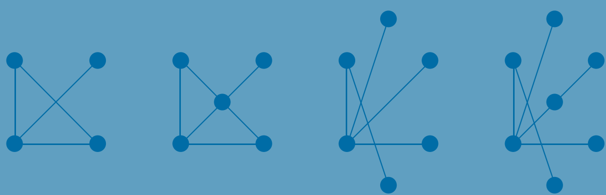
Norbert Herrmann

Mathematik und Gott und die Welt

Was haben Kunst, Musik oder Religion mit Mathematik am Hut?

3. Auflage



Springer

Mathematik und Gott und die Welt

Norbert Herrmann

Mathematik und Gott und die Welt

Was haben Kunst, Musik oder Religion mit Mathematik am Hut?

3. Auflage

Springer

Norbert Herrmann
Meißen, Deutschland

ISBN 978-3-662-56387-8 ISBN 978-3-662-56388-5(eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-56388-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer

Verantwortlich im Verlag: Andreas Rüdinger

Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Ein Mathematiker, der nicht irgendwie ein Dichter ist, wird nie ein vollkommener Mathematiker sein.

Karl Weierstraß

Ein Leser, Herr Dr. O., Mathematiker, schrieb mir folgendes Erlebnis:

> Eines Nachmittags kam ein Anruf aus einer Kneipe. Der Wirt sagte zu mir: „Du bist doch Mathematiker. Wir haben hier einen Gast, der will nicht glauben, dass $1/2$ mal $1/2 = 1/4$ ist. Erklär Du ihm das mal.“ Ich sagte.: „Gib ihn mir mal ans Telefon.“ Ich kam gar nicht zu Worte. Mein Gegenüber: „Du kannst mir viel erzählen. 1/2 mal 1/2 ist doch 1, man muss doch mit dem Kehrwert multiplizieren.“ Meine Einwände blieben fruchtlos. Da kam mir der rettende Gedanke: Der Taschenrechner als anerkanntes Beweismittel. „Habt Ihr an der Theke einen Taschenrechner?“ „Ja.“ „Also tippt jetzt mal ein: 0,5, ist doch 1/2, nicht wahr?“ „Ja.“ „Und jetzt die Maltaste und nochmal 0,5 eingeben und dann die Gleichtaste und was kommt dann?“ Am anderen Ende der Leitung: „Scheiße, jetzt habe ich 100 € verloren.“ Dass $0{,}25 = 1/4$ ist, war offensichtlich bekannt.

Sie werden diese kleine Geschichte vielleicht gar nicht so erzählenswert finden? Nun, zwei Aspekte beunruhigen mich dabei.

- Die Bruchrechnung lernen wir normalerweise in der sechsten Klasse. Da braucht es doch keinen promovierten Mathematiker, um hier Probleme zu lösen.

- Wenn man aber meint, hier unbedingt die Erkenntnis eines Mathematikers zu benötigen, so steht dahinter wohl die feste Überzeugung, dass Bruchrechnung ein wesentlicher Bestandteil des Mathematikstudiums ist.

Ich bin sicher, dass kaum jemand meint, dass man im Studium der Germanistik die Kommaregeln lernt. Wahrscheinlich ist auch den meisten Menschen klar, dass man im Studium der Theologie nicht das „Vaterunser“ auswendig lernt. Auch wird man vermuten, dass ein Historiker nicht Geschichtszahlen paukt. Man hat sicher keine genauen Vorstellungen von all diesen Studiengängen, aber man ist sich doch ziemlich einig, dass ein wissenschaftliches Studium nicht mit sturem Auswendiglernen verwechselt werden darf.

Warum aber glaubt offensichtlich kein geringer Teil der Bevölkerung, dass Mathematiker im Studium das Einmaleins lernen?

Genau hierhin, nämlich mit solchen Irrtümern aufzuräumen, habe ich bei diesem Buch meinen Schwerpunkt gelegt. Dazu will ich in den folgenden Kapiteln versuchen, Zusammenhänge zwischen Mathematik und anderen als große Geisteswissenschaften anerkannten Themen herzustellen. Das sind die Literatur, die Kunst, damit einhergehend die Architektur, die Musik und die Religion.

In diesem Buch wollen wir Ihnen die Erkenntnis nahebringen, dass Mathematik eine Geisteswissenschaft ist, eine Einsicht, die dann auch unser oben gewähltes Motto des großen Mathematikers Karl Weierstraß (1815–1897) erklärt.

Mein ausgesprochener Dank geht an den Spektrum-Verlag und hier insbesondere an meinen Lektor Dr. Andreas Rüdinger, der mit vielen Diskussionen und hilfreichen Anmerkungen wesentlich zur Verbesserung beigetragen hat. Frau Mechler vom Spektrum-Verlag sei ebenfalls vielmals gedankt. Sie hat sich sehr um die Umsetzung des Manuskriptes verdient gemacht.

Zum Schluss möchte ich wieder meiner Frau ganz herzlich danken. So viel Geduld, wie sie jedes Mal gerade in der Endphase eines Buches aufbringt, sucht ihresgleichen. Ich musste nicht einmal mehr die Spülmaschine ausräumen.

Liebe Leserinnen, liebe Leser, wenn Sie Anregungen oder Verbesserungen vorschlagen möchten, nutzen Sie bitte den Kontakt über meine homepage www.mathematikistueberall.de.

Norbert Herrmann

Vorwort zur dritten Auflage

Die Muster des Mathematikers müssen wie die des Malers oder Dichters schön sein, die Ideen müssen wie Farben oder Worte in harmonischer Weise zusammenpassen. Schönheit ist das erste Kriterium: es gibt keinen Platz in dieser Welt für hässliche Mathematik.

Godfrey Harold Hardy (1877–1947)

Ein herrvorragendes Motto für unser Buch, das sich ja genau mit diesem Thema Mathematik und Schönheit in Kunst, Musik und Religion begasst. Danke daher an Godfrey Harold Hardy, einen britischen Mathematiker, der sich intensiv mit der Schönheit der Mathematik auseinander gesetzt hat und sie mit der Malerei und der Dichtkunst verglich.

Diese dritte Auflage haben wir wesentlich erweitert. Neue Kapitel mit schönen Elementen der Mathematik befassen sich mit Spiralen, die man allenthalben in der Kunst entdeckt, oder mit dem Regenbogen, der schon in der Bibel als Zeichen des Bundes mit Gott erwähnt wird.

Zudem erklären wir das seltsame Gebahren von Ebbe und Flut und das geheimnisvolle Lösen von Schnürsenkeln. Gar nicht geheim sind dann die Geheimschriften mit dem RSA-Verfahren, denn wir können alle Geheimnisse aufklären.

Für jeden Autor ist es ein besonders schöner Akt, ein Vorwort für eine weitere Auflage eines seiner Werke, in unserem Fall für die dritte Auflage zu schreiben. Hier danke ich wieder einmal ganz besonders dem Verlag und meinem Lektor, dem Editorial Director Dr. Andreas Rüdinger und meiner Lektorin Martina Mechler, die mir stets bei allen Fragen hilfreich zur Seite standen. Dank auch an die Copyeditorin Regine Zimmerschied, die die vielen kleinen Schreibfehler angehakt hat.

Nicht zuletzt gilt mein besonderer Dank meiner lieben Frau, die wieder einmal viele Stunden auf mich verzichten musste.

Folgenden „Scherz“ fand ich in einem Text:

Einführung in die moderne Wissenschaft:

> Ist es grün und schlängelt sich, dann ist es Biologie.
> Wenn es stinkt, dann ist es Chemie.
> Wenn es nicht funktioniert, ist es Physik.
> Wenn es unlogisch ist, dann kann es entweder Ökonomie oder Psychologie sein.
>
> Wenn man's nicht versteht, ist es Mathematik.

Mein Wunsch ist es, diesem Vorurteil, dass man Mathematik nicht verstehen kann, entgegen zu wirken.

Norbert Herrmann

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1

Mathematik in der Kunst

1.1 Schönheit in der Mathematik

Für viele Menschen sind die beiden Begriffe „Mathematik“ und „Kunst“ geradezu Gegensätze. Mathematik, diese doch so trockene und häufig auch viel zu schwierige Zahlenrechnerei („In Mathe war ich immer schlecht!“) und dagegen die so anmutige, leicht beschwingte Muse der Kunst – wie kann das zusammengehen? Tatsächlich gibt es in vielen Teilbereichen Zusammenhänge zwischen Kunst und Mathematik. Denken Sie z. B. an die Perspektive in der Malerei. Ich werde an vielen Beispielen zeigen, wie sich Künstler häufig Anregungen aus der Mathematik geholt haben.

Aber auch umgekehrt betätigen sich viele Mathematiker als Künstler. Ja, viele Mathematiker sprechen gar von ihrer eigenen Wissenschaft als einer abstrakten Schönheit. So hat in einem Wettbewerb, welches die schönste mathematische Formel sei, folgende Formel von Euler klar das Rennen gewonnen:

$$e^{\pi \cdot i} + 1 = 0$$

Diese Formel enthält die wichtigsten mathematischen Konstanten:

1. Die Euler'sche Zahl

   $$e{=}2{,}71828182845904523536028747135266249775724709369995\ldots,$$

   hier mit 50 Nachkommastellen wegen der vorgegebenen Buchbreite. Sie ist die Basis der natürlichen Logarithmen.

N. Herrmann, *Mathematik und Gott und die Welt*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-56388-5_1

2. Die Kreiszahl

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots,$$

wiederum mit 50 Nachkommastellen. Sie gibt bei jedem Kreis das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser an.
3. Die komplexe Einheit $i = (0, 1)$ in der Gauß'schen Zahlenebene.
4. Die neutrale Zahl 1 bei der Multiplikation.
5. Die neutrale Zahl 0 bei der Addition.

Ja, wirklich, wir Mathematiker empfinden diese Formel als schön. Sie kombiniert die wichtigsten mathematischen Konstanten miteinander. Zudem ist die für alle Anwender der Mathematik so wichtige Exponentialfunktion beteiligt. Diese Formel strahlt eine Souveränität aus wie keine andere. Sie ist einfach schön.

Mit Hilfe der Gleichung von Leonhard Euler (1707–1783)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

und dem Wissen aus der Schule, dass

$$\cos\pi = -1, \quad \sin\pi = 0$$

ist, kann man diese schöne Formel auch unmittelbar beweisen, denn wir erhalten

$$e^{\pi \cdot i} + 1 = \cos\pi + i \cdot \sin\pi + 1 = -1 + i \cdot 0 + 1 = 0.$$

Nun, ich will im Folgenden an Beispielen zeigen, wo sich herausragende Künstler durchaus an die Mathematik herangewagt und dann ihre mathematischen Erkenntnisse mit ihrer großen Kunst verbunden haben.

1.2 Leonardo da Vinci

Er war Maler, Zeichner, Bildhauer, Architekt, Dichter, Musiker, Geologe, Anatom, Kartograf, Stadtplaner, Mechaniker, Ingenieur, Philosoph, Naturwissenschaftler und nicht zuletzt Mathematiker.

Leonardo da Vinci wurde am 15. April 1452 in Anchiano nahe bei Vinci, einem kleinen Dorf in der Nähe von Florenz, geboren. Seine Mutter Catarina war eine getaufte Sklavin aus Nordafrika, sein Vater Ser Piero da Vinci war bei Leonardos Geburt 25 Jahre alt. Er war ein angesehener Notar und konnte daher in der damaligen Zeit unmöglich eine Hausangestellte, als die Leonardos Mutter arbeitete, heiraten. Leonardo wuchs aber trotzdem im Hause seines Vaters auf, durfte aber als uneheliches Kind nur eine Volksschule besuchen. Latein lernte er erst in späten Jahren. Daher darf man mit Fug und Recht davon ausgehen, dass Leonardo die Arbeiten und Erfindungen aus dem alten Griechenland und aus Rom nicht kannte.

Als Leonardo einmal die Schwerpunkte seiner Arbeit hierarchisch auflisten sollte, bezeichnete er sich zuerst

- als Architekt,
- dann als Bildhauer
- und dann erst als Maler.

Auf seinen weiteren Lebensweg will ich nicht näher eingehen, sondern lediglich die Punkte herausheben, die Leonardos Verbindung zur Mathematik zeigen.

Der Satz des Pythagoras

Dieser Abschnitt bietet eine gute Gelegenheit, mit einem alten Vorurteil aufzuräumen. Selten trifft man jemanden, dem der Satz des Pythagoras unbekannt ist. Die meisten Menschen sagen aber als spontane Antwort: Ja, klar, Pythagoras ist doch

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Da blickt man als Mathematiker etwas ratlos; denn was meint der nur mit a und b und c? Ohne eine Erklärung ist das doch nur eine leere Formel. Dahinter steckt das Vorurteil, dass sich Mathematiker mit Zahlen, wenn es hoch kommt, vielleicht noch mit Formeln befassen. Ich denke da an einen bekannten Film, in dem ein offensichtlich hochbegabter Junge schwierigste mathematische Aufgaben löst, obwohl er eigentlich nur den Flur fegen soll. Kurz danach kommt die Filmsequenz, über die ich mich ärgere. Da stehen nämlich dieser Junge und ein Lehrer an der Tafel und sollen wohl irgendwie mit Mathematik umgehen. Das entwickelt sich dann so, dass der Junge eine Formel an die Tafel schreibt. Daraufhin stöhnt der Lehrer auf, wischt die Formel weg und schreibt selbst eine andere an. Darauf stöhnt der Junge und ändert die Formel durch Wischen ab. Das geht so eine Weile, ohne dass einer der beiden außer Stöhnen ein Wort hervorbringt. Da hatte wohl der Drehbuchschreiber den Gedanken im Kopf, dass Mathematiker nur mit Zahlen und Formeln um sich werfen, anderes können sie aber nicht von sich geben.

Hier an diesem Beispiel sehen Sie den Unterschied. Wenn wir erklären wollen und sollen, was die Formel oben ausdrückt, so müssen wir eine ganze Menge reden. Das sieht dann so aus:

Satz 1.1. *Gegeben sei ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit den beiden Katheten a und b und der Hypotenuse c. Über jeder der drei Seiten zeichnen wir das Quadrat mit dieser Seitenlänge. Dann sind die Flächen der beiden Kathetenquadrate zusammen genauso groß wie die Fläche des Hypotenusenquadrates, in Zeichen gilt also:*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Das waren doch drei grammatikalisch richtige und vollständige Sätze. So sprechen Mathematiker, die Formel ohne diese Erklärung ist inhaltsleer. Und in der Mathematik ist es geradezu verpönt, inhaltsleere Aussagen zu machen. Darum ärgere ich mich über diese falsche Darstellung in dem Film.

Nebenbei sei bemerkt, dass wir diesen „Satz" natürlich auch als nur einen Satz formulieren könnten; dann müssten wir die im Konjunktiv geschriebenen Voraussetzungen in einem „wenn-Satz" formulieren, z. B.: Wenn in einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck die beiden Katheten mit a und b und die Hypotenuse mit c bezeichnet wird und .... Das wäre dann insgesamt ein Satz, aber er wäre etwas unhandlich.

In der Abb. 1.1 zum Satz des Pythagoras wird das Ganze veranschaulicht.

Die Schwierigkeit dieses Satzes liegt in der Voraussetzung, dass das alles für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck gelten soll. Beliebig viele, das sind unendlich viele – wie sollen wir das denn beweisen? Abb. 1.1 zeigt ein einziges solches Dreieck. Wenn wir hier nachmessen und sehen, dass es wohl stimmt, taugt das höchstens zu einer Vermutung. Wir müssen uns eine Kette von Folgerungen einfallen lassen, die unabhängig von dem gerade zufällig gewählten Beispiel ist.

Für den Satz des Pythagoras gibt es inzwischen Bücher mit mehr als 200 Beweisen. Da haben sich also viele Leute getummelt. Einer der ersten war Leonardo da Vinci. In dem Buch des italienischen Mathematikers Fra Luca Pacioli (1445–1517) mit dem Titel *De Divina Proportione*, veröffentlicht um 1500, befinden sich Zeichnungen von Leonardo da Vinci; eine davon befasst sich mit unserem Satz. Schauen Sie sich Abb. 1.2 genau an.

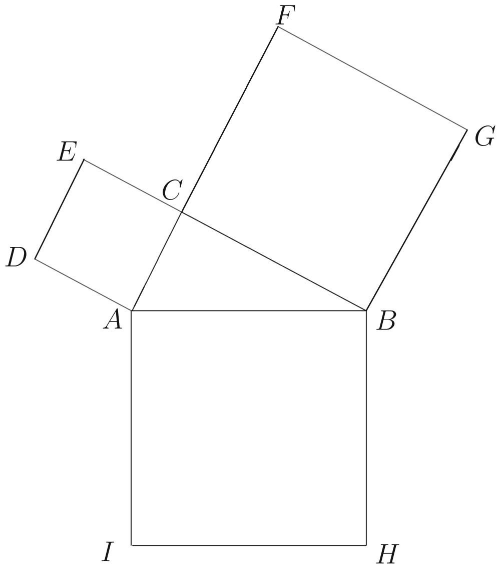


Abb. 1.1 Skizze zum Satz des Pythagoras

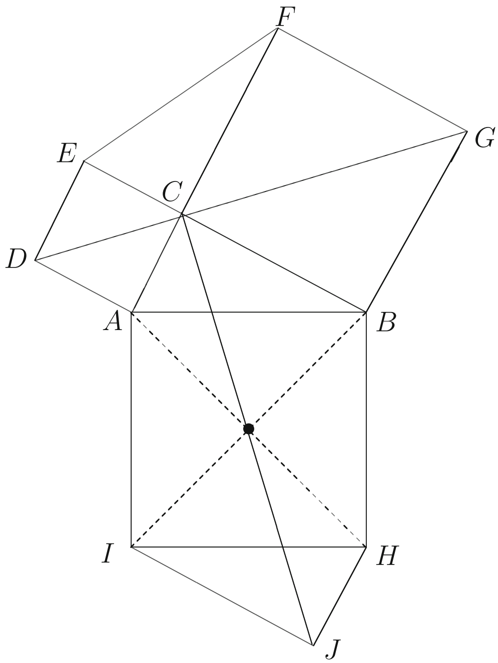


Abb. 1.2 Von Leonardo da Vinci erweiterte Skizze zum Satz des Pythagoras

In der Mitte sehen wir das Ausgangsdreieck ABC. Jeweils über den Katheten und der Hypotenuse sind die zugehörigen Quadrate eingezeichnet. Jetzt kommen die Ideen von Leonardo dazu. Ganz unten über der Linie HI ist das Ausgangsdreieck noch einmal gezeichnet. Drei weitere Linien vervollständigen die Figur. Die Linie EF vervollständigt die Figur nach oben. Die beiden Linien DG und CJ durchschneiden die Gesamtfigur.

Jetzt schauen wir genauer hin. Ein Teil der Linie DG ist die Diagonale im Quadrat $CBGF$, der andere Teil ist die Diagonale im Quadrat $ACED$. Beide Diagonalen liegen auf einer Linie, weil Diagonalen im Quadrat unter 45° auf den Eckpunkt auftreffen und weil bei C ja der rechte Winkel des Ausgangsdreiecks liegt.

Das ergibt die erste wichtige Erkenntnis, dass die Linie DG die ganze sechseckige Figur $ABGFED$ in zwei deckungsgleiche Hälften teilt. Wenn wir also das Viereck $DGFE$ entlang der Linie DG falten, erhalten wir das Viereck $DABG$.

Jetzt betrachten wir das Sechseck $AIJHBC$. Wenn wir dieses ganze Sechseck um den Mittelpunkt im unteren Quadrat, also den eingezeichneten dicken Punkt, um 180° drehen, so überdeckt die gedrehte Figur die alte Figur. Dieses Sechseck ist also punktsymmetrisch bezogen auf den eingezeichneten dicken Punkt. Damit ist das Viereck $AIJC$ nach 180°-Drehung deckungsgleich mit dem Viereck $CJHB$.

Wir haben also im oberen Teil der Figur zwei deckungsgleiche Vierecke und im unteren Teil ebenfalls, wobei das Dreieck ABC in beiden Sechsecken beteiligt ist, was wir später berücksichtigen müssen.

Jetzt kommt der schwierigste Moment. Wir wollen zeigen, dass das Viereck $ABGD$ kongruent, also deckungsgleich, zum Viereck $AIJC$ ist.

Die Deckung erreichen wir hier durch eine Drehung um 90° im Uhrzeigersinn um den Punkt A. Wollen Sie es selber herausfinden, oder darf ich kurz helfen? Nun, wenn wir das Viereck $ABGD$ um A um 90° drehen, kommt doch D zum Punkt C und B zum Punkt I. Der Winkel ABG bei B setzt sich zusammen aus dem (hier nicht eingezeichneten) Winkel β und dem rechten Winkel CBG. Genau so ist doch nach Konstruktion der Winkel AIJ bei I zusammengesetzt. Beachten Sie, dass wir das Ausgangsdreieck nach unten an die Linie IH drangezeichnet haben. Das bedeutet jetzt aber, dass der Punkt G zum Punkt J kommt. Damit ist die Linie DG direkt auf die Linie CJ gedreht worden. Beide Vierecke $ABGD$ und $AIJC$ sind deckungsgleich.

Jetzt kommen wir zum Schlussspurt. Wir wissen aus obiger Überlegung, dass die Sechsecke $ABGFED$ und $AIJHBC$ deckungsgleich sind. Jetzt rechnen wir die Flächeninhalte beider Sechsecke getrennt aus.

Das Sechseck $ABGFED$ besteht aus dem Ausgangsdreieck ABC und dem dazu deckungsgleichen Dreieck FEC und den beiden Quadraten. Also ist

$$\mathcal{F}_{ABGFED} = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + a^2 + b^2.$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass ein rechtwinkliges Dreieck ein halbes Rechteck ist, dass also ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b den Flächeninhalt $\mathcal{F} = \frac{a \cdot b}{2}$ hat.

Das Sechseck $AIJHBC$ besteht aus dem Ausgangsdreieck ABC, dem dazu deckungsgleichen Dreieck HIJ und dem großen Quadrat $AIHB$, also

$$\mathcal{F}_{AIJHBC} = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2.$$

Wegen der Gleichheit beider Flächeninhalte erhalten wir

$$\mathcal{F}_{ABGFED} = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + a^2 + b^2 = \mathcal{F}_{AIJHBC} = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2.$$

Und aus dieser Gleichung folgt sofort

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Jetzt haben wir alles bewiesen. Wie, werden Sie fragen, haben Sie denn alle, wirklich alle rechtwinkligen Dreiecke untersucht? Wir hatten doch nur ein einziges hingezeichnet und daran argumentiert.

Aber halt, wir haben nur die Rechtwinkligkeit des Dreiecks vorausgesetzt, sonst aber keine weitere Spezialisierung von diesem Dreieck vorgenommen. Nirgends haben wir verlangt und benutzt, dass unser Ausgangsdreieck eine Seitenlänge $c = 3{,}1$ cm oder so hätte. Auch die Winkel α und β waren uns völlig egal. Wir haben also für jede beliebige Seitenlänge und jeden beliebigen Winkel argumentiert. Damit sind unsere Argumente in jedem beliebigen rechtwinkligen Dreieck korrekt und anwendbar. Wir haben also die Aussage des Herrn Pythagoras wirklich für jedes beliebige rechtwinklige Dreieck bewiesen.

Diesen großartigen Beweis finden wir bei Leonardo da Vinci, vor 500 Jahren überlegt.

Perpetuum mobile

Ein alter Menschheitstraum ist die Erzeugung von Energie aus dem Nichts. Das würde alle unsere Probleme mit einem Schlag radikal lösen, wenn es denn ginge. Kann man eine Apparatur herstellen, die einfach so alleine läuft, ohne dass Kraft oder halt Energie von außen zugeführt wird? Solch eine Maschine nennt man Perpetuum mobile, dauernde Bewegung. Gute Lateiner wissen natürlich auch, wie der Plural heißt: Perpetua mobilia.

Leonardo da Vinci hatte wohl ursprünglich auch diesen Traum. Aber dieser große Geist ließ sich nicht beirren. Als Erstes hat er sich ein „Perpetuum mobile“ ausgedacht. In einer Ausstellung fand ich das in Abb. 1.3 dargestellte Experiment:

Nun durften und sollten die Besucher der Ausstellung an der Apparatur im Gegenuhrzeigersinn drehen. Dabei passiert Folgendes: Wenn ein Klöppel ganz oben ist, so fällt er bei weiterem Drehen nach links um. Dadurch gerät er wesentlich weiter vom Mittelpunkt des Rades weg. Damit überträgt er eine

Abb. 1.3 Von Leonardo da Vinci ausgedachtes „Perpetuum mobile“, Nachbau in einer Ausstellung

größere Kraft auf das Rad als die rechts enger am Radius anliegenden Klöppel. So erhält das Rad einen Schlag und dreht sich alleine weiter, bis der nächste Klöppel sich oben umlegt und dem Rad wieder einen Schlag versetzt. Weil die nach links umgeklappten Klöppel alle weiter von der Achse entfernt sind als die rechten, geht das Spiel weiter und weiter und weiter und immer weiter. Das Rad hört nie auf, sich zu drehen. So jedenfalls die Hoffnung.

Die Gemeinheit ist, dass das so leider nicht klappt. Beim Versuch drehte sich zwar das Rad eine Weile unter lautem Geklapper herum, wurde dann aber immer langsamer und blieb schließlich ganz stehen. Wo liegt der Fehlschluss?

Nun, darüber dachte Leonardo nach. Das Ergebnis seiner Überlegungen sehen wir in Abb. 1.4.

Besonders am oberen Rand der Skizze sieht man Linien und Eintragungen. Das entpuppt sich bei genauem Hinschauen als Darstellung der auftretenden Kräfte auf die linken und die rechten Klöppel. Physikalisch sind es natürlich die Drehmomente, die Leonardo hier aufgetragen hat.

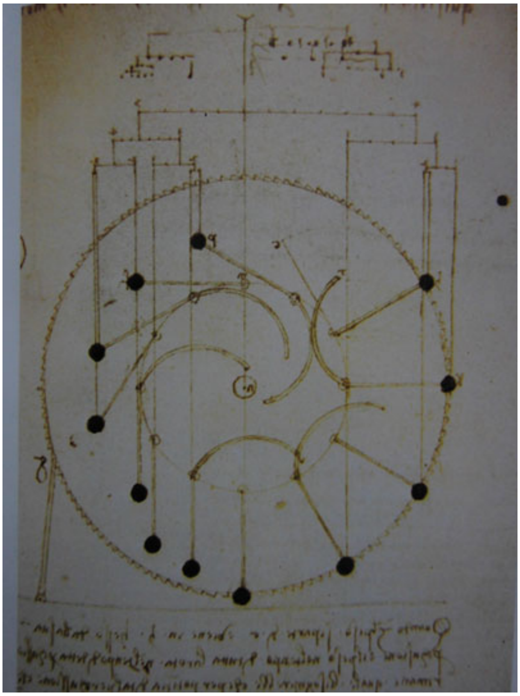


Abb. 1.4 Skizze von Leonardo da Vinci zum Beweis der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile

Kurz ein Wort zum Drehmoment. Dieser Begriff tritt bei Drehbewegungen auf. Was bei einer geradlinigen Bewegung die Kräfte sind, z. B. die Zugkraft eines Autos oder die Schwerkraft, das nennt man bei Drehbewegungen das Drehmoment. Das ist also eine Kraft, die die Drehbewegung eines Körpers, also seine Rotation, beschleunigen oder auch abbremsen kann. Mit einer solchen Drehkraft zieht man Muttern mit einem Schraubenschlüssel fest. Man kann auch mit einem solchen Drehmoment Eisen verbiegen. Das soll angeblich August der Starke (1670–1733), Kurfürst von Sachsen, mit Hufeisen geschafft haben.

Jeder weiß, dass es leichter ist, eine Mutter festzuziehen, wenn man den Ringschlüssel weiter außen anfasst. Dabei überträgt man mehr Drehmoment. Wie viel mehr das ist, zeigt uns die folgende Definition des Drehmomentes:

Definition 1.1. *Bezeichnen wir mit $\vec{F}$ die für eine Drehbewegung aufgewendete Kraft und mit $\vec{r}$ den Abstandsvektor vom Drehpunkt zu dem Punkt, wo wir die Kraft ansetzen, so ergibt sich der Vektor $\vec{M}$ des Drehmomentes aus dem Kreuzprodukt des Abstandsvektors mit dem Kraftvektor:*

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Hier benutzen wir die Gelegenheit, etwas über das Kreuzprodukt von zwei Vektoren zu sagen. Grundsätzlich wird dieses Produkt nur für Vektoren im $\mathbb{R}^3$ definiert. Wir werden gleich an der Definition zeigen, warum wir im Raum arbeiten müssen.

Definition 1.2. *Unter dem Kreuzprodukt oder auch dem Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die einen Winkel α einschließen, verstehen wir den Vektor*

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b},$$

der folgendermaßen bestimmt wird: Seine Länge sei

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha,$$

und seine Richtung legen wir mit der Rechte-Hand-Regel fest: Man strecke Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand so, dass jeder auf den beiden anderen senkrecht steht. Denken Sie an ein räumliches Koordinatensystem und vergleichen Sie Abb. 1.27. Der Daumen weise dann in Richtung von $\vec{a}$, der