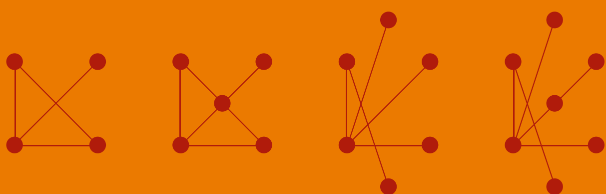
Norbert Herrmann

Mathematik und Gott und die Welt

Was haben Kunst, Musik oder Religion mit Mathematik am Hut?

2. Auflage



Springer

Mathematik und Gott und die Welt

Norbert Herrmann

Mathematik und Gott und die Welt

Was haben Kunst, Musik oder Religion mit Mathematik am Hut?

2. Auflage

Springer

Norbert Herrmann
Hannover
Deutschland

ISBN: 978-3-662-48722-8 ISBN: 978-3-662-48723-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-48723-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer

Planung: Dr. Andreas Rüdinger

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg

Vorwort

Ein Mathematiker, der nicht irgendwie ein Dichter ist, wird nie ein vollkommener Mathematiker sein.

Karl Weierstraß

Ein Leser, Herr Dr. O., Mathematiker, schrieb mir folgendes Erlebnis:

> Eines Nachmittags kam ein Anruf aus einer Kneipe. Der Wirt sagte zu mir: „Du bist doch Mathematiker. Wir haben hier einen Gast, der will nicht glauben, dass $1/2$ mal $1/2 = 1/4$ ist. Erklär du ihm das mal.“ Ich sagte: „Gib ihn mir mal ans Telefon.“ Ich kam gar nicht zu Wort. Mein Gegenüber: „Du kannst mir viel erzählen. $1/2$ mal $1/2$ ist doch 1, man muss doch mit dem Kehrwert multiplizieren.“ Meine Einwände blieben fruchtlos. Da kam mir der rettende Gedanke: der Taschenrechner als anerkanntes Beweismittel. „Habt ihr an der Theke einen Taschenrechner?“ „Ja.“ „Also tippt jetzt mal ein: 0,5, ist doch 1/2, nicht wahr?“ „Ja.“ „Und jetzt die Maltaste und nochmal 0,5 eingeben und dann die Gleichtaste. Und was kommt dann?“ Am anderen Ende der Leitung: „Scheiße, jetzt habe ich 100 Euro verloren.“ Dass $0,25 = 1/4$ ist, war offensichtlich bekannt.

Sie werden diese kleine Geschichte vielleicht gar nicht so erzählenswert finden? Nun, zwei Aspekte beunruhigen mich dabei:

- Die Bruchrechnung lernen wir normalerweise in der sechsten Klasse. Da braucht es doch keinen promovierten Mathematiker, um hier Probleme zu lösen.

- Wenn man aber meint, hier unbedingt die Erkenntnis eines Mathematikers zu benötigen, so steht dahinter wohl die feste Überzeugung, dass Bruchrechnung ein wesentlicher Bestandteil des Mathematikstudiums ist.

Ich bin sicher, dass kaum jemand meint, dass man im Studium der Germanistik die Kommaregeln lernt. Wahrscheinlich ist auch den meisten Menschen klar, dass man im Studium der Theologie nicht das Vaterunser auswendig lernt. Auch wird man vermuten, dass ein Historiker nicht Geschichtszahlen paukt. Man hat sicher keine genauen Vorstellungen von all diesen Studiengängen, aber man ist sich doch ziemlich einig, dass ein wissenschaftliches Studium nicht mit sturem Auswendiglernen verwechselt werden darf.

Warum aber glaubt offensichtlich kein geringer Teil der Bevölkerung, dass Mathematiker im Studium das Einmaleins lernen?

Genau hierhin, nämlich mit solchen Irrtümern aufzuräumen, habe ich bei diesem Buch meinen Schwerpunkt gelegt. Dazu will ich in den folgenden Kapiteln versuchen, Zusammenhänge zwischen Mathematik und anderen als große Geisteswissenschaften anerkannten Themen herzustellen. Das sind die Literatur, die Kunst, damit einhergehend die Architektur, die Musik und die Religion.

In diesem Buch möchte ich Ihnen die Erkenntnis nahebringen, dass Mathematik eine Geisteswissenschaft ist – eine Einsicht, die dann auch unser oben gewähltes Motto des großen Mathematikers Karl Weierstraß (1815–1897) erklärt.

Mein ausgesprochener Dank geht an Springer Spektrum Verlag und hier insbesondere an meinen Lektor Dr. Andreas Rüdinger, der mit vielen Diskussionen und hilfreichen Anmerkungen wesentlich zur Verbesserung beigetragen hat. Frau Mechler vom Springer Spektrum Verlag sei ebenfalls vielmals gedankt. Sie hat sich sehr um die Umsetzung des Manuskriptes verdient gemacht.

Zum Schluss möchte ich wieder meiner Frau ganz herzlich danken. So viel Geduld, wie sie jedes Mal gerade in der Endphase eines Buches aufbringt, sucht ihresgleichen. Ich musste nicht einmal mehr die Spülmaschine ausräumen.

Liebe Leserinnen, liebe Leser, wenn Sie Anregungen oder Verbesserungen vorschlagen möchten, nutzen Sie bitte den Kontakt über meine Homepage `www.mathematikistueberall.de`.

Norbert Herrmann

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematik in der Kunst 1
1.1 Schönheit in der Mathematik 1
1.2 Leonardo da Vinci 2
1.3 Albrecht Dürer 16
1.4 Magische Quadrate 20
1.5 Johann Wolfgang von Goethe 27
1.6 Sir Christopher Wren 33
1.7 Karl Wilhelm Pohlke 37
1.8 Gottfried Semper 39
1.9 Antoni Gaudi 40
1.10 Marc-M. J. Wolff-Rosenkranz 43
1.11 Ausblick 44

2 Mathematik in der Musik 47
2.1 Wohltemperierte Klaviere 47
2.2 Mozarts Würfelmusik 54
2.3 Klassen in der Mathematik 58
2.4 Melodien finden leicht gemacht 61

3 Mathematik in der Sprache 67
3.1 Die Suche nach dem größten gemeinsamen Nenner 67
3.2 Hinweis auf das Wurzelziehen 72
3.3 Wir wollen die Politik verstetigen 73
3.4 Er versuchte die Quadratur des Kreises 76

3.5 Wo sind unsere Schnittmengen? 80
3.6 Wir begegnen uns auf Augenhöhe 81
3.7 Ich tue, was ich kann 82
3.8 Wo ist der Euro? 82

4 85. Geburtstag 85
4.1 Liebe Schwiegermutter! 85
4.2 Womit beschäftigen sich Mathematiker? 86
4.3 Die Zahlen deines Lebens 87
4.4 Die Zahl Null 87
4.5 Die Zahl 85 92
4.6 85 ist überall 94

5 Gott macht keine Physemathenten 97
5.1 Zur Mathematik 98
5.2 Zur Physik 117
5.3 Zu Gott 130

6 Ein Mathematikquiz 133
6.1 Das Quiz 133
6.2 Die Lösungen 135

Literaturverzeichnis 145

Sachverzeichnis 147

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1.1 Skizze zum Satz des Pythagoras
Abb. 1.2 Von Leonardo da Vinci erweiterte Skizze zum Satz des Pythagoras
Abb. 1.3 Von Leonardo da Vinci ausgedachtes „Perpetuum mobile", Nachbau in einer Ausstellung
Abb. 1.4 Skizze von Leonardo da Vinci zum Beweis der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile
Abb. 1.5 Die Originalzeichnung von Marcus Vitruvius Pollio (© WHA/United Archives/Picture-alliance)
Abb. 1.6 Der vitruvianische Mensch von Leonardo da Vinci (© Cameraphoto/akg-images/Picture-alliance)
Abb. 1.7 Die italienische 1-Euro-Münze
Abb. 1.8 Selbstbildnis von Albrecht Dürer aus dem Jahre 1498 (© Erich Lessing/akg-images/Picture-alliance)
Abb. 1.9 Kupferstich Melencolia I von Albrecht Dürer (© Internationale Tage Ingelheim)
Abb. 1.10 Magisches Quadrat aus dem Kupferstich Melencolia I
Abb. 1.11 Die zentralsymmetrische Eigenschaft des Dürer-Quadrates
Abb. 1.12 Zusammenhang mit dem Todestag von Dürers Mutter
Abb. 1.13 Magisches Quadrat der Ordnung 3
Abb. 1.14 Magisches Quadrat der Ordnung 7
Abb. 1.15 Magisches Quadrat der Ordnung 7 mit Schrägzeilen
Abb. 1.16 Ein Quadrat der Ordnung 3 als Vorgabe für Goethes Hexeneinmaleins
Abb. 1.17 Goethes unvollständiges Hexeneinmaleins
Abb. 1.18 Das vervollständigte Hexeneinmaleins
Abb. 1.19 Wieder das Quadrat der Ordnung 3 als Vorgabe für Goethes Hexeneinmaleins
Abb. 1.20 Das Quadrat nach drei Zeilen der Hexe
Abb. 1.21 Das Quadrat nach zehn Zeilen der Hexe

Abb. 1.22 Das Quadrat nach zwölf Zeilen der Hexe
Abb. 1.23 Das vollständige magische Quadrat nach Goethes Hexeneinmaleins
Abb. 1.24 Die Zykloide
Abb. 1.25 Die Zykloide als Tautochrone
Abb. 1.26 Die Zykloide als Brachistochrone
Abb. 1.27 Meine rechte Hand mit gespreizten Fingern
Abb. 1.28 Veranschaulichung des Hauptsatzes von Pohlke
Abb. 1.29 Die weltberühmte Semperoper in Dresden
Abb. 1.30 Die Sagrada Familia in Barcelona
Abb. 1.31 Das magische Quadrat an der Sagrada Familia
Abb. 1.32 Vergrößerung des magischen Quadrates an der Sagrada Familia
Abb. 1.33 Bild zur GAGA-Hummel-Hummel-AG von Marc-M. J. Wolff-Rosenkranz

Abb. 2.1 Einteilung der Mathematik in 60 Klassen
Abb. 2.2 Ein Blick in die Unterklasse 65 N 30
Abb. 2.3 Auszug aus dem alphabetisch sortierten hinteren Teil des Buches
Abb. 2.4 Auszug aus der Sammlung musikalischer Themen

Abb. 3.1 Eine bei x_0 nicht stetige Funktion
Abb. 3.2 Stetige Funktionen
Abb. 3.3 Veranschaulichung des Zwischenwertesatzes
Abb. 3.4 Verdopplung des Quadrates

Abb. 4.1 Vier Karten aus meinem Kartenspiel

Abb. 5.1 Der Zahlenstrahl
Abb. 5.2 Eine Brücke aus sechs übereinandergelegten Steinen
Abb. 5.3 Ein großer Kreis (Durchmesser 2), in den viele kleinere Kreise hineingezeichnet sind
Abb. 5.4 Der gleiche große Kreis wie in Abb. 5.3 (Durchmesser 2), jetzt aber sind die kleinen Kreise ineinandergezeichnet
Abb. 5.5 Erklärung der Euklidischen Norm mittels das Satzes von Pythagoras
Abb. 5.6 Alle Punkte, die denselben Abstand vom Nullpunkt haben, liegen auf einem Kreis
Abb. 5.7 Eine andere Möglichkeit, den Abstand zu messen. Wir betrachten nur die längste Koordinate eines Vektors. Diese bestimmt den Abstand
Abb. 5.8 Alle Punkte, die denselben Abstand vom Nullpunkt haben, liegen diesmal auf einem Quadrat. Dieses ist also der „Kreis“ in dieser neuen Abstandsbestimmung
Abb. 5.9 Gegenüberstellung der beiden Abstandsbegriffe. Der Kreis gehört zum bekannten euklidischen Abstand, das Quadrat gehört als „Kreis“ zum neuen Abstand, der mit der maximalen Koordinate des Vektors bestimmt wird
Abb. 5.10 Albert Einstein auf einem meiner Schlipse

1

Mathematik in der Kunst

1.1 Schönheit in der Mathematik

Für viele Menschen sind die beiden Begriffe „Mathematik" und „Kunst" geradezu Gegensätze. Mathematik, diese doch so trockene und häufig auch viel zu schwierige Zahlenrechnerei – In Mathe war ich immer schlecht! – und dagegen die so anmutige, leicht beschwingte Muse der Kunst – wie kann das zusammengehen? Tatsächlich gibt es in vielen Teilbereichen Zusammenhänge zwischen Kunst und Mathematik. Denken Sie z. B. an die Perspektive in der Malerei. Ich werde an vielen Beispielen zeigen, wie sich Künstler häufig Anregungen aus der Mathematik geholt haben.

Aber auch umgekehrt betätigen sich viele Mathematiker als Künstler. Ja, viele Mathematiker sprechen gar von ihrer eigenen Wissenschaft als einer abstrakten Schönheit. So hat in einem Wettbewerb, welches die schönste mathematische Formel sei, folgende Formel von Euler klar das Rennen gewonnen:

$$e^{\pi \cdot i} + 1 = 0$$

Diese Formel enthält die wichtigsten mathematischen Konstanten:

1. Die Euler'sche Zahl

   $$e = 2{,}71828182845904523536028747135266249775724709369995\ldots,$$

   hier mit 50 Nachkommastellen wegen der vorgegebenen Buchbreite. Sie ist die Basis der natürlichen Logarithmen.

N. Herrmann, *Mathematik und Gott und die Welt*,
DOI 10.1007/978-3-662-48723-5_1

2. Die Kreiszahl

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots,$$

wiederum mit 50 Nachkommastellen. Sie gibt bei jedem Kreis das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser an.
3. Die komplexe Einheit $i = (0, 1)$ in der Gauß'schen Zahlenebene.
4. Die neutrale Zahl 1 bei der Multiplikation.
5. Die neutrale Zahl 0 bei der Addition.

Ja, wirklich, wir Mathematiker empfinden diese Formel als schön. Sie kombiniert die wichtigsten mathematischen Konstanten miteinander. Zudem ist die für alle Anwender der Mathematik so wichtige Exponentialfunktion beteiligt. Diese Formel strahlt eine Souveränität aus wie keinle andere. Sie ist einfach schön.

Mit Hilfe der Gleichung von Leonhard Euler (1707–1783)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

und dem Wissen aus der Schule, dass

$$\cos\pi = -1, \quad \sin\pi = 0$$

ist, kann man diese schöne Formel auch unmittelbar beweisen; denn wir erhalten

$$e^{\pi \cdot i} + 1 = \cos\pi + i \cdot \sin\pi + 1 = -1 + i \cdot 0 + 1 = 0.$$

Nun, ich will im Folgenden an Beispielen zeigen, wo sich herausragende Künstler durchaus an die Mathematik herangewagt und dann ihre mathematischen Erkenntnisse mit ihrer großen Kunst verbunden haben.

1.2 Leonardo da Vinci

Er war Maler, Zeichner, Bildhauer, Architekt, Dichter, Musiker, Geologe, Anatom, Kartograf, Stadtplaner, Mechaniker, Ingenieur, Philosoph, Naturwissenschaftler und nicht zuletzt Mathematiker.

Leonardo da Vinci wurde am 15. April 1452 in Anchiano nahe bei Vinci, einem kleinen Dorf in der Nähe von Florenz, geboren. Seine Mutter Catarina war eine getaufte Sklavin aus Nordafrika, sein Vater Ser Piero da Vinci war bei Leonardos Geburt 25 Jahre alt. Er war ein angesehener Notar und konnte daher in der damaligen Zeit unmöglich eine Hausangestellte, als die Leonardos Mutter arbeitete, heiraten. Leonardo wuchs aber trotzdem im Hause seines Vaters auf, durfte aber als uneheliches Kind nur eine Volksschule besuchen. Latein lernte er erst in späten Jahren. Daher darf man mit Fug und Recht davon ausgehen, dass Leonardo die Arbeiten und Erfindungen aus dem alten Griechenland und aus Rom nicht kannte.

Als Leonardo einmal die Schwerpunkte seiner Arbeit hierarchisch auflisten sollte, bezeichnete er sich zuerst

- als Architekt,
- dann als Bildhauer
- und dann erst als Maler.

Auf seinen weiteren Lebensweg will ich nicht näher eingehen, sondern lediglich die Punkte herausheben, die Leonardos Verbindung zur Mathematik zeigen.

Der Satz des Pythagoras

Dieser Abschnitt bietet eine gute Gelegenheit, mit einem alten Vorurteil aufzuräumen. Selten trifft man jemanden, dem der Satz des Pythagoras unbekannt ist. Die meisten Menschen sagen aber als spontane Antwort: Ja, klar, Pythagoras ist doch

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Da blickt man als Mathematiker etwas ratlos; denn was meint der nur mit a und b und c? Ohne eine Erklärung ist das doch nur eine leere Formel. Dahinter steckt das Vorurteil, dass sich Mathematiker mit Zahlen, wenn es hoch kommt, vielleicht noch mit Formeln befassen. Ich denke da an einen bekannten Film, in dem ein offensichtlich hochbegabter Junge schwierigste mathematische Aufgaben löst, obwohl er eigentlich nur den Flur fegen soll. Kurz danach kommt die Filmsequenz, über die ich mich ärgere. Da stehen nämlich dieser Junge und ein Lehrer an der Tafel und sollen wohl irgendwie mit Mathematik umgehen. Das entwickelt sich dann so, dass der Junge eine Formel an die Tafel schreibt. Daraufhin stöhnt der Lehrer auf, wischt die Formel weg und schreibt selbst eine andere an. Darauf stöhnt der Junge und ändert die Formel durch Wischen ab. Das geht so eine Weile, ohne dass einer der beiden außer Stöhnen ein Wort hervorbringt. Da hatte wohl der Drehbuchschreiber den Gedanken im Kopf, dass Mathematiker nur mit Zahlen und Formeln um sich werfen, anderes können sie aber nicht von sich geben.

Hier an diesem Beispiel sehen Sie den Unterschied. Wenn wir erklären wollen und sollen, was die Formel oben ausdrückt, so müssen wir eine ganze Menge reden. Das sieht dann so aus:

Satz 1.1 *Gegeben sei ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit den beiden Katheten a und b und der Hypotenuse c. Über jeder der drei Seiten zeichnen wir das Quadrat mit dieser Seitenlänge. Dann sind die Flächen der beiden Kathetenquadrate zusammen genauso groß wie die Fläche des Hypotenusenquadrates, in Zeichen gilt also:*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Das waren doch drei grammatikalisch richtige und vollständige Sätze. So sprechen Mathematiker, die Formel ohne diese Erklärung ist inhaltsleer. Und in der Mathematik ist es geradezu verpönt, inhaltsleere Aussagen zu machen. Darum ärgere ich mich über diese falsche Darstellung in dem Film.

Nebenbei sei bemerkt, dass wir diesen „Satz" natürlich auch als nur einen Satz formulieren könnten; dann müssten wir die im Konjunktiv geschriebenen Voraussetzungen in einem „wenn-Satz" formulieren, z. B.: Wenn in einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck die beiden Katheten mit a und b und die Hypotenuse mit c bezeichnet wird und .... Das wäre dann insgesamt ein Satz, aber er wäre etwas unhandlich.

In der Skizze (Abb. 1.1) zum Satz des Pythagoras wird das Ganze veranschaulicht:

Die Schwierigkeit dieses Satzes liegt in der Voraussetzung, dass das alles für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck gelten soll. Beliebig viele, das sind unendlich viele – wie sollen wir das denn beweisen? Abbildung 1.1 zeigt ein einziges solches Dreieck. Wenn wir hier nachmessen und sehen, dass es wohl stimmt, taugt das höchstens zu einer Vermutung. Wir müssen uns eine Kette von Folgerungen einfallen lassen, die unabhängig von dem gerade zufällig gewählten Beispiel ist.

Für den Satz des Pythagoras gibt es inzwischen Bücher mit mehr als 200 Beweisen. Da haben sich also viele Leute getummelt. Einer der ersten war Leonardo da Vinci. In dem Buch des italienischen Mathematikers Fra Luca Pacioli (1445–1517) mit dem Titel De Divina Proportione, veröffentlicht um 1500, befinden sich Zeichnungen von Leonardo da Vinci; eine davon befasst sich mit unserem Satz. Schauen Sie sich Abb. 1.2 genau an.

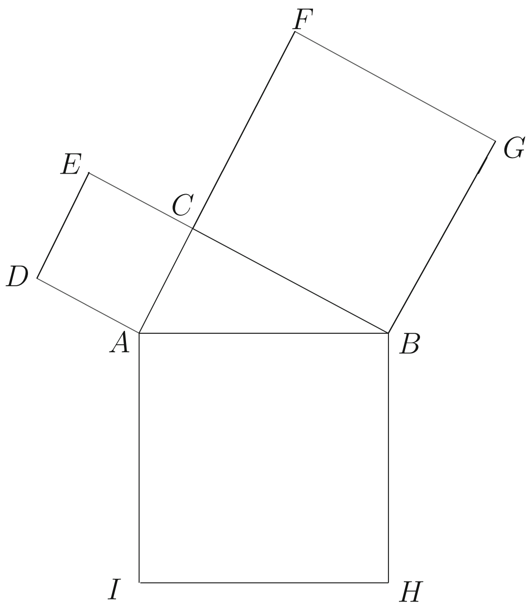


Abb. 1.1 Skizze zum Satz des Pythagoras

In der Mitte sehen wir das Ausgangsdreieck *ABC*. Jeweils über den Katheten und der Hypotenuse sind die zugehörigen Quadrate eingezeichnet. Jetzt kommen die Ideen von Leonardo dazu. Ganz unten über der Linie *HI* ist das Ausgangsdreieck noch einmal gezeichnet. Drei weitere Linien vervollständigen die Figur. Die Linie *EF* vervollständigt die Figur nach oben. Die beiden Linien *DG* und *CJ* durchschneiden die Gesamtfigur.

Jetzt schauen wir genauer hin. Ein Teil der Linie *DG* ist die Diagonale im Quadrat *CBGF*, der andere Teil ist die Diagonale im Quadrat *ACED*. Beide Diagonalen liegen auf einer Linie, weil Diagonalen im Quadrat unter 45° auf den Eckpunkt auftreffen und weil bei *C* ja der rechte Winkel des Ausgangsdreiecks liegt.

Das ergibt die erste wichtige Erkenntnis, dass die Linie *DG* die ganze sechseckige Figur *ABGFED* in zwei deckungsgleiche Hälften teilt. Wenn wir also das Viereck *DGFE* entlang der Linie *DG* falten, erhalten wir das Viereck *DABG*.

Jetzt betrachten wir das Sechseck *AIJHBC*. Wenn wir dieses ganze Sechseck um den Mittelpunkt im unteren Quadrat, also den eingezeichneten dicken Punkt, um 180° drehen, so überdeckt die gedrehte Figur die alte Figur. Dieses Sechseck ist also punktsymmetrisch bezogen auf den eingezeichneten dicken