkeiten.



Auf den ersten Blick scheint Zahlenverarbeitung sehr simpel zu sein. Schließlich führen kompetente Erwachsene entsprechende Prozesse x-mal am Tag automatisiert aus, ohne sich darüber weitere Gedanken zu machen. Die im Folgenden dargestellten detaillierten kognitionspsychologischen Analysen machen allerdings deutlich, dass es sich um einen komplexen Prozess handelt, der das effiziente Zusammenspiel einer Mehrzahl von Teilkomponenten erfordert.

Struktur des Zahlensystems

Eine Besonderheit des Zahlensystems ist, dass es auf einem Basis-10-System beruht. Der Aufbau dieses sogenannten dekadischen Positionssystems ist durch eine eindrückliche Regelmäßigkeit charakterisiert. Hervorzuheben ist jedoch, dass das verbale (gesprochene) und das arabische (geschriebene) Zahlensystem in ihrer Grundstruktur nicht identisch sind. Im arabischen Zahlencode ist die Komposition mehrstelliger Zahlen ab der Zahl 11 regelmäßig. In anderen Worten: Bei jeder Folgezahl erhöht sich die Einerstelle um eins ($n + 1$) und sobald wieder ein voller Zehner erreicht ist, beginnt dieser Prozess ($n + 1$) von neuem (z. B. 11, 12, 13 etc.; 21, 22, 23 etc. bis 91, 92, 93 etc.). Demgegenüber stellen beim Zahlwortsystem die Zahlwörter von 11 bis 19 eine besondere Wortklasse dar,

**dekadi
sches
Positio
nssyst
em**