iblu pagine di scienza

C. Bartocci, R. Betti,
A. Guerraggio, R. Lucchetti
(a cura di)

Vite matematiche

Protagonisti del '900 da Hilbert a Wiles

Springer

C. Bartocci
Università di Genova

R. Betti
Politecnico di Milano

A. Guerraggio
Università L. Bocconi, Milano; Università dell'Insubria, Varese

R. Lucchetti
Politecnico di Milano

ISBN 978-88-470-0639-3

Springer-Verlag fa parte di Springer Science+Business Media
springer.com

Collana a cura di: Marina Forlizzi

Redazione: Barbara Amorese
Progetto grafico e impaginazione: Valentina Greco, Milano
Progetto grafico della copertina: Simona Colombo, Milano
Stampa: Grafiche Porpora, Segrate, Milano

Stampato in Italia
Springer-Verlag Italia S.r.l., via Decembrio 28, I-20137 Milano

Prefazione

Lo scibile matematico si espande a un ritmo vertiginoso. Nel corso degli ultimi cinquant'anni sono stati dimostrati più teoremi che nei precedenti millenni della storia umana: per fissare un ordine di grandezza, ogni anno sulle sole riviste specializzate sono pubblicati decine di migliaia di articoli di ricerca, e altrettanti trovano diffusione sul *web*. Se è pur vero che la maggior parte di questi risultati sono comprensibili e di interesse soltanto per specialisti, altri rappresentano invece fondamentali conquiste intellettuali, risolvendo ostici problemi o congetture celebri, stabilendo nessi inaspettati tra teorie diverse o dischiudendo nuovi orizzonti di ricerca. In non pochi casi, inoltre, i progressi della matematica, anche quelli che sembrano avere una portata limitata, si riverberano sulle altre discipline scientifiche, innescando innovativi sviluppi concettuali o trovando sorprendenti applicazioni tecnologiche.

Soltanto flebili echi di questa fervida attività di pensiero giungono al largo pubblico. I quotidiani possono riportare la notizia della dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat ottenuta da Andrew Wiles oppure la contorta vicenda della risoluzione della congettura di Poincaré da parte di Grisha Perelman, ma a parte questi casi sporadici la matematica rimane per lo più ignorata. Così, per ironia della sorte, proprio nel periodo del suo più fiorente rigoglio, essa appare al tempo stesso estremamente fragile, quasi vittima del suo proprio eccesso di specialismo, relegata a un ruolo di secondo piano sulla scienza della cultura, addirittura – a giudizio dei più pessimisti – a rischio di estinzione come scienza autonoma. Pochi anni or sono, Gian Carlo Rota ebbe modo di osservare: "Allo scadere del secondo millennio, la matematica corre seri pericoli di vita. Fra le molte minacce alla sua sopravvivenza, le più incombenti mi sembrano la crassa ignoranza dei suoi risultati, e la diffusa ostilità verso i suoi esponenti. Entrambe sono agevolate dalla riluttanza dei matematici a spingersi fuori dagli angusti confini della propria disciplina, e dalla loro inettitudine a tradurne il contenuto esoterico in slogan essoterici, com'è invece imperativo nell'era dei mezzi di informazione di massa e delle pubbliche relazioni".

Indipendentemente dal condividere o meno queste fosche profezie, rimane il fatto che non è per nulla facile coniare "slogan essoterici" per rendere appetibili al maggior numero possibile di palati le indigeste astrazioni della matematica. La fisica, la biologia, perfino la chimica possono far leva su richiami di sicuro effetto – i "segreti dell'universo", le "meraviglie della vita", i "misteri delle molecole" –, che, per quanto triti e ritriti, fanno presa sull'immaginario collettivo (se ci è permessa l'espressione) e possono servire da punto di partenza anche per opere di seria e rigorosa divulgazione. Ma quali sono i segreti, le meraviglie, i misteri svelati dalla matematica se non quelli che tali appaiono, in tutto il loro fascino, soltanto agli occhi degli adepti di questa disciplina?

Per tentare di illustrare la ricchezza della matematica del Novecento senza ricorrere a slogan o a formule di propaganda, nel presente volume si è provato a imboccare una strada diversa: portare alla ribalta alcuni dei protagonisti di questa straordinaria avventura intellettuale, che ha messo a nostra disposizione nuovi e potenti strumenti per indagare la realtà che ci circonda. All'origine di questa scelta vi sono almeno due motivi distinti. Innanzitutto, il desiderio di rendere giustizia al merito. Poco è stato scritto sulle persone – uomini e donne – che con le loro idee hanno reso possibili così profondi mutamenti scientifici, e le loro figure rischiano di rimanere nell'ombra insieme ai loro risultati. Se molti hanno sentito parlare di Russell, Gödel, von Neumann o Nash, quanti conoscono Emmy Nöther, Schwartz, Grothendieck o Atiyah? In secondo luogo, la volontà di dimostrare la falsità di una credenza diffusa e radicata. Si ritiene spesso che i matematici siano in tutto e per tutto simili agli stravaganti personaggi che popolano l'isola volante di Laputa, descritta nei *Viaggi di Gulliver* di Swift. Gli abitanti di questa terra – lo ricordiamo – sono a tal punto assorti in pensieri ed elucubrazioni sulla matematica e sulla musica che non riescono né a parlare né a seguire i discorsi altrui, e rischiano ad ogni momento di cadere in qualche precipizio o di sbattere la testa contro qualche palo. Per questa ragione si fanno sempre accompagnare da soccorrevoli servitori, che richiamano, quando necessario, l'attenzione del padrone toccandogli le labbra, le orecchie o gli occhi con una specie di sonaglio legato in cima a un bastoncino. Nulla di più lontano dalla verità: i matematici, pur talvolta nella bizzarria dei loro comportamenti, non hanno affatto bisogno di solleciti famuli che li riportino alla realtà, perché la loro curiosità è, in genere, vigile e aperta alla molteplicità del mondo. Molti dei ritratti contenuti in questo volume ci presentano personaggi dal forte carisma personale, dai vasti interessi culturali, appassionati nel difendere l'importanza delle proprie ricerche, sensibili alla bellezza, attenti ai problemi sociali e politici del loro tempo.

Nonostante le inevitabili omissioni (lo riconosciamo apertamente, ma "l'arte del biografo consiste proprio nella scelta", osservava Marcel Schwob nella Prefazione alle sue *Vite immaginarie*), quel che si è cercato di documentare è la centralità della matematica nella cultura, non solo scientifica, del nostro tempo, in un continuo gioco di scambi e di rimandi, di corrispondenze e di suggestioni. Per tale ragione, nelle pagine che seguono trovano posto non soltanto ritratti biografici di grandi matematici, ma testi letterari nei quali traspare questa sotterranea contiguità e, addirittura, due intrusi (almeno in apparenza), Robert Musil e Raymond Queneau: autori per i quali i concetti matematici hanno rappresentato un ausilio prezioso per indagare le modalità di un "nuovo rapporto tra la fantomatica leggerezza delle idee e la pesantezza del mondo" (sono parole di Calvino), per ricomporre il dissidio tra "anima e esattezza".

Claudio Bartocci
Renato Betti
Angelo Guerraggio
Roberto Lucchetti

Nota editoriale

Il presente volume riprende, con modifiche, ampliamenti e significative aggiunte, il numero 50-51 (dicembre 2003 - marzo 2004) della rivista *lettera matematica pristem*.

Indice

Prefazione V

I problemi di Hilbert 1
Un programma di ricerca per le generazioni future
di Umberto Bottazzini

Come eravamo 17
I protagonisti della "primavera italiana"
nei primi decenni del Novecento
di Giorgio Bolondi, Angelo Guerraggio, Pietro Nastasi

Intermezzo: Verlaine e Poincaré 35
da *Études littéraires* di Valéry

Bertrand Russell 39
Paradossi e altri enigmi
di Gianni Rigamonti

Godfrey H. Hardy 53
Una mente brillante
di Roberto Lucchetti

Emmy Nöther 61
La mamma dell'algebra
di Aldo Brigaglia

Intermezzo: Carciopholus romanus 75
di L. Sinisgalli

Paul Adrien Maurice Dirac 77
La ricerca della bellezza matematica
di Francesco La Teana

L'intelligenza teorica e la visione poetica
di John von Neumann 89
di Roberto Lucchetti

Kurt Gödel 97
Completezza e incompletezza
di Piergiorgio Odifreddi

Intermezzo: Hommage à Gödel 109
di Hans Magnus Enzensberger

Robert Musil 111
L'audacia dell'intelligenza
di Claudio Bartocci

Vita, morte e miracoli di Alan Mathison Turing 129
di Settimo Termini

Renato Caccioppoli 139
Napoli: fascismo e dopoguerra
di Angelo Guerraggio

Bruno de Finetti 155
I fondamenti della probabilità
di D. Michele Cifarelli

Andrej Nikolaevič Kolmogorov 165
Le basi delle probabilità. Ma non solo...
di Guido Boffetta, Angelo Vulpiani

Bourbaki 173
Un matematico dalla Poldavia
di Giorgio Bolondi

Scrittura e matematica nell'opera di Raymond Queneau 183
di Alessandra Ferraro

John F. Nash Jr. 191
Il mito di Icaro
di Roberto Lucchetti

Ennio De Giorgi 205
Intuizione e rigore
di Gianni Dal Maso

Laurent Schwartz 217
Impegno politico e rigore matematico
di Angelo Guerraggio

René Thom 231
Il conflitto e la genesi delle forme
di Renato Betti

Intermezzo: Il sogno 235
di Jorge Luis Borges

Alexander Grothendieck: entusiasmo e creatività 237
Un nuovo linguaggio al servizio dell'immaginazione
di Luca Barbieri Viale

Gian-Carlo Rota 251
Matematico e filosofo
di Domenico Senato

Steve Smale 265
Matematica e protesta civile
di Angelo Guerraggio

Michael F. Atiyah 275
Le ragioni profonde della matematica
di Claudio Bartocci

Vladimir Igorevič Arnol'd 293
Matematico universale
di Marco Pedroni

Enrico Bombieri 301
Il talento per la matematica
di Alberto Perelli

Martin Gardner 305
Il giocoliere della matematica
di Ennio Peres

Intermezzo: La porta dei miracoli 311
di Le Corbusier

F. William Lawvere 313
L'unità della matematica
di Renato Betti

Un'intervista a Andrew Wiles 325
di Claudio Bartocci

Premi per i matematici:
la medaglia Fields e il premio Abel 333

I problemi di Hilbert

Un programma di ricerca per le "generazioni future"

di **Umberto Bottazzini**

In un triangolo isoscele, se il rapporto fra l'angolo alla base e l'angolo al vertice è algebrico ma non razionale, il rapporto tra la base e il lato è sempre trascendente?

La semplicità di questo enunciato non deve trarre in inganno. Non si tratta di esercizio di Geometria euclidea alla portata di un bravo studente. È la traduzione in termini geometrici del fatto che la funzione esponenziale exp(iπz) debba assumere sempre valori trascendenti per valori algebrici irrazionali dell'argomento z. David Hilbert pensava che fosse un fatto "altamente probabile", anche se darne una dimostrazione gli sembrava impresa "estremamente difficile". Così lo annoverò nella lista di problemi per le "generazioni future" che presentò l'8 agosto 1900 a Parigi, intervenendo al secondo *Congresso Internazionale dei Matematici*.

"Chi di noi non solleverebbe volentieri il velo dietro cui si nasconde il futuro per gettare uno sguardo sui principali progressi della nostra scienza e i segreti del suo sviluppo nei secoli a venire!" esclamava Hilbert, iniziando la sua conferenza. Quali saranno gli obiettivi che si porranno i matematici del nuovo secolo, quali "le nuove verità e i nuovi metodi scoperti"?

La circostanza era unica. Il Congresso, a cavallo di due secoli, offriva al matematico di Gottinga l'occasione per "passare in rassegna le questioni aperte e i problemi che ci pone la scienza al giorno d'oggi", e invitare i matematici delle "generazioni future" a

David Hilbert

cimentarsi con essi. Il suo intervento era destinato a far epoca. Tuttavia, per chi immagina Hilbert leggere la sua conferenza diventata celebre in una sala affollata dai più autorevoli matematici del tempo, la cronaca del Congresso riserva delle sorprese. Il pubblico dei partecipanti non era molto numeroso, racconta un testimone come Gino Fano. Molti degli iscritti non si fecero vedere. Gli italiani erano in tutto una decina: Peano, e la sua scuola (Amodeo, Padoa, Vailati), un paio di insegnanti di Liceo e poi Levi-Civita e Volterra, che tenne la relazione di apertura. Tra i tedeschi mancavano Klein, Noether e tutti i berlinesi. Perfino tra i francesi, matematici di primo piano come Hermite, Picard, Jordan, Goursat, Humbert e Appell disertarono le sessioni del Congresso. L'intervento di Hilbert figurava tra le comunicazioni delle sezioni *Bibliographie et Histoire*. *Enseignement et methodes* riunite sotto la presidenza dello storico Moritz Cantor. Hilbert si limitò a presentare una decina dei 23 problemi che figurano nel testo preparato per la stampa. Così che, nel volume che raccoglie gli Atti, una nota informa che "lo sviluppo della comunicazione del sig. Hilbert, per via della sua grande importanza, è stato posto tra le conferenze".

Le osservazioni di carattere metodologico, premesse da Hilbert al suo elenco di problemi, sono illuminanti sulla sua concezione della Matematica e del suo sviluppo. "È innegabile il grande significato di determinati problemi per il progresso della scienza matematica in generale e il ruolo importante che essi giocano nel lavoro del singolo ricercatore", affermava Hilbert. Un matematico francese ha detto una volta che una teoria matematica non si può considerare completa finché non sia stata resa chiara al punto da poter essere spiegata al primo che passa per la strada. Lo stesso si può dire di un buon problema matematico: semplice da enunciarsi, e tuttavia intrigante, difficile ma non del tutto inabbordabile. L'insuccesso nell'affrontare un problema dipende spesso "dalla nostra incapacità di riconoscere il punto di vista più generale dal quale il problema che abbiamo di fronte ci appare come un singolo anello in una catena di problemi collegati fra loro". Trovato il giusto livello di generalità, non solo il problema si rivela più accessibile ma spesso troviamo anche i metodi adatti a risolvere problemi ad esso collegati. L'illimitata fiducia nelle capacità della ragione umana portava Hilbert a enunciare una sorta di "legge generale" del nostro pensiero, a stabilire come un assioma che qualunque problema matematico doveva essere suscettibile di soluzione. "In Matematica non c'è alcun *Ignorabimus*!" affermava (troppo) ottimisticamente Hilbert, rovesciando il celebre detto di Emil Du Bois-Reymond.

Tra i problemi classici, Hilbert ricordava quello della brachistocrona di Johann Bernoulli, che aveva dato origine al Calcolo delle variazioni, e l'ultimo teorema di Fermat, all'origine della teoria dei numeri ideali di Kummer e delle loro generalizzazioni a campi algebrici qualunque per mano di Dedekind e Kronecker. Di tutt'altra natura era il problema dei tre corpi che, in tempi recenti aveva portato Poincaré alla scoperta di "metodi fecondi e principi di grande portata". Il teorema di Fermat e il problema dei tre corpi si situavano per Hilbert ai "poli opposti" nell'insieme dei problemi matematici: "Il primo, libera creazione della pura ragione; il secondo, proposto dagli astronomi e indispensabile per la conoscenza dei più semplici fenomeni fondamentali della natura". Come quello dei tre corpi, anche i primi e più antichi problemi matematici – osservava Hilbert – "traggono certamente la loro origine dall'esperienza e sono ispirati dal mondo dei fenomeni esterni". Così era stato per le operazioni del contare o i problemi classici della geometria, la duplicazione del cubo o la quadratura del cerchio. Tuttavia, "nel progressivo sviluppo di una disciplina matematica lo spirito umano, incoraggiato dal successo delle soluzioni, prende coscienza della sua autonomia e crea lui stesso nuovi e fecondi problemi, nella maniera più felice, spesso senza apparenti stimoli esterni, unicamente per combinazione logica, per generalizzazione e specializzazione, per separazione e riunione dei concetti". Così erano sorti il problema della distribuzione dei numeri primi, la teoria di Galois delle equazioni algebriche, la teoria degli invarianti algebrici, la teoria delle funzioni abeliane e automorfe. Insomma, "quasi tutte le più sottili questioni delle moderne teorie dei numeri e delle funzioni".

Al tempo stesso, "sul potere creativo della pura ragione il mondo esterno esercita di nuovo la sua influenza". I fenomeni reali ci pongono nuove domande, schiudono nuove regioni della matematica e, "mentre cerchiamo di conquistare questi nuovi territori della scienza al dominio della pura ragione, troviamo spesso le risposte a vecchi problemi irrisolti e al tempo stesso sviluppiamo al meglio le vecchie teorie. Su questi sempre reiterati scambi tra ragione e esperienza riposano, mi sembra, le numerose e sorprendenti analogie e quell'armonia apparentemente prestabilita che il matematico tante volte percepisce nelle questioni, i metodi e i concetti dei diversi campi della scienza".

Nella continua interazione tra libere creazioni della ragione e conoscenza dei fenomeni del mondo esterno risiedeva, dunque, per Hilbert la dinamica fondamentale dello sviluppo della matematica e, insieme, la spinta al processo di matematizzazione delle altre scienze. Il rigore delle dimostrazioni, caratteristica peculiare della matematica – per Hilbert "un bisogno filosofico generale della nostra ragione" – era altrettanto necessario nel trattare le più delicate questioni di analisi e le questioni che hanno origine nel mondo esterno, nel mondo dell'esperienza empirica.

Il testo della conferenza di Parigi fa giustizia dell'immagine caricaturale che spesso si dà della concezione hilbertiana della matematica, ridotta ad un puro gioco formale con simboli senza significato. Certo, "a nuovi concetti corrispondono necessariamente nuovi segni", osservava Hilbert. Ma questi segni sono scelti in modo da ricordarci i fenomeni che li hanno generati. Così, per esempio "i segni aritmetici sono figure scritte e le figure geometriche sono formule disegnate. E nessun matematico potrebbe rinunciare a queste formule disegnate". D'altra parte – continuava Hilbert – "nelle ricerche aritmetiche, così come nelle ricerche geometriche, noi non seguiamo in ogni momento la catena delle operazioni mentali fino agli assiomi". Nell'affrontare un nuovo problema, "ricorriamo a certe combinazioni rapide, inconsapevoli, non definitivamente sicure, fidandoci di una certa sensibilità aritmetica verso il modo di agire dei segni aritmetici, senza la quale progrediremmo nell'aritmetica altrettanto poco quanto senza l'immaginazione geometrica faremmo nella geometria". Egli ne aveva dato un saggio nelle proprie ricerche sui fondamenti dalla geometria, argomento di suoi corsi e del volume *Grundlagen der Geometrie* (GG), apparso nel 1899 come *Festschrift* in occasione dell'inaugurazione del monumento a Gauss e Weber a Gottinga.

Nella *Spiegazione introduttiva* ai GG Hilbert dichiarava di considerare "tre diversi sistemi di oggetti", chiamati rispettivamente punti, rette e piani e aggiungeva che "la descrizione esatta e completa" delle relazioni che intercorrono tra essi era affidata agli assiomi. "Con ciò si ascrive agli assiomi qualcosa che è compito delle definizioni", aveva obiettato il logico Gottlob Frege, convinto che gli assiomi della geometria sono enunciati veri la cui conoscenza "scaturisce da una fonte conoscitiva di natura extralogica, che potremmo chiamare intuizione spaziale".

Per Hilbert, al contrario, gli assiomi non erano enunciati di per sé veri. Il criterio di verità e di esistenza degli oggetti matematici era affidato alla dimostrazione della non contraddittorietà degli assiomi (e delle loro conseguenze). "Ogni teoria è solo un telaio, uno schema di concetti unitamente alle loro mutue relazioni necessarie", che può essere applicato a "infiniti sistemi di enti fondamentali", ribatteva a Frege. Questi ultimi potevano venir pensati in modo arbitrario. Era sufficiente che le relazioni fra essi fossero stabilite dagli assiomi per ottenere tutte le proposizioni della teoria. Il metodo assiomatico metteva in luce la trama deduttiva, il legame di dipendenza che intercorre tra gli assiomi e i teoremi. Questo, agli occhi di Hilbert, era il suo pregio essenziale. Certo, se si voleva applicare una teoria al mondo dei fenomeni, era necessaria "una certa dose di buona volontà e un certo senso della misura". Occorreva, invece, una "enorme dose di cattiva volontà" per applicare una teoria assiomatica a fenomeni diversi da quelli per i quali la teoria era stata pensata.

I problemi proposti da Hilbert toccavano una varietà di questioni: in primo luogo, i fondamenti dell'Analisi (problemi 1, 2) e della Geometria (3, 4, 5) e l'assiomatizzazione delle teorie fisiche (6). Il primo problema aveva a che fare con la natura del continuo: "ogni sistema infinito di numeri reali, cioè ogni insieme infinito di numeri (o di punti) è equivalente all'insieme di tutti i numeri naturali 1, 2, 3, … oppure è equivalente all'insieme di tutti i numeri reali, e di conseguenza al continuo". Dalla dimostrazione sarebbe conseguita la dimostrazione dell'*ipotesi del continuo* di Cantor, per cui la potenza del continuo è quella immediatamente superiore a quella del numerabile. Secondo Hilbert la "chiave della dimostrazione" poteva forse venire dall'affermazione di Cantor che ogni insieme infinito poteva essere ben ordinato. L'insieme dei numeri reali, nell'ordinamento naturale, non era certo un insieme ben ordinato. Si poteva tuttavia – chiedeva Hilbert – trovare per quell'insieme un altro ordinamento, di modo che ogni suo sottoinsieme avesse un primo elemento? In altre parole, si poteva trovare un buon ordinamento per il continuo?

Prima che qualche matematico rispondesse alla domanda, Bertrand Russell rese nota un'antinomia che minacciava seriamente le fondamenta dell'intero edificio della teoria degli insiemi di Cantor. La questione posta da Hilbert si intrecciò allora con la più generale questione dei fondamenti della teoria cantoriana degli insiemi e diede vita a un enorme complesso di ricerche di carattere logico e fondazionale, in cui si impegnarono molti dei suoi allievi e collaboratori a cominciare da Ernst Zermelo che, nel 1904, fornì una prima assiomatizzazione della teoria degli insiemi e mise in luce il ruolo del cosiddetto *assioma di scelta*. Per quanto riguarda in particolare l'ipotesi del continuo di Cantor, un primo risultato significativo fu ottenuto da Kurt Gödel che, nel 1938, dimostrò che l'ipotesi (generalizzata) del continuo era compatibile con l'assioma di scelta e gli altri assiomi della teoria degli insiemi. Che l'ipotesi del continuo sia anche indipendente da essi fu tuttavia dimostrato solo nel 1963 da Paul Cohen.

Intimamente legato al primo era il secondo problema proposto da Hilbert. Nei GG, aveva mostrato che la non-contraddittorietà degli assiomi della Geometria euclidea era riconducibile a quella degli assiomi dell'aritmetica dei numeri reali nel senso che, come spiegava ora, "ogni contraddizione nelle deduzioni dagli assiomi geometrici deve essere riconoscibile nell'aritmetica" dei numeri reali. Dunque – continuava Hilbert – "si rende necessario un metodo diretto per la dimostrazione della non-contraddittorietà degli assiomi dell'aritmetica", essenzialmente gli assiomi per le usuali regole di calcolo con l'aggiunta di un assioma di continuità (ossia l'*assioma di Archimede* e un nuovo *assioma di completezza* enunciato da Hilbert in un recente lavoro, che stabiliva l'impossibilità di un'ampliamento archimedeo della retta reale e modificava in punto essenziale il sistema di assiomi stabilito nella prima edizione dei GG).

Hilbert attribuiva un ruolo decisivo alle dimostrazioni di non contraddittorietà, come criterio di esistenza degli oggetti matematici. "Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi. Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza", aveva scritto pochi mesi prima a Frege, rispondendo alle sue critiche sull'impianto assiomatico dei GG. "Se a un concetto sono assegnati attributi contraddittori, dico che quel concetto matematicamente non esiste", dichiarava ora pubblicamente Hilbert. Con dimostrazioni di carattere esistenziale (il *teorema della base* del 1888 e il *teorema degli zeri* del 1890), una decina d'anni prima, aveva stupito il mondo matematico. L'auspicata dimostrazione della non contraddittorietà degli assiomi dell'aritmetica sarebbe stata al tempo stesso la dimostrazione dell'esistenza dei numeri reali ossia del continuo. Poiché la coerenza della geometria e dell'analisi era riconducibile a quella dell'aritmetica, la dimostrazione diretta di quest'ultima avrebbe garantito la non contraddittorietà dell'intera matematica. Il secondo problema annunciava di fatto l'ambizioso programma che Hilbert e i suoi allievi avrebbero perseguito negli anni Venti, prima che il teorema di incompletezza di Gödel (1931) dimostrasse l'impossibilità dell'impresa nei termini in cui Hilbert l'aveva formulata e portasse alla sua drastica revisione.

I successivi tre problemi erano ispirati alle proprie ricerche sui fondamenti della geometria. Nei GG, Hilbert aveva mostrato che nella geometria piana gli assiomi di congruenza (senza ricorso all'assioma di continuità) sono sufficienti per provare la congruenza di figure rettilinee. Già Gauss aveva osservato, invece, che la dimostrazione di teoremi di geometria solida come quello di Euclide – piramidi di ugual altezza e base triangolare stanno tra loro come le rispettive basi – dipende dal metodo di esaustione ossia, in ultima analisi, da un assioma di continuità. Nel problema 3, Hilbert invitava a esibire "due tetraedri di ugual base e ugual altezza che non possono essere in alcun modo suddivisi in tetraedri congruenti". La prova venne due anni più tardi dal suo allievo Max Dehn (1878-1952).

Un altro allievo di Hilbert, Georg Hamel (1877-1954), aveva affrontato con successo il quarto problema enunciato nella conferenza di Parigi. Hilbert aveva attirato l'attenzione sulla geometria sviluppata da Minkowski nella *Geometrie der Zahlen* (1896), in cui valgono tutti gli assiomi della geometria ordinaria (compreso quello delle parallele) eccetto l'assioma di congruenza dei triangoli, rimpiazzato dalla disuguaglianza triangolare. Da parte sua, nel 1895 Hilbert aveva studiato una geometria in cui valgono tutti gli assiomi della geometria di Minkowski, tranne quello delle parallele. Convinto della loro importanza in teoria dei numeri, nella teoria delle superficie e nel Calcolo delle variazioni, Hilbert invitava ora allo studio sistematico delle geometrie in cui valgono tutti gli assiomi di Euclide eccetto quello di congruenza dei triangoli (l'assioma III.5 dei GG) sostituito dalla disuguaglianza triangolare, assunta come un particolare assioma. Hamel dimostrò che le uniche geometrie possibili erano ellittiche (nel caso del piano intero) oppure iperboliche del tipo studiato da Minkowski e Hilbert. Il problema era comunque formulato da Hilbert in termini abbastanza vaghi e, nei decenni successivi, ha dato origine a un gran numero di ricerche su particolari classi di geometrie.

Nei suoi lavori sui gruppi continui di trasformazioni, Lie aveva stabilito un sistema di assiomi per la geometria e risolto il problema di determinare tutte le varietà n-dimensionali che ammettono (localmente) un gruppo di movimenti rigidi, ossia il problema posto da Riemann e Helmholtz della caratterizzazione del movimento rigido dei corpi. Lie aveva assunto che le trasformazioni dei suoi gruppi fossero funzioni differenziabili. Nel 1898, Klein aveva avanzato dubbi sulla necessità di questa ipotesi, e ora, nel problema 5, Hilbert riprendeva la questione chiedendosi se, per quanto riguarda gli assiomi della geometria, l'ipotesi della differenziabilità fosse inevitabile o questa non fosse invece una conseguenza di altri assiomi geometrici.

Più che un problema vero e proprio, il problema 6 era l'indicazione di un programma di ricerca. Sul modello delle ricerche sui principi dell'aritmetica e della geometria, Hilbert esortava a "trattare assiomaticamente le branche della fisica dove la matematica gioca al giorno d'oggi un ruolo preponderante". Egli aveva in mente i ragionamenti di natura probabilistica introdotti da Clausius e Boltzmann nella teoria cinetica dei gas, e le ricerche sui principi della meccanica di Mach e dello stesso Boltzmann. Dall'inizio del secolo, prima con Minkowski e poi, dopo la morte prematura dell'amico (1909), con i suoi assistenti, per un paio di decenni Hilbert dedicò una crescente attenzione ai problemi della fisica teorica. Tenne corsi e seminari su particolari argomenti; pubblicò importanti lavori come l'articolo del 1915, apparso a poche settimane da quello di Einstein, nel quale otteneva le equazioni della relatività generale e esortò allievi e assistenti ad impegnarsi in questo tipo di ricerche. Nello stesso campo di ricerche, si colloca anche il teorema di Emmy Nöther (1918) – un teorema di Calcolo delle variazioni – fondamentale nella moderna fisica matematica, che mette in relazione il numero dei parametri di un sottogruppo di invarianti per i sistemi lagrangiani con il numero di leggi di conservazione derivabili per tali sistemi. Con Richard Courant scrisse il trattato *Matematische Methoden der Physik* (Metodi matematici della fisica, 1924) divenuto classico.

Volumi di suoi allievi, come *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (Teoria dei gruppi e meccanica quantistica, 1928) di Hermann Weyl e *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Fondamenti matematici della quantistica, 1932) di John von Neumann si possono annoverare tra i frutti più significativi ottenuti nello spirito del sesto problema di Hilbert. Tuttavia, come riconosceva lo stesso Weyl, nonostante i grandi risultati ottenuti, "il vasto progetto di Hilbert per la fisica non venne mai a maturazione".

Per quanto riguarda invece la teoria della probabilità, l'assiomatizzazione auspicata da Hilbert prese forma nella scuola russa di Bernstein e Kolmogorov, nel contesto della moderna teoria della misura.

Dopo i problemi relativi ai fondamenti, Hilbert passava a considerare problemi specifici, a cominciare dalla Teoria dei numeri, la disciplina cui aveva dedicato le sue ricerche degli ultimi anni, culminate nella pubblicazione dello *Zahlbericht*. Anzitutto il problema 7, che abbiamo visto in apertura, e altri problemi correlati ad esso (che hanno trovato soluzione negli anni Trenta da parte di Gelfond) e poi (problema 8) la distribuzione dei numeri primi e la *congettura di Riemann*, forse la più importante congettura a tutt'oggi aperta in Matematica.

Questi ultimi due problemi rientrano tra quelli che Hilbert presentò effettivamente nella sua conferenza a Parigi. Gli altri di cui parlò furono il primo, il secondo, il sesto, il tredicesimo, il sedicesimo, il diciannovesimo e ventiduesimo. Con i problemi compresi fra il nono e il diciottesimo, dalla Teoria dei numeri passava a problemi di algebra o di geometria algebrica. Il decimo problema, ad esempio, richiedeva una procedura per determinare con un numero finito di operazioni se una data equazione diofantea in n incognite avesse soluzioni intere. Il tredicesimo richiedeva, invece, di dimostrare che l'equazione generale di settimo grado non è risolubile con funzioni di due soli argomenti. Stabilire fondamenti rigorosi per il calcolo di Schubert nella geometria enumerativa era l'argomento del quindicesimo problema, mentre il problema 16 riguardava la topologia delle curve e delle superfici algebriche. Di natura geometrica erano anche i due successivi problemi. Estendendo un teorema stabilito nel capitolo conclusivo dei GG, dedicato alla possibilità delle costruzioni con riga e compasso, il problema 17 poneva la questione se una qualunque forma definita (ossia una funzione razionale intera di n variabili a coefficienti reali che non assume valori negativi per nessun valore reale delle variabili) potesse essere espressa come quoziente di somme di quadrati, mentre il problema 18 richiedeva l'estensione allo spazio euclideo n-dimensionale dei risultati di Poincaré (e Klein) sui gruppi di movimenti nel piano (e nello spazio) di Lobačevskij, per cui esiste una regione fondamentale, e sul conseguente ricoprimento del piano (e dello spazio) in regioni congruenti. Ad essa correlata era la questione "importante per la teoria dei numeri e forse talvolta utile in fisica e in chimica: come si possono collocare nello spazio nella maniera più densa possibile un numero infinito di solidi congruenti di data forma, per es. sfere di raggio dato o tetraedri regolari di dato spigolo?"

Nel gruppo finale di problemi, Hilbert prendeva in considerazione argomenti di analisi. Nel diciannovesimo problema, si chiedeva se "le soluzioni dei problemi regolari del Calcolo delle variazioni sono necessariamente analitiche" mentre il ventesimo problema riguardava l'esistenza di soluzioni di equazioni differenziali alle derivate parziali con date condizioni al contorno.

Nel ventunesimo problema, ispirato a risultati di Riemann e Fuchs, Hilbert chiedeva di mostrare che esiste sempre un'opportuna equazione differenziale lineare con assegnati punti singolari e gruppo di monodromia. Il penultimo problema riguardava l'approfondimento dei risultati di uniformizzazione di Poincaré nella teoria delle funzioni automorfe. Infine, nell'ultimo problema Hilbert esortava a "ulteriori sviluppi dei metodi del Calcolo delle variazioni".

Guardando al complesso dei 23 problemi, ci si rende conto che le ricerche originate disegnano la trama dello sviluppo di alcune tra le più importanti branche della matematica del Novecento. Mentre alcuni problemi erano formulati in maniera chiara e precisa, in altri casi Hilbert proponeva invece la creazione di una nuova teoria o di un nuovo programma di ricerca al quale esortare i giovani matematici. Da questo punto di vista, le oltre sessanta tesi di dottorato scritte sotto la sua direzione tra il 1898 e il 1915 sono rivelatrici. Undici dei suoi studenti scrissero la tesi su questioni di Teoria dei numeri, e tre di loro su argomenti correlati con il dodicesimo problema – ispirato a Hilbert dal "sogno di gioventù" di Kronecker – che riguardava lo sviluppo del parallelismo tra i campi di numeri algebrici e i campi di funzioni algebriche. Una decina di tesi riguardava i fondamenti della geometria e problemi di geometria algebrica strettamente legati al sedicesimo problema. Quasi la metà dei suoi studenti di dottorato si occupò tuttavia degli argomenti di analisi che dominarono gli interessi di Hilbert fino alla prima guerra mondiale – soprattutto il Calcolo delle variazioni (in particolare i metodi diretti connessi con il *principio di Dirichlet*) e la teoria delle equazioni integrali. Negli anni Venti, cinque delle nove tesi seguite da Hilbert furono dedicate ai Fondamenti della matematica e alla teoria della dimostrazione. Si trattava dello sviluppo delle idee delineate nel secondo problema, al quale Hilbert consacrò l'ultima fase della sua attività, legando il suo nome al cosiddetto programma formalista di fondazione della matematica.

I 23 problemi di Hilbert

Al II Congresso Internazionale dei Matematici che ha luogo a Parigi nel 1900, David Hilbert presenta 23 problemi fino ad allora non risolti in diversi settori della matematica. Sono problemi che, nella sua opinione, avrebbero attirato l'attenzione dei ricercatori del nuovo secolo.

1. Il problema di Cantor del numero cardinale del continuo (ipotesi del continuo): *esiste un numero cardinale intermedio fra la potenza numerabile e quella del continuo? Nel 1938 Gödel dimostra che l'ipotesi del continuo è consistente con la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel; nel 1963 Cohen dimostra che anche la sua negazione lo è.*
2. Compatibilità degli assiomi dell'aritmetica. *Gödel dimostra nel 1931 che nessuna teoria abbastanza ricca come l'aritmetica è in grado di dimostrare la propria consistenza.*
3. Uguaglianza dei volumi di due tetraedri di uguale base ed uguale altezza. *Nel 1902 Max Dehn trova un controesempio.*
4. Il problema della retta come minima distanza fra due punti: *costruire tutte le geometrie metriche in cui le rette sono geodetiche. Risolto nel 1901 da Georg Hamel.*
5. Il concetto di gruppo continuo di trasformazioni di Lie senza assumere la differenziabilità delle funzioni che definiscono il gruppo: *è possibile evitare l'ipotesi che le trasformazioni siano differenziabili per introdurre il concetto di gruppo continuo di trasformazioni secondo Lie? Risolto per particolari gruppi di trasformazioni da John von Neumann del 1933 e, nel caso generale, da Andrew Gleason e (indipendente) da Deane Montgomery e Leo Zippin nel 1952.*
6. Trattamento matematico degli assiomi della fisica: *in particolare, assiomatizzazione di quelle parti, come la meccanica e la teoria delle probabilità, in cui la matematica risulta essenziale. Risultati di Caratheodory (1909) sulla termodinamica, von Mises (1919) e Kolmogorov (1933) sulla teoria della probabilità, John von Neumann (1930) sulla teoria dei quanti, di Georg Hamel (1927) sulla meccanica.*

7. Irrazionalità e trascendenza di certi numeri: *in particolare, sapere se a^b è trascendente quando la base a è algebrica e l'esponente b è irrazionale. Risposta affermativa da parte di Gelfond nel 1934 e (indipendente) di Schneider nel 1935.*

8. Problemi dei numeri primi: *in particolare l'ipotesi di Riemann, sugli zeri della "funzione zeta" di Riemann, relativa alla distribuzione dei numeri primi.*

9. Generalizzare la legge di reciprocità ad ogni campo numerico. *Risolto in un caso particolare da Teiji Takagi nel 1920 e più in generale da Emil Artin nel 1927.*

10. Risolubilità delle equazioni diofantee: *esiste un algoritmo universale per risolverle? Risposta negativa da parte di Juryj Matijasevič nel 1970.*

11. Forme quadratiche a coefficienti algebrici. *Risolto da Helmut Hasse nel 1923.*

12. Estensione del teorema di Kronecker sui campi abeliani ad un arbitrario campo algebrico. *Risolto da Shimura e Taniyama nel 1959.*

13. Impossibilità di soluzione dell'equazione generale di 7º grado per mezzo di funzioni di due soli argomenti. *Generalizza l'impossibilità di risolvere per radicali l'equazione generale di quinto grado. Risolto, in negativo, da Kolmogorov e Arnol'd nel 1961: la soluzione è possibile.*

14. Finitezza di certi sistemi completi di funzioni. *Un primo controesempio viene dato da Nagata nel 1958.*

15. Fondamento rigoroso del calcolo enumerativo di Schubert: *stabilire con precisione i limiti di validità dei numeri che Hermann Schubert ha determinato sulla base del principio di posizione speciale, per mezzo del suo calcolo enumerativo. Risolto.*

16. Topologia delle curve e delle superfici algebriche: *in particolare sviluppando i metodi di Harnack e la teoria dei cicli limite di Poincaré.*

17. Espressione di forme definite per mezzo di quadrati. *Nel 1927 Emil Artin dimostra che una funzione razionale definita positiva è somma di quadrati.*

18. Riempimento dello spazio per mezzo di poliedri congruenti. *Risolto: ma Penrose ha trovato delle soluzioni non periodiche.*

19. Sono necessariamente analitiche le soluzioni dei problemi regolari di calcolo delle variazioni? *Risolto parzialmente nel 1902 da G. Lötkemeyer e più in generale nel 1904 da S. Bernstein. Risoluzione generale di De Giorgi nel 1955.*
20. Il problema generale dei valori al contorno: *soluzione di un problema variazionale regolare, sotto particolari ipotesi sulle condizioni al contorno. Risolto.*
21. Esistenza di equazioni differenziali lineari con assegnato gruppo di monodromia. *Risolto in parte da Hilbert nel 1905. In altri casi particolari da Deligne nel 1970. Una soluzione negativa è stata trovata da Andrej Bolibruch nel 1989.*
22. Uniformizzazione di relazioni analitiche per mezzo di funzioni automorfe. *Risolto nel 1907 da Paul Koebe.*
23. Ulteriori sviluppi dei metodi del calcolo delle variazioni.

Come eravamo

I protagonisti della "primavera italiana" nei primi decenni del Novecento

di **Giorgio Bolondi**
Angelo Guerraggio
Pietro Nastasi

Dopo la prova generale di Zurigo (1897), i *Congressi Internazionali* dei Matematici partono effettivamente con Parigi (1900) e Heidelberg (1904). Poi, ecco, Roma (1908). La successione non è casuale e neanche dettata solo da scelte contingenti. Il fatto è che, all'inizio del Novecento, la matematica italiana è considerata la terza "potenza" mondiale, subito dopo le grandi e tradizionali scuole francese e tedesca. Ritroviamo la stessa classifica, pressoché immutata, all'inizio degli anni Venti. Un matematico americano – G.D. Birkhoff – particolarmente attento alle situazioni dei centri di ricerca europei (e interessato a stringere con loro rapporti di collaborazione per il definitivo decollo della matematica statunitense) non esita a collocare Roma subito dopo Parigi, ancor prima di Göttingen.

Ma chi c'era a Roma in quegli anni? Quali erano i matematici che permettevano a quella italiana di competere con le più famose scuole europee (e quindi, per il momento, del mondo)?

Dopo l'Unità e il successivo trasferimento della capitale a Roma, tutti i governi avevano perseguito la politica di convogliare nella città le presenze più vivaci della nostra cultura. Anche quella scientifica. Il primo ad arrivare – dei matematici cui si riferisce Birkhoff – è Guido Castelnuovo, che si trasferisce a Roma nel 1891. Dovranno, in realtà, passare poco più di trent'anni perché la scuola italiana di

Federigo Enriques con Albert Einsten e altri (Bologna, 1921)

Geometria algebrica si ricompatti nella capitale, ma alla fine – sia pure con qualche fatica e qualche "ruggine" in più del previsto – ce la fa. Nel 1923, anche Federigo Enriques e Francesco Severi saranno a Roma. Vito Volterra arriva nella capitale, da Torino, nel 1900 e subito viene incaricato di tenere la prolusione per l'inizio dell'anno accademico. La scelta dell'argomento non è "scontata": Volterra sceglie di parlare S*ui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali*. Tullio Levi-Civita potrebbe arrivare a Roma poco dopo, nel 1909, ma non se la sente per il momento di lasciare il tranquillo ambiente di Padova. Si trasferirà solo dopo la guerra (1918), quando si è sposato e ha già passato a Roma un primo periodo, dopo la sconfitta di Caporetto.

Sono tutti – Castelnuovo, Enriques, Severi, Volterra, Levi-Civita – "grandi" matematici ma, come vedremo, anche qualcosa di più.

La fase più spettacolare nello sviluppo della scuola italiana di Geometria algebrica si identifica con Castelnuovo, Enriques e Severi nell'ultimo decennio dell'Ottocento e nei primi due del Novecento. Sono loro che assicurano alla matematica italiana quel primato che A. Brill riconosce pubblicamente nella prefazione delle *Vorlesungen über algebraische Geometrie* di Severi (1921), invitando i giovani studiosi tedeschi a prenderne atto per rilanciare la sfida e tornare al *top* della ricerca. Né erano mancati altri riconoscimenti internazionali. Il premio Bordin dell'*Académie des Sciences* di Parigi era stato assegnato nel 1907 a Enriques e a Severi (e nel 1909 a G. Bagnera e a M. de Franchis), proprio per le loro ricerche in quella che era diventata l'*italienische Geometrie*. Nel 1908, una commissione costituita da M. Nöther, E. Picard e C. Segre aveva concesso a Severi la *Medaglia Guccia*. La pubblicazione di un lungo articolo di Castelnuovo e Enriques nella *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, nel 1914, rappresenta il coronamento di tutta la ricerca svolta dalla scuola fino a quel momento e il riconoscimento ufficiale della sua significatività da parte della comunità matematica internazionale.

Si deve alla scuola italiana la definitiva rielaborazione di quella teoria delle curve che era stata sviluppata soprattutto da matematici tedeschi, la creazione della teoria delle superfici con la loro completa classificazione e l'avvio di un'analoga costruzione per le varietà algebriche.

La teoria delle superfici, in particolare, può essere considerata il principale vanto della scuola italiana. I primi risultati sono di Castelnuovo, a partire dal 1891, con l'esempio di una superficie algebrica non rigata irregolare, l'estensione alle superfici del teorema di Riemann – Roch relativo alle curve e la determinazione del criterio di razionalità. Qui si inserisce la collaborazione con Enriques. Le due personalità appaiono complementari: ad un Enriques vulcanico, che procede con una straordinaria potenza intuitiva, già quasi sicuro dell'esito cui perverrà per approssimazioni successive, meno interessato alle dimostrazioni e al loro rigore, impaziente e spesso distratto lettore degli articoli dei colleghi, si affianca un Castelnuovo forse meno brillante ma che si incarica di precisare e incanalare lungo binari più corretti e produttivi le geniali intuizioni del cognato. Dalla loro collaborazione, in vent'anni, nasce un nuovo modo di inquadrare la teoria delle superfici algebriche che porta ad una classificazione sufficientemente semplice, con l'eliminazione di tutti i casi particolari. Lo studio di una superficie algebrica si riduce a quello delle famiglie di curve giacenti sulla superficie. Tra queste, particolare attenzione viene dedicata ai sistemi lineari e ai sistemi continui non lineari (che esistono solo sulle superfici irregolari). Nel 1914, Enriques espone i risultati pressoché definitivi, in tema di classificazione. Le superfici vengono suddivise in classi di equivalenze birazionali, in funzione dei valori assunti dai *plurigeneri* e dal *genere numerico*; in realtà, il solo valore di P_{12} è sufficiente a dividere tutte le superfici in quattro classi: "il problema capitale della teoria delle superficie algebriche è la classificazione di queste, cioè la determinazione effettiva delle famiglie di superficie distinte per trasformazioni birazionali, ciascuna famiglia venendo caratterizzata da un gruppo di caratteri interi invarianti e contenendo, entro di sé, un'infinità continua di classi dipendenti da un certo numero di parametri (moduli)".

Dopo la guerra, Castelnuovo si dedica pressoché esclusivamente alle probabilità. Nel frattempo, la "stella" di Enriques è uguagliata – e superata, almeno a livello politico – da quella di Severi, che recupera anche i metodi trascendenti, con una più marcata attenzione verso gli aspetti topologici e funzionali. Ecco come, da "grande vecchio", Castelnuovo nel 1928 ricostruisce le procedure della scuola italiana (che, da lì a non molto, verranno accusate di scarso rigore e di eccessiva accondiscendenza verso una comprensione semplicemente intuitiva): "val forse la pena di accennare qual era il metodo di lavoro che seguivamo allora per rintracciare la via nell'oscurità in cui ci trovavamo. Avevamo costruito, in senso astratto s'intende, un gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori; e questi modelli avevamo distribuito, per dir così, in due vetrine. Una conteneva le superficie regolari per le quali tutto procedeva come nel migliore dei mondi possibili; l'analogia permetteva di trasportare ad esse le proprietà più salienti delle curve piane. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superficie dell'altra vetrina, le irregolari, cominciavano i guai, e si presentavano eccezioni di ogni specie. Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superficie di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cimento queste proprietà colla costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova, ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica. Col detto procedimento, che assomiglia a quello tenuto nelle scienze sperimentali, siamo riusciti a stabilire alcuni caratteri distintivi tra le due famiglie di superficie".

La scuola italiana di Analisi, nello stesso periodo, è meno monolitica. Dini, Ascoli, Arzelà, Peano e – con l'inizio del nuovo secolo – Tonelli, Fubini, Vitali, E.E. Levi… tutti "grandi" matematici, grandi nomi ancora oggi noti ai ricercatori di tutto il mondo (e anche agli studenti, per qualche particolare risultato).

Vito Volterra (1860 – 1940) si laurea nel 1882 e subito è autore di un articolo con il famoso esempio, all'interno della problematica dei cosiddetti "teoremi fondamentali del calcolo", di una funzione derivabile in un intervallo, con derivata limitata ma non integrabile (secondo Riemann). Poi, può essere considerato uno dei "padri fondatori" dell'Analisi funzionale, con il concetto di funzione di linea – per indicare un funzionale ovvero un numero reale che dipende da tutti i valori assunti da una funzione y(x) definita su un certo intervallo ovvero dalla configurazione di una curva – e l'istituzione del relativo calcolo, fino allo sviluppo con un polinomio di Taylor. E a chi – Hadamard e soprattutto Fréchet – gli rimprovererà una definizione troppo particolare di derivata di un funzionale (rispetto al successivo concetto di "differenziale secondo Fréchet") ricorderà che non è la massima generalità il valore cui ispirarsi, quanto la generalità più adeguata al problema che si sta trattando, principio che Enriques ribadirà con forza doversi applicare a tutti i livelli dell'insegnamento.

Le equazioni integrali sono l'altro significativo contributo di inizio secolo ma Volterra è anche un fisico-matematico, tanto che verrà eletto presidente della *Società Italiana di Fisica*. È in realtà problematico inquadrarlo rigidamente in una disciplina, piuttosto che in un'altra. Come fisico-matematico, le sue ricerche principali riguardano la propagazione della luce nei mezzi birifrangenti, gli spostamenti dei poli terrestri, quella che nel linguaggio