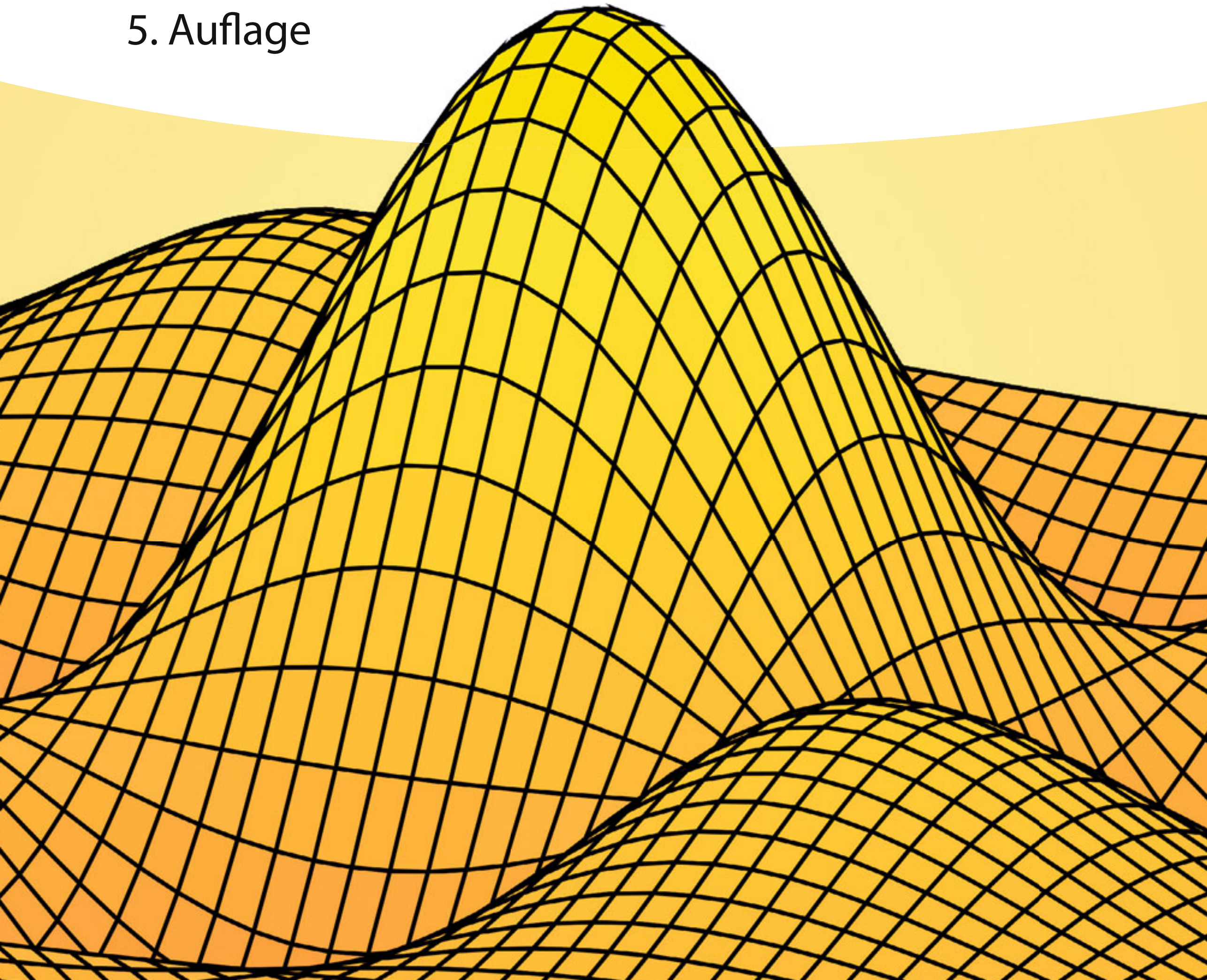
WILEY-VCH

Rainer Ansorge, Hans J. Oberle,
Kai Rothe und Thomas Sonar

# Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 1

Lineare Algebra und analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung einer Variablen

5. Auflage



**Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 1**

# Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 1

Lineare Algebra und analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung einer Variablen

*Rainer Ansorge, Hans J. Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar*

5. Auflage

WILEY-VCH
Verlag GmbH & Co. KGaA

**Autoren**

***Rainer Ansorge***
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

***Hans J. Oberle***
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

***Kai Rothe***
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

***Thomas Sonar***
Technische Universität Braunschweig
Institut für Partielle Differentialgleichungen
Universitätsplatz 2
38106 Braunschweig

5. Auflage 2020



**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.



**Print ISBN** 978-3-527-41374-4
**ePDF ISBN** 978-3-527-82288-1
**ePub ISBN** 978-3-527-82289-8

**Umschlaggestaltung** SCHULZ Grafik-Design, Fußgönheim, Deutschland
**Satz** le-tex publishing services GmbH, Leipzig, Deutschland

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

# Inhaltsverzeichnis

## Vorwort zur fünften Auflage

Der Text wurde für die Neuauflage vorsichtig überarbeitet und bekannt gewordene Fehler wurden korrigiert. Im Abschnitt zur Logik wurde ein wichtiger Fall aufgenommen, der bisher fehlte, aber dennoch verwendet wurde. Im Fall der Stetigkeit sind wir dem Wunsch nachgekommen, das $\varepsilon$-$\delta$-Kriterium nicht nur abstrakt für metrische Räume zu formulieren, sondern direkt für den Fall von Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wir hoffen, damit die Verständlichkeit des Textes noch einmal verbessert zu haben.

Wir danken dem Verlag für die Möglichkeit, dieses erfolgreiche Lehrbuch, das nun seit 26 Jahren auf dem Markt ist, in einer neuen Auflage präsentieren zu können.

Hamburg und Braunschweig, im November 2019 *Die Verfasser*

## Vorwort zur vierten Auflage

Nach über zehn Jahren fortdauerndem Interesse durch die geneigte Leserschaft hat uns der Verlag Wiley-VCH dazu ermutigt, eine weitere Neuauflage unserer Mathematik für Ingenieure in Angriff zu nehmen. Hiermit legen wir nun zunächst die Bände eins (Lehrbuch) und drei (Aufgabenband) zur Linearen Algebra und zur Analysis einer Variablen in nunmehr gemeinsamer Autorenschaft vor.

Die Bücher wurden grundlegend überarbeitet, die erläuternden Texte wurden erweitert und verbessert, viele alte und neue Abbildungen wurden verbessert bzw. neu erstellt. Der Aufgabenband wurde durch eine Vielzahl neuer Aufgaben einschließlich zugehöriger Lösungshinweise verstärkt, und auch inhaltlich wurde das Lehrbuch durch das Einfügen der im Bereich der Ingenieurwissenschaften zunehmend wichtigen *linearen Optimierung* erweitert. Die Beschreibung der numerischen Verfahren schließlich wurde ergänzt durch Hinweise auf Software in der MATLAB Rechenumgebung.

MATLAB dient inzwischen weitgehend als Standardwerkzeug im naturwissenschaftlich-technischen Bereich und steht den Studierenden der Technischen Universitäten in der Regel zur Verfügung.

Bedanken möchten wir uns bei vielen Studentinnen und Studenten, die uns zu unserer Ingenieur-Mathematik viel Lob, aber auch viele Verbesserungvorschläge haben zukommen lassen. Dankbar sind wir auch dem Verlag, in persona Frau Palmer und Frau Werner, für tatkräftige Ermutigung und Unterstützung. Natürlich wünschen wir, dass unser Werk auch weiterhin den Studierenden wie auch den in der Praxis tätigen Ingenieuren von Nutzen sein möge.

Hamburg und Braunschweig, im April 2010 *Die Verfasser*

## Vorwort zur dritten Auflage

Erneut erfordert die interessierte Nachfrage nach unserem Lehrbuch eine Neuauflage, zunächst des ersten Bandes, und diesmal unter der Schirmherrschaft des Verlages Wiley-VCH, der dankenswerterweise nach Übernahme des früheren Akademie Verlages bereit war, sich auch seinerseits für eine dritte Auflage zu engagieren.

Das Buch wurde vollständig neu durchgesehen, Abbildungen verbessert, noch vorhandene Druckfehler – soweit bekannt geworden – beseitigt, Rechenprogramme aus dem Buch mit entsprechendem Verweis ins Internet übernommen, weitere Übungsaufgaben zusätzlich integriert, das Lehrbuchverzeichnis aktualisiert, missverständliche Textstellen präzisiert. Darüber hinaus wird in einem dritten Ergänzungsband zur *Mathematik für Ingenieure* eine Fülle weiterer Übungs- und Klausuraufgaben einschließlich Lösungsvorschlägen bereitgestellt. Wir haben deshalb die Hoffnung, dass diese Neuauflage auch künftig den Studierenden wie dem Praktiker bei der Bewältigung anstehender Aufgaben hilfreich zur Seite stehen kann.

Hamburg, im Januar 2000 *Die Verfasser*

## Vorwort zur zweiten Auflage

Die freundliche Aufnahme, die unser Lehrbuch sowohl bei den Lesern wie bei der Kritik gefunden hat, veranlasst uns, diese rasch notwendig gewordene Neuauflage im Wesentlichen als Nachdruck der ersten Auflage vorzulegen.

Dennoch haben wir für mancherlei Verbesserungsvorschläge sowohl von den Studierenden wie aus dem Kollegenkreise Dank zu sagen. Wir sind diesen Vorschlägen weitestgehend gefolgt, und natürlich wurden alle uns bekannt gewordenen Druckfehler korrigiert.

Dank sagen wir auch dem Verlag für die uns zuteil gewordene Unterstützung.

So hoffen wir, dass auch diese zweite Auflage den Studierenden wie den in der Praxis tätigen Ingenieuren eine seriöse Hilfe beim Erlernen oder Nachschlagen grundlegender mathematischer Sachverhalte und deren Nutzung in mathematischen Modellen natur- oder ingenieurwissenschaftlicher Zusammenhänge sein wird.

Hamburg, im April 1997 *Die Verfasser*

# Vorwort

Diese zweibändige Ausgabe *Mathematik für Ingenieure* ist aus Lehrveranstaltungen hervorgegangen, die wir an den Technischen Universitäten Clausthal, München und Hamburg-Harburg über viele Jahre abgehalten haben. Der Gesamtumfang entspricht dem Stoff eines viersemestrigen Kurses von jeweils vier Semesterwochenstunden.

Da den Anfängern im ersten Semester vom Schulunterricht her zumeist eher Grundkenntnisse aus der Analysis als aus der Linearen Algebra zur Verfügung stehen, jedoch von Anbeginn in den technisch-naturwissenschaftlichen Grundvorlesungen – etwa in der Technischen Mechanik oder den Grundlagen der Elektrotechnik – alsbald auch Hilfsmittel aus der Linearen Algebra eingesetzt werden, beginnt der erste Band nach einführenden Abschnitten mit der Vektorrechnung und Analytischen Geometrie, gefolgt von Abschnitten über lineare Gleichungssysteme, lineare Abbildungen sowie lineare Ausgleichs- und Eigenwertprobleme. Erst dann wird zur Analysis der Funktionen einer reellen Veränderlichen übergegangen, wobei überall dort, wo dies ohne Mehraufwand möglich ist, auch sogleich komplexe Variable einbezogen werden. Der zweite Band umfasst die Analysis bei mehreren reellen Veränderlichen, Integralsätze, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Optimierung, Spezielle Funktionen, Integraltransformationen und Funktionentheorie einer komplexen Variablen. Großen Wert haben wir auf motivierende Modellbildungen aus ingenieurwissenschaftlichen Bereichen gelegt, wobei allerdings zu Anfang angesichts des Umstandes, dass die Kenntnisse der Studierenden zu diesem Zeitpunkt auch in ihrem jeweiligen technischen Hauptfach noch eher rar sind, keine großen Ansprüche gestellt werden können. Nahezu alle angesprochenen mathematischen Teilgebiete werden durch Einführung in zugehörige numerische Methoden sowie durch Übungsaufgaben ergänzt.

Wir verzichten nicht auf mathematische Strenge und nur selten auf Beweise mathematischer Aussagen, denn erst das Begreifen eines Zusammenhangs – was nicht als jederzeitige auswendige Reproduzierbarkeit eines Beweises durch die Studierenden misszuverstehen ist – kann zum Verständnis der Voraussetzungen einer Aussage und damit zur kritischen Einschätzung der großen Möglichkeiten, aber auch der Grenzen eines mathematischen Werkzeugs führen. Andererseits haben wir uns jedoch einer Sprache zu befleißigen versucht, die auf zu starren Formalismus verzichtet, statt dessen vielfach lieber klare verbale Formulierungen bevorzugt, nichtsdestoweniger aber auch formale Ausdrucksweisen benutzt, wo verbale Sprache auch bei Ingenieur-Anwendern eher erschwerend wirken würde.

Wir glauben, dass das Werk auch für Naturwissenschaftler und hinsichtlich der Modelle aus mancherlei technisch-naturwissenschaftlichen Anwendungen sogar für Studierende der Mathematik hilfreich sein kann, doch ist es für Ingenieure konzipiert.

Herzlichen Dank möchten wir den Sekretärinnen unseres Instituts, insbesondere Frau Monika Jampert, sagen, die bei der Erstellung der Druckvorlagen unschätzbare Dienste geleistet haben, und Herrn Uwe Grothkopf, der uns bei vielen Fragen im Zusammenhang mit der Benutzung des Textverarbeitungssystems LaTeX unterstützte. Unser Dank gilt auch vielen Kollegen und Mitarbeitern, die bei der kritischen Verwendung der als Vorläufer dieser Bände erstellten Vorlesungsskripten Ungereimtheiten aufgedeckt und so zur Gestaltung der nun vorliegenden Fassung beigetragen haben.

Nicht zuletzt sind wir dem Verlag, insbesondere Frau Gesine Reiher, für geduldiges Eingehen auf unsere Wünsche und für mancherlei Ratschläge zu Dank verpflichtet.

Hamburg, im Oktober 1993 *Die Verfasser*

# 1
# Aussagen, Mengen und Funktionen

In diesem und dem folgenden einführenden Abschnitt sollen einige Grundregeln der mathematischen Sprech- und Ausdrucksweise vereinbart werden. Hierzu werden die wichtigsten Begriffe über Aussagen, Mengen und Funktionen sowie später über die Zahlenbereiche zusammengestellt. Den Studierenden sollte der Stoff dieser Abschnitte im Wesentlichen von der Schule bekannt sein (mit Ausnahme vielleicht der komplexen Zahlen). Das Augenmerk sollte also hierbei eher auf dem Einüben der Notation liegen.

## 1.1 Aussagen

**Aussagen** sind Sätze, die wahr oder falsch sind. Vom Standpunkt der Aussagenlogik, aber auch für das formale Umformen von Aussagen ist nicht der Inhalt einer Aussage von Interesse, sondern ihr **Wahrheitswert**. Ist $A$ eine Aussage, so legen wir fest:

$$\begin{aligned} w(A) = 0 \quad &:\Longleftrightarrow \quad A \quad \text{ist falsch} \\ w(A) = 1 \quad &:\Longleftrightarrow \quad A \quad \text{ist wahr}\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

$w(A)$ bezeichnet dabei den Wahrheitswert der Aussage $A$; das Symbol $:\Longleftrightarrow$ bezeichnet die definierende Äquivalenz, sprachlich: „… wird definiert durch …“. Wir gehen davon aus, dass es nur zwei Wahrheitswerte gibt (Satz vom ausgeschlossenen Dritten, lat. „tertium non datur“) und dass jede (sinnvolle) Aussage entweder wahr oder falsch ist.

Sind $A$ und $B$ Aussagen, so werden die folgenden **Verknüpfungen** dieser Aussagen betrachtet:

$$\begin{array}{lcll} \neg A & : & \text{„nicht } A\text{“} & \text{(Negation)} \\ A \wedge B & : & \text{„}A \text{ und } B\text{“} & \text{(Konjunktion)} \\ A \vee B & : & \text{„}A \text{ oder } B\text{“} & \text{(Disjunktion)} \\ A \Rightarrow B & : & \text{„aus } A \text{ folgt } B\text{“} & \text{(Implikation)} \\ A \Leftrightarrow B & : & \text{„}A \text{ äquivalent zu } B\text{“} & \text{(Äquivalenz)}\,. \end{array}$$

Definiert werden diese „neuen“ Aussagen durch Festlegung ihrer Wahrheitswerte (in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Aussagen $A$ und $B$):

*Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 1*, 5. Aufl.
Rainer Ansorge, Hans J. Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar.

**Tafel (1.1): Wahrheitswertetafel.**

| $w(A)$ | $w(B)$ | $w(\neg A)$ | $w(A \wedge B)$ | $w(A \vee B)$ | $w(A \Rightarrow B)$ | $w(A \Leftrightarrow B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Man beachte:

i) $A \vee B$ ist auch wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. $\vee$ beschreibt also das „nicht ausschließende oder" im Gegensatz zum „entweder … oder".
ii) Eine Implikation $A \Rightarrow B$ ist immer wahr, wenn die **Prämisse** (das ist die Aussage $A$) falsch ist.

Mit Hilfe dieser Verknüpfungen lassen sich nun formal weitere Aussagen bilden, wie etwa:

$$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A). \tag{1.2}$$

Nun gilt: Die Aussage (1.2) ist immer, d. h. unabhängig von den Aussagen $A$ und $B$, wahr. Solche Aussagen heißen **Tautologien**. Wir überprüfen diese Eigenschaft anhand der zugehörigen Wahrheitswertetafel:

**Tafel (1.2): Wahrheitswertetafel zu (1.2).**

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ | (1.2) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tautologien lassen sich dazu benutzen, mathematische Aussagen in andere, äquivalente Aussagen umzuwandeln.

**Liste häufig verwendeter Tautologien (1.3)**

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $A \vee \neg A$ | Satz vom ausgeschlossenen Dritten |
| (2) | $\neg(A \wedge \neg A)$ | Satz vom Widerspruch |
| (3) | $\neg\neg A \Longleftrightarrow A$ | doppelte Verneinung |
| (4) | $\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ | Regel von de Morgan[1)] |
| (5) | $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$ | Regel von de Morgan |
| (6) | $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ | Kontraposition |
| (7) | $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ | modus ponens |
| (8) | $(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ | modus tollens |
| (9) | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ | modus barbara |
| (10) | $A \wedge (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | Distributivgesetz |
| (11) | $A \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | Distributivgesetz |

1) Augustus de Morgan (1806–1871); London.

**Beispiel (1.4)**
Zum Nachweis, dass die beiden Regeln von de Morgan (4) und (5) Tautologien sind, stellen wir die zugehörige Wahrheitswertetafel auf.

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $(\neg A) \wedge (\neg B)$ | $A \vee B$ | $\neg(A \vee B)$ | $A \wedge B$ | $\neg(A \wedge B)$ | $(\neg A) \vee (\neg B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

**Aussageformen** sind Aussagen, die von Variablen abhängen. So ist z. B.

$$A(x, y) :\Longleftrightarrow x^2 + y^2 < 2$$

eine (zweistellige) Aussageform in den Variablen $x$, $y$. Eine Aussageform selbst hat keinen Wahrheitswert. Erst wenn man für die Variablen konkrete Objekte (hier etwa reelle Zahlen) einsetzt, erhält man eine Aussage, die dann wahr oder falsch ist. Für obiges Beispiel ist etwa $A(\frac{1}{2}, 1)$ eine wahre und $A(-3, 2)$ eine falsche Aussage.

Für eine einstellige Aussageform $A(x)$ werden die folgenden Aussagen definiert:

$\forall x : A(x) \quad :\Longleftrightarrow$ **Für alle** $x$ ist $A(x)$ wahr.
$\exists x : A(x) \quad :\Longleftrightarrow$ **Es gibt** (wenigstens) ein $x$, so dass $A(x)$ wahr ist.
$\exists_1 x : A(x) \quad :\Longleftrightarrow$ **Es gibt genau** ein $x$, so dass $A(x)$ wahr ist.

Die Symbole $\forall$, $\exists$ und $\exists_1$ heißen **Quantoren**. Wichtig sind auch die Verneinungen der Quantoren:

$\neg(\forall x : A(x)) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists x : \neg A(x)$ **Es gibt** (wenigstens ein) $x$, so dass $A(x)$ nicht gilt.
Beispiel: $\neg(\forall x : x > 2) \Longleftrightarrow \exists x : x \leq 2$

$\neg(\exists x : A(x)) \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall x : \neg A(x)$ **Für alle** $x$ ist $A(x)$ falsch.
Beispiel: $\neg(\exists x : x^2 = -1) \Longleftrightarrow \forall x : x^2 \neq -1$

Die allgemeine Form eines **mathematischen Satzes** ist die Implikation $A \Rightarrow B$.

Dabei heißt $A$ die **Voraussetzung** (**Prämisse**), $B$ die **Behauptung** (**Konklusion**). Man sagt dann auch: $B$ ist eine **notwendige Bedingung** für $A$ und $A$ ist eine **hinreichende Bedingung** für $B$.

Für den **Beweis** eines mathematischen Satzes $A \Rightarrow B$ wird in der Regel ein sogenannter **Kettenschluss** durchgeführt:

$$A =: A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n = B\,.$$

Eine Begründung hierzu liefert die Tautologie (9) in Liste 1.3. Die einzelnen Schlüsse sind dabei einsichtig, sie sind z. B. bereits früher bewiesen worden oder sie folgen unmittelbar aus Axiomen. Diese Form des Beweises heißt **direkter Beweis**.

Beim sogenannten **indirekten Beweis** benutzt man die Kontraposition bzw. den modus tollens. Anstelle von $A \Rightarrow B$ beweist man $\neg B \Rightarrow \neg A$ oder: wenn die Behauptung $B$ nicht gilt, so ergibt sich ein Widerspruch zur Voraussetzung $A$.

Wir betrachten zwei einfache Beispiele für diese Beweisformen:

**Satz (1.5)**
Für eine natürliche Zahl $n$ gilt: $n$ gerade $\iff n^2$ gerade.

**Beweis.**
Wir beweisen die Äquivalenz, indem wir die beiden Implikationen

$$\begin{array}{lccl} & n \text{ gerade} & \Rightarrow & n^2 \text{ gerade} \\ \text{und} & n \text{ gerade} & \Leftarrow & n^2 \text{ gerade} \end{array}$$

einzeln nachweisen.

$\Rightarrow$: (direkter Beweis)

$$\begin{array}{lllll} n \text{ gerade} & \Rightarrow & n & = & 2k, \quad k \text{ natürliche Zahl,} \\ & \Rightarrow & n^2 & = & 4k^2 = 2(2k^2) \\ & \Rightarrow & n^2 & \multicolumn{2}{l}{\text{ist gerade.}} \end{array}$$

$\Leftarrow$: (indirekter Beweis)

$$\begin{array}{lllll} \text{Annahme: } n \text{ ungerade} & \Rightarrow & n & = & 2k-1, \quad k \text{ natürliche Zahl,} \\ & \Rightarrow & n^2 & = & (2k-1)^2 \\ & & & = & 4k^2-4k+1 \\ & & & = & 2(2k^2-2k)+1 \\ & \Rightarrow & n^2 & \multicolumn{2}{l}{\text{ist ungerade,}} \\ & & & \multicolumn{2}{l}{\text{im Widerspruch zur Voraussetzung!}} \end{array}$$

■

Wir betrachten ein zweites Beispiel für einen indirekten Beweis. Die äußere Form des Satzes ist dabei etwas anders, da keine Voraussetzung explizit genannt wird. Tatsächlich bilden jedoch die (üblichen) Rechenregeln für natürliche bzw. rationale Zahlen hier die Voraussetzungen.
Wir schließen aus

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg A$ | $\neg(A \Rightarrow B)$ | $(\neg A) \vee B$ | $\neg(\neg A \vee B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

die Regel

$$\neg(A \Rightarrow B) \iff \neg(\neg A \vee B).$$

Nach der Regel von de Morgan (siehe Liste 1.3 (5)) ist die rechte Seite äquivalent zu

$$\neg\neg A \wedge \neg B \iff A \wedge \neg B,$$

womit wir

$$\neg(A \Rightarrow B) \iff A \wedge \neg B \tag{1.3}$$

gezeigt haben. Damit können wir nun den folgenden Satz beweisen, wobei wir wie folgt vorgehen werden. Wir wollen zeigen: $x = \sqrt{2} \Rightarrow x$ ist keine rationale Zahl ($A \Rightarrow B$), zeigen dazu aber, dass $A \wedge \neg B$ *nicht* gilt, also muss $A \Rightarrow B$ richtig sein.

**Satz (1.6)**
$\sqrt{2}$ ist irrational, d. h., $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ mit $n, m$ natürliche Zahlen darstellen.

**Anmerkung**
Die klassische geometrische Fragestellung lautet: Sind die „Strecken" 1 und $\sqrt{2}$ kommensurabel (lat.: mit gleichem Maß messbar)?

Oder anders gesagt: Gibt es eine „kleine" Strecke $\Delta$ mit

$$1 = m \cdot \Delta \quad \text{und} \quad \sqrt{2} = n \cdot \Delta$$

($m, n$ natürliche Zahlen)?

Wenn es ein solches $\Delta$ gibt, so ist $\Delta = \frac{1}{m}$ und damit $\sqrt{2} = n \cdot \Delta = \frac{n}{m}$ eine rationale Zahl.

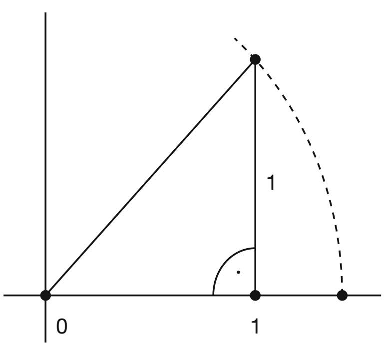



**Abb. 1.1** Konstruktion von $\sqrt{2}$.

**Beweis zu Satz 1.6 (indirekt mit (1.3)).**
**Annahme:** $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$; $n, m$ natürliche Zahlen. Weiter können wir annehmen, dass der Bruch $\frac{n}{m}$ gekürzt ist, d. h., $n$ und $m$ teilerfremd sind. (Damit haben wir $\neg B$ angenommen.)

Es folgt:

$$\begin{aligned} & 2m^2 = n^2 \\ \Rightarrow \quad & n^2 \text{ gerade} \\ \underset{\text{Satz 1.5}}{\Rightarrow} \quad & n \text{ gerade, etwa } n = 2k,\ k \text{ natürliche Zahl.} \end{aligned}$$

Dies in obige Gleichung eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned} & 2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \\ \Rightarrow\quad & m^2 = 2k^2 \\ \Rightarrow\quad & m^2 \text{ gerade} \\ \underset{\text{Satz 1.5}}{\Rightarrow}\quad & m \text{ gerade.} \end{aligned}$$

Damit haben wird einen Widerspruch konstruiert zu unserer Voraussetzung, dass $n$ und $m$ teilerfremd sind. $(A \wedge \neg B)$ gilt nicht, also folgt mit (1.3): $A \Rightarrow B$.

Die Annahme $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ ist also falsch! ■

## 1.2 Mengen

Wir verwenden den „naiven" Mengenbegriff nach Georg Cantor[2]. Hiernach ist eine Menge eine „Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen". Es soll jedoch kritisch angemerkt werden, dass sich hierdurch der Begriff „Menge" nicht streng definieren lässt; er ist ein Grundbegriff. Der korrekte Weg wäre es, Regeln festzulegen, wie man mit Mengen umzugehen hat. Dies führt auf die axiomatische Mengenlehre nach Ernst Zemelo und David Hilbert[3].

### Bezeichnungen

$$\begin{aligned} & A, B, \dots, M, N, \dots, \text{ Mengen }, \\ & a \in M \quad :\Longleftrightarrow \quad a \text{ ist Element der Menge} M \;, \\ & a \notin M \quad :\Longleftrightarrow \quad \neg(a \in M) \;. \end{aligned}$$

Mengen lassen sich definieren durch:

a) Aufzählung der Elemente $M := \{1, 2, 3, 4\}$,
b) eine charakterisierende Eigenschaft $A(x)$: $M := \{x \in \Omega : A(x)\}$.

Hierbei bezeichnet := die definierende Gleichheit („… wird definiert durch …") und $A(x)$ ist eine Aussageform, die für Objekte (Elemente) aus einem Grundbereich $\Omega$ erklärt ist.

$$\textbf{Gleichheit:}\quad M = N :\Longleftrightarrow \forall x : (x \in M \Longleftrightarrow x \in N) \tag{1.4}$$

$$\textbf{Teilmenge:}\quad M \subset N :\Longleftrightarrow \forall x : (x \in M \Rightarrow x \in N) \tag{1.5}$$

Eine Menge, welche kein Element enthält, heißt **leere Menge**. Nach (1.4) existiert nur eine leere Menge, diese wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

2) Georg Cantor (1845–1918); Berlin, Halle.
3) Ernst Zemelo (1871–1953); Göttingen, Zürich, Freiburg,
David Hilbert (1862–1943); Königsberg, Göttingen.

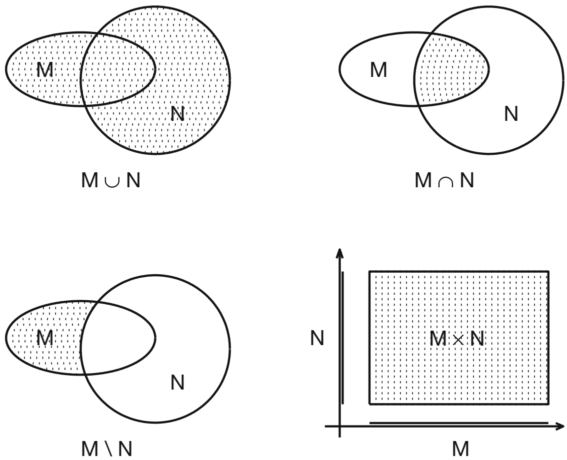



**Abb. 1.2** Verknüpfungen von Mengen.

**Ordnungseigenschaft (1.7)**

a) $M \subset M$,
b) $M \subset N \wedge N \subset M \quad \Rightarrow \quad M = N$,
c) $M \subset N \wedge N \subset P \quad \Rightarrow \quad M \subset P$.

**Verknüpfungen von Mengen (1.8)**

$$\begin{aligned}
M \cup N &:= \{x : x \in M \vee x \in N\} && \text{(Vereinigung)},\\
M \cap N &:= \{x : x \in M \wedge x \in N\} && \text{(Durchschnitt)},\\
M \setminus N &:= \{x : x \in M \wedge x \notin N\} && \text{(Differenz)},\\
M \times N &:= \{(a,b) : a \in M \wedge b \in N\} && \text{(Kartesisches[4] Produkt)},\\
\mathcal{P}(M) &:= \{X : X \subset M\} && \text{(Potenzmenge)}.
\end{aligned}$$

**Bemerkungen (1.9)**

a) Zwei Mengen $M, N$ mit leerem Durchschnitt, d. h., $M \cap N = \emptyset$, heißen **disjunkt**.
b) Die Begriffe Vereinigung, Durchschnitt und Kartesisches Produkt lassen sich unmittelbar auf mehrere Mengen verallgemeinern

$$\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \\
&:= \{a : \exists i \in \{1, \ldots, n\} : a \in A_i\}\,, \\
\bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \\
&:= \{a : \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a \in A_i\}\,,
\end{aligned}$$

4) René Descartes (Cartesius) (1596–1650); Paris, Niederlande.

$$\prod_{k=1}^{n} A_k = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$
$$:= \{(a_1, \ldots, a_n) : \forall i : a_i \in A_i\} .$$

c) Man beachte, dass für geordnete Paare bzw. geordnete $n$-Tupel gilt:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \quad \text{bzw.}$$
$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = y_i .$$

d) Wir geben einige wichtige Beispiele für kartesische Produkte an. Hierbei und im Folgenden bezeichne $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, vgl. Abschn. 2.2.
**Die euklidische Ebene**[5)]

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\} ,$$

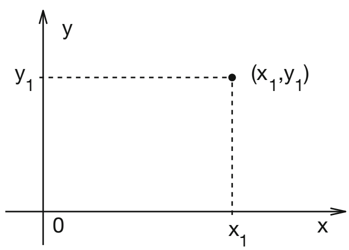



**Abb. 1.3** Die euklidische Ebene.

**Der dreidimensionale euklidische Raum**

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\} ,$$

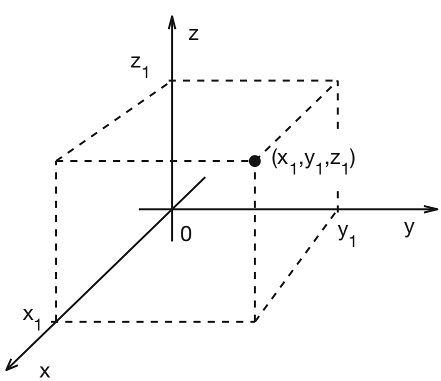



**Abb. 1.4** Der dreidimensionale euklidische Raum.

**Der $n$-dimensionale euklidische Raum**

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n\text{-fach}} = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

5) Eukleides bzw. Euklid (um 300 v. Chr.); Alexandria.

**Beispiele (1.10)**

a) Kreisfläche: $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$,

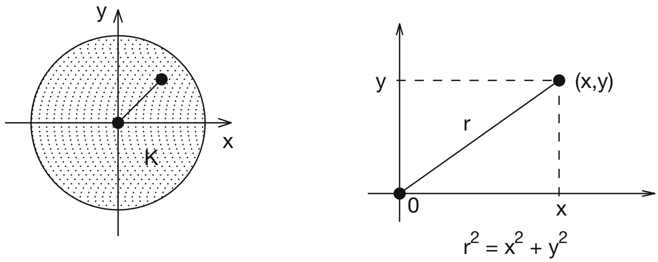



**Abb. 1.5** Kreisfläche.

b) Streifen: $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$,

$$\begin{aligned} 5 \leq x^2 + 1 \leq 17 &\iff 4 \leq x^2 \leq 16 \\ &\iff 2 \leq x \leq 4 \vee -4 \leq x \leq -2 \,, \end{aligned}$$

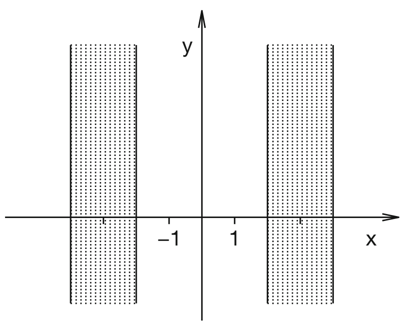



**Abb. 1.6** Streifen.

c) Für $a \leq b; a, b \in \mathbb{R}$ werden Intervalle definiert:

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall,} \\ ]a, b[ &:= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} && \text{offenes Intervall,} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} [a, b[ &:= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\} \\ ]a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \end{aligned}\right\} \quad \text{halboffene Intervalle.}$$

d) T-Träger: $T := T_1 \cup T_2$ mit

$$T_1 := \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right] \times [-\gamma, 0] \;, \quad T_2 := \left[-\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right), \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right] \times [0, \delta]$$

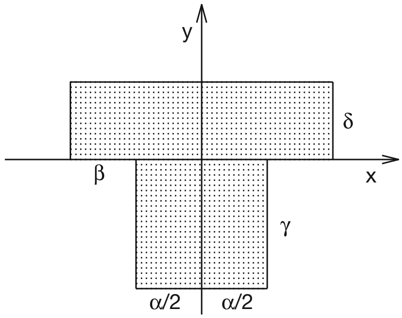



**Abb. 1.7** Querschnitt eines T-Trägers.

## 1.3 Funktionen

Seien $D$ und $Z$ Mengen. Unter einer **Funktion** (**Abbildung**) von $D$ nach $Z$ verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y \in Z$ zuordnet. Wir schreiben dann: $f : D \to Z$ und $y = f(x)$ oder $f : x \mapsto y$. Man hat also

$$f : D \to Z \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in D : \exists_1 y \in Z : y = f(x) . \tag{1.6}$$

$D$ heißt **Definitionsbereich**, $Z$ heißt **Zielmenge** oder **Bildbereich** von $f$. Die Menge

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in M\} \subset D \times Z \tag{1.7}$$

heißt der **Graph** der Funktion $f$.

Zu $A \subset D$ heißt

$$f(A) := \{f(x) \, : x \in A\} \tag{1.8}$$

das **Bild** von $A$ unter der Funktion $f$. Zu $B \subset Z$ heißt

$$f^{-1}(B) := \{x \in D \, : \, f(x) \in B\} \tag{1.9}$$

das **Urbild** von $B$ unter der Funktion $f$, vgl. Abb. 1.8.

Im Zusammenhang mit Funktionen tritt häufig das Problem der **Lösung bzw. Lösbarkeit von Gleichungen** auf, d. h., zu gegebenem $y \in Z$ wird eine Lösung $x \in D$ der Gleichung $f(x) = y$ gesucht.

Wir sagen:

$f : D \to Z$ heißt **surjektiv**, falls die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Z$ *wenigstens* eine Lösung $x \in D$ besitzt, falls also gilt

$$\forall y \in Z \; \exists x \in D : y = f(x) ; \tag{1.10}$$

$f : D \to Z$ heißt **injektiv**, falls die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Z$ *höchstens* eine Lösung $x \in D$ besitzt, also

$$\forall x_1, x_2 \in D : (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2) . \tag{1.11}$$