G. Tomassini (Ed.)

CIME Summer Schools

Algebraic Surfaces

76

Cortona, Italy 1977

Springer

Fondazione CIME Roberto Conti

G. Tomassini (Ed.)

Algebraic Surfaces

Lectures given at a Summer School of the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Cortona (Arezzo), Italy,
June 22-30, 1977

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica “U. Dini”
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-11086-3 e-ISBN: 978-3-642-11087-0
DOI:10.1007/978-3-642-11087-0
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Liguori, Napoli 1981
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

C O N T E N T S

A. BEAUVILLE :	Surfaces Algébriques Complexes	Pag. 5
E. BOMBIERI :	Methods of Algebraic Geometry in Char. p and Their Applications	Pag. 57
I. DOLGACHEV :	Algebraic Surfaces With $p=p_g=0$	Pag. 97
F.A. BOGOMOLOV:	The Theory of Invariants and Ist Applications to Some Problems in The Algebraic Geometry	Pag. 217
F. CATANESE :	Pluricanonicál Mappings of Surcaces With $K^2 = 1,2,\ q=p_g=0$	Pag. 247
F. CATANESE :	On a Class of Surfaces of General Type	Pag. 267
A. TOGNOLI :	Some Remarks About the "Nullstellensatz"	Pag. 285

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

SURFACES ALGEBRIQUES COMPLEXES

ARNAUD BEAUVILLE

SURFACES ALGÉBRIQUES COMPLEXES

ARNAUD BEAUVILLE

INTRODUCTION

Cet exposé comprend deux parties. La première est un survol assez rapide de la classification d'Enriques des surfaces algébriques. On s'est inspiré, bien entendu, de la littérature classique sur le sujet, et en particulier du séminaire Chafarevitch [Ch.2]. On a essayé d'être aussi élémentaire que possible, en supposant toutefois connue la cohomologie des faisceaux cohérents. On renvoie à [Be] pour une exposition plus détaillée ainsi que pour des exemples.

La seconde partie comprend des indications sur la démonstration par Chafarevitch et Piatechki-Chapiro du théorème de Torelli pour les surfaces K 3 ([Ch.P]).

PREMIERE PARTIE

§1. Notations et rappels.

Nous dirons simplement surface au lieu de surface projective et lisse sur $\mathbb{C}$.

Soit S une surface, D, D' deux diviseurs sur S. On note :

- $D \equiv D'$ si D et D' sont linéairement équivalents (i.e. $D-D'$ est le diviseur d'une fonction rationnelle sur S).
- $\mathcal{O}_S(D)$ le faisceau inversible associé à D.
- $H^i(S, \mathcal{O}_S(D))$, ou simplement $H^i(D)$ s'il n'y a pas de confusion possible, les espaces de cohomologie du faisceau $\mathcal{O}_S(D)$.
- $h^i(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(D)$
- $\chi(\mathcal{O}_S(D)) = h^o(D) - h^1(D) + h^2(D)$
- $|D|$ = espace projectif des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D.

  = espace projectif associé à $H^o(D)$.

  (Si $h^o(D) = 2$, on dit que $|D|$ est un pinceau).
- K_S ou K = diviseur canonique = un diviseur tel que $\mathcal{O}_S(K) = \Omega_S^2$.
- $\mathrm{Pic}(S)$ = groupe des diviseurs modulo équivalence linéaire

  $\cong$ groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles

En vertu de théorèmes généraux, on a :

$$\mathrm{Pic}(S) = H^1(S, \mathcal{O}_S^*) = H^1(S, {}^h\mathcal{O}_S^*)$$

où ${}^h\mathcal{O}_S$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur S , considérée comme variété analytique. Cette dernière interprétation permet de considérer la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow {}^h\mathcal{O}_S \xrightarrow{\exp} {}^h\mathcal{O}_S^* \longrightarrow 0$$

d'où l'on déduit la suite exacte importante :

$$0 \longrightarrow H^1(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow H^2(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) \qquad (a)$$

Posons : $\mathrm{Pic}^o(S) = H^1(S, \mathcal{O}_S)/H^1(S,\mathbb{Z})$

$$\mathrm{NS}(S) = \mathrm{Ker}(H^2(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S))$$

Le groupe $\mathrm{Pic}(S)$ apparait comme une extension :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}^o(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{NS}(S) \longrightarrow 0$$

de deux groupes de nature différente:

- le groupe $\mathrm{Pic}^o(S)$ est un groupe divisible; la théorie de Hodge montre que $H^1(S,\mathbb{Z})$ est un réseau dans $H^1(S, \mathcal{O}_S)$, autrement dit $\mathrm{Pic}^o(S)$ a une structure naturelle de tore complexe - et même, en fait, de variété abélienne.

- le groupe $\mathrm{NS}(S) \subset H^2(S,\mathbb{Z})$ est un groupe de type fini.

Le cup-produit sur $H^2(S,\mathbb{Z})$ induit sur $\mathrm{NS}(S)$ une forme bilinéaire symétrique à valeurs dans $\mathbb{Z}$, le produit d'intersection; si D et D' sont deux diviseurs, on note $(D\cdot D')$ le produit de leurs classes dans $\mathrm{NS}(S)$. On obtient ainsi une forme bilinéaire symétrique sur le groupe des diviseurs qui joue un rôle fondamental dans la théorie des surfaces. Si C, C' sont deux courbes irréductibles distinctes, on a :

$(C.C')$ = nombre de points d'intersection de C et C' , comptés avec leur multiplicité.

Rappelons quelques théorèmes fondamentaux :

Théorème de Riemann-Roch : $\chi(\mathcal{O}_S(D)) = \chi(\mathcal{O}_S) + 1/2\,(D^2 - D.K)$

Dualité de Serre : $h^i(K-D) = h^{2-i}(D)$, $0 \leq i \leq 2$.

On utilisera très souvent Riemann-Roch sous la forme suivante, qui utilise la dualité de Serre : $h^o(D) + h^o(K-D) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + 1/2\,(D^2 - D.K)$

Formule du genre : Soit C une courbe irréductible sur S .

On a : $\dim H^1(C, \mathcal{O}_C) = 1 + 1/2(C^2 + C.K)$

Ce nombre est le genre de C , noté $g(C)$. Si C est singulière, son genre est strictement plus grand que celui de sa normalisée; en particulier, on a $g(C) = 0$ si et seulement si $C \cong \mathbb{P}^1$.

Invariants numériques

On pose :

$q(S) = \dim H^1(S, \mathcal{O}_S) = \dim H^o(S, \Omega^1_S)$ (par théorie de Hodge)

$p_g(S) = \dim H^2(S, \mathcal{O}_S) = \dim H^o(S, \Omega^2_S) = \dim H^o(K)$ (par dualité de Serre)

$P_n(S) = \dim H^o(nK)$ pour $n \geq 1$.

On notera simplement q, p_g, P_n s'il n'y a pas de confusion possible. Tous ces invariants sont des invariants birationnels. On a :

$$\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g$$

On pose $b_i = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X,\mathbb{C})$; par dualité de Poincaré, on a $b_4 = b_o = 1$ et $b_3 = b_1$. De plus, il résulte de la théorie de Hodge que $b_1 = 2q$.

On pose $\chi_{top}(S) = \sum (-1)^i\, b_i = 2 - 2b_1 + b_2$

Ces invariants sont reliés par la :

Formule de M. Noether : $12\chi(\mathcal{O}_S) = K^2 + \chi_{top}(S)$

Nous utiliserons la variété d'Albanese d'une surface S ; rappelons ici les propriétés qui nous intéressent :

Rappel : variété d'Albanese.

Il existe une variété abélienne $Alb(S)$, de dimension q, et un morphisme $\alpha : S \longrightarrow Alb(S)$ tels que :

- Si $q \geqslant 1$, $\alpha(S)$ n'est pas réduit à un point;
- Si $\alpha(S)$ est une courbe B, cette courbe est lisse de genre q et la fibration $p : S \longrightarrow B$ a ses fibres connexes.

  On dira que p est la fibration d'Albanese de S.

Nous utiliserons également le théorème classique suivant :

"Théorème de Bertini" : Soient S une surface, C une courbe, $q : S \to C$ un morphisme surjectif. Il existe une courbe lisse B et un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p"'] & & C \\ & B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

tel que le morphisme $p : S \longrightarrow B$ ait ses fibres connexes.

Notons que la fibre générique du morphisme p est alors lisse et irréductible, puisque la fibre générique d'un morphisme de variétés lisses sur $\mathbb{C}$ est toujours lisse (théorème de Sard) .

Enfin la remarque suivante est triviale mais extrêmement utile :

Remarque utile :

Soient C une courbe irréductible sur S, telle que $C^2 \geqslant 0$, D un diviseur effectif. Alors $(D.C) \geqslant 0$.

Démonstration : on écrit $D = D' + nC$, où D' ne contient pas C, et $n \geqslant 0$; alors $(D.C) = (D'.C) + n(C^2) \geqslant 0$.

§2. Applications birationnelles.

On peut classifier les surfaces à isomorphisme près, ou, plus grossièrement, à isomorphisme birationnel près. Le problème ne se pose pas pour les courbes, puisque toute application birationnelle d'une courbe lisse dans une autre est partout définie. Pour les surfaces, on va voir que toute application birationnelle s'obtient à partir de transformations "élémentaires", les éclatements.

Rappel : Soit S une surface, $p \in S$. Il existe une surface $\hat{S}$ et un morphisme birationnel $\varepsilon : \hat{S} \to S$, tels que :

- ε restreint à $\varepsilon^{-1}(S-p)$ est un isomorphisme sur $S-p$;
- $\varepsilon^{-1}(p) = E$ est une courbe isomorphe à $\mathbb{P}^1$, qui s'identifie naturellement à l'ensemble des directions tangentes à S en p.

On dit que ε est l'éclatement de S en p, et E la droite exceptionnelle de l'éclatement. On a :

$$\mathrm{Pic}(\hat{S}) \cong \mathrm{Pic}(S) \oplus \mathbb{Z}[E]$$

$$NS(\hat{S}) \cong NS(S) \oplus \mathbb{Z}[E] \qquad (b)$$

La forme d'intersection sur $\hat{S}$ étant donnée par les formules :

$$(\varepsilon^* D . \varepsilon^* D') = (D.D') \qquad D, D' \text{ diviseurs sur } S$$

$$(\varepsilon^* D.E) = 0$$

$$E^2 = -1$$

De plus on a :

$K_{\hat{S}} = \varepsilon^* K_S + E$

Soit C une courbe irréductible sur S , passant par p avec multiplicité m . On définit le transformé strict $\hat{C}$ de C comme l'adhérence dans $\hat{S}$ de $\varepsilon^{-1}(C-p)$. On vérifie immédiatement que :

$$\varepsilon^* C = \hat{C} + mE$$

d'où l'on déduit : $\hat{C}^{\,2} = C^2 - m^2$ et

$$\hat{C}.\hat{K} = C.K + m \qquad (c)$$

Nous admettons sans démonstration les théorèmes suivants (cf. par exemple [Ch. 1]) :

Théorème d'élimination des indéterminations.

Soient S une surface, V une variété algébrique, $\varphi : S \dashrightarrow V$ une application rationnelle. Il existe un morphisme $\eta : \tilde{S} \longrightarrow S$, composé d'une suite finie d'éclatements, et un morphisme $f : \tilde{S} \longrightarrow V$ tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \tilde{S} \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "f"] & \\ S \arrow[rr, dashed] & & V \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Théorème de structure des morphismes birationnels.

Tout morphisme birationnel (d'une surface dans une autre) est composé d'une suite finie d'éclatements.

Corollaire

Soit $\varphi : S \dashrightarrow S'$ une application birationnelle. Il existe une surface S et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \tilde{S} \arrow[dl, "\eta_1"'] \arrow[dr, "\eta_2"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & S' \end{tikzcd}$$

où η_1, η_2 sont des composés d'un nombre fini d'éclatements.

Soit $f : S \rightarrow S'$ un morphisme birationnel. Le nombre n d'éclatements dont il est composé est déterminé par la formule $NS(S) \cong NS(S') \oplus \mathbb{Z}^n$; en particulier, tout morphisme birationnel de S dans elle-même est un isomorphisme.

Pour toute surface S, notons $B(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces birationnellement isomorphes à S. Si S_1, $S_2 \in B(S)$, on dit que S_1 domine S_2 s'il existe un morphisme birationnel (i.e. un composé d'éclatements) de S_1 dans S_2. D'après ce qui précède, on introduit ainsi une relation d'ordre sur $B(S)$. On dit qu'une surface S est minimale si elle est minimale dans $B(S)$, c'est-à-dire si tout morphisme birationnel de S dans une surface S' est un isomorphisme.

Proposition

Toute surface domine une surface minimale.

Démonstration : Soit S une surface. Si S n'est pas minimale, il existe un morphisme birationnel $S \rightarrow S_1$ qui n'est pas un isomorphisme. Si S_1 n'est pas minimale, il existe de même $S \rightarrow S_2$, et ainsi de suite; comme :

$$\mathrm{rg}\, NS(S) > \mathrm{rg}\, NS(S_1) > \mathrm{rg}\, NS(S_2) > \dots \qquad \text{(formule (b) p. 6)}$$

on arrive nécessairement à une surface minimale dominée par S.

Disons qu'une courbe $E \subset S$ est exceptionnelle s'il existe un éclatement $\varepsilon : S \longrightarrow S'$ (S' surface lisse) tel que E soit la droite exceptionnelle de ε ; il résulte du théorème de structure des morphismes birationnels qu'une surface est minimale si et seulement si elle ne contient pas de courbe exceptionnelle.

Les courbes exceptionnelles sont caractérisées par le théorème suivant que nous admettrons :

Critère de contraction de Castelnuovo

Une courbe E est exceptionnelle si et seulement si $E \simeq \mathbb{P}^1$ et $E^2 = -1$

L'ensemble $B(S)$ sera en principe connu dès que l'on connaîtra ses éléments minimaux - tous les autres étant obtenus à partir de ceux-là par des éclatements. Deux cas peuvent se présenter : il y a un seul modèle minimal, ou il y en a plusieurs.

Définition 1 : Une surface S est réglée si elle est birationnellement isomorphe à $C \times \mathbb{P}^1$, où C est une courbe lisse. Si de plus $C = \mathbb{P}^1$, on dit que S est rationnelle.

Théorème des modèles minimaux

Soient S, S' deux surfaces minimales, $\varphi : S \dashrightarrow S'$ une application birationnelle. Si S n'est pas réglée, φ est un isomorphisme.

En particulier, $B(S)$ a un seul élément minimal, et tout automorphisme birationnel de S est un automorphisme.

La démonstration utilise le lemme fondamental de la théorie des surfaces:

Lemme-clé (Enriques-Castelnuovo)

Soient S une surface minimale non réglée, C une courbe irréductible.

Alors : $K.C \geqslant 0$.

Ce lemme sera démontré plus tard (§8) .

Démonstration du théorème : Par le théorème d'élimination des indéterminations, il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \tilde{S} \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "f"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & S' \end{tikzcd}$$

où $\eta = \varepsilon_n \circ \dots \circ \varepsilon_1$, est un composé de n éclatements et f un morphisme birationnel.

Parmi tous les diagrammes possibles, choisissons-en un tel que n soit minimal; il s'agit de montrer que $n = 0$. Soit E la droite exceptionnelle de l'éclatement ε_1 . Si $f(E)$ était réduit à un point, le morphisme f se factoriserait en $f' \circ \varepsilon_1$ et l'on contredirait la minimalité de n . Donc $f(E)$ est une courbe C . Comme f est un composé d'éclatements, il résulte de la formule (c) p.7 que :

$$(C.K_{S'}) \leq (E.K_{\tilde{S}}) = -1$$

d'où une contradiction avec le lemme-clé.

La classification des surfaces se divise donc en deux branches : d'un côté les surfaces réglées, qu'on peut considérer comme connues du point de vue birationnel, mais dont on cherchera les modèles minimaux; de l'autre les surfaces non réglées, pour lesquelles la classification "birégulière" revient essentiellement au même que la classification birationnelle : il suffira de classer les surfaces minimales.

§3. Surfaces réglées et rationnelles

Définition 2

Soit C une courbe lisse. Une surface géométriquement réglée de base C est une surface S , munie d'un morphisme lisse $p : S \rightarrow C$ dont les fibres sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$.

Il n'est pas évident a priori qu'une surface géométriquement réglée est réglée (Déf.1); cela résulte du :

Théorème 3 (Noether-Enriques)

Soient S une surface, p un morphisme de S sur une courbe lisse C. On suppose qu'il existe $x \in C$ tel que la fibre $p^{-1}(x)$ soit isomorphe à $\mathbb{P}^1$. Alors il existe un ouvert U de C, de la forme $U = C - \{x_1 \dots x_n\}$ $(x_i \neq x)$ et un isomorphisme de $p^{-1}(U)$ sur $U \times \mathbb{P}^1$, commutant avec les projections sur U.

Pas 1 : $p_g(S) = 0$

Notons $F = p^{-1}(x)$. On a $F^2 = 0$ et $F.K = -2$ (formule du genre), donc si $D \in |K|$ on doit avoir $D.F = -2$ mais aussi $D.F \geqslant 0$ par la remarque utile (p. 6) ,et par suite $|K| = \emptyset$.

Pas 2 : il existe un diviseur H sur S tel que $(H.F) = 1$.

Comme $p_g(S) = 0$, la flèche $\mathrm{Pic}(S) \longrightarrow H^2(S,\mathbb{Z})$ est surjective ((a)p. 3). Il suffit donc de montrer qu'il existe une classe $h \in H^2(S,\mathbb{Z})$ telle que $h.f = 1$, en notant f la classe de F dans $H^2(S,\mathbb{Z})$. Pour a variable dans $H^2(S,\mathbb{Z})$, l'ensemble des entiers $(a.f)$ est un idéal de $\mathbb{Z}$, de la forme $d.\mathbb{Z}$ $(d \geqslant 1)$. L'application $a \longmapsto 1/d\,(a.f)$ est une forme linéaire sur $H^2(S,\mathbb{Z})$; par dualité de Poincaré, il existe un élément $f' \in H^2(S,\mathbb{Z})$ tel que :

$$(a.f') = 1/d\,(a.f) \qquad \text{pour tout} \quad a \in H^2(S,\mathbb{Z})$$

et donc $f = d.f'$ modulo torsion dans $H^2(S,\mathbb{Z})$.

Mais comme $f^2 = 0$, $f.[K] = -2$ et que $f'^2 + f'.[K]$ est pair, on voit qu'on a nécessairement $d = 1$, d'où le résultat.

Pas 3

Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(H + (r-1)\,F) \longrightarrow \mathcal{O}_S(H+rF) \longrightarrow \mathcal{O}_F(1) \longrightarrow 0 \qquad (r \in \mathbb{Z})$$

On en déduit la suite exacte longue de cohomologie :

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(H+rF)) \xrightarrow{a_r} H^0(F, \mathcal{O}_F(1)) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(H+(r-1)F)) \xrightarrow{b_r} H^1(S, \mathcal{O}_S(H+rF)) \to 0$$

La suite des espaces quotients $H^1(S, \mathcal{O}_S(H+rF)$ doit être stationnaire pour r assez grand; donc il existe un r tel que b_r soit bijectif et par suite a_r surjectif. Choisissons un sous-espace vectoriel V de $H^0(S, \mathcal{O}_S(H+rF))$, de dimension 2, tel que $a_r(V) = H^0(F, \mathcal{O}_F(1))$; notons P le pinceau correspondant. Il peut avoir des composantes fixes, mais elles doivent être contenues dans certaines fibres $F_{x_1}, \ldots, F_{x_k}$ de p distinctes de F (puisque P n'a pas de points fixes sur F). De même les points fixes de la partie mobile de P sont contenus dans des fibres $F_{x_{k+1}}, \ldots, F_{x_l}$ distinctes de F. Enfin notons $F_{x_{l+1}}, \ldots, F_{x_m}$ les fibres de p qui ne sont pas irréductibles. Posons $U = C - \{x_1, \ldots, x_m\}$, et notons P' la restriction de P à $p^{-1}(U)$. Le pinceau P' est sans points fixes; toute courbe C_t de P' est réunion d'une section de p et éventuellement de certaines fibres; mais en fait C_t ne contient pas de fibres, sans quoi on aurait $C_t \cap C_{t'} \neq \emptyset$ pour $t \neq t'$. Donc le pinceau P' est formé de sections $(C_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ de la fibration p. Comme il est sans points fixes, il définit un morphisme $g : p^{-1}(U) \to \mathbb{P}^1$, de fibre $g^{-1}(t)=C_t$; on en déduit un morphisme $h = (p,g)$ de $p^{-1}(U)$ sur $U \times \mathbb{P}^1$. Comme $h^{-1}((x,t)) = F_x \cap C_t$, h est un isomorphisme, d'où le théorème.

Remarque 4

Lorsque p est lisse, S est donc un fibré en droites projectives au-dessus de C, localement trivial (pour la topologie de Zariski). L'ensemble des classes d'isomorphisme de tels fibrés s'identifie à l'ensemble $H^1(C, PGL(2, \mathcal{O}_C))$. Or on déduit de la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_C^* \longrightarrow GL(2, \mathcal{O}_C) \longrightarrow PGL(2, \mathcal{O}_C) \longrightarrow 1$$

la suite exacte de cohomologie :

$$\mathrm{Pic}(C) \longrightarrow H^1(C, GL(2, \mathcal{O}_C)) \longrightarrow H^1(C, PGL(2, \mathcal{O}_C)) \longrightarrow H^2(C, \mathcal{O}_C^*)$$

Or $H^2(C, \mathcal{O}_C^*) = 0$, par exemple parce que C est une courbe; donc tout fibré en droites projectives sur C est le fibré projectif $\mathbb{P}_C(E)$ associé à un fibré vectoriel E de rang 2 sur C . Les fibrés $\mathbb{P}_C(E)$ et $\mathbb{P}_C(E')$ sont isomorphes si et seulement si il existe un fibré inversible L sur C tel que $E' \cong E \otimes L$.

La classification des surfaces géométriquement réglées sur C est donc ramenée à celle des fibrés vectoriels de rang 2 sur C . Celle-ci est loin d'être triviale, mais peut être considérée comme bien comprise - cf. [R] .

Lemme 5

Soient S une surface, C une courbe lisse, $p : S \longrightarrow C$ un morphisme dont la fibre générique est isomorphe à $\mathbb{P}^1$. Si une fibre de p n'est pas irréductible, elle contient une droite exceptionnelle.

Démonstration : Soit F une fibre réductible, $F = \sum n_i C_i$. On a $C_i^2 < 0$ pour tout i (car $n_i C_i^2 = C_i (F - \sum_{j \neq i} n_j C_j) < 0$), donc par la formule du genre $K.C_i \geqslant -1$, l'égalité n'ayant lieu que si C_i est une courbe exceptionnelle. Par suite si F ne contenait pas de courbes exceptionnelles, on trouverait $K.F \geqslant 0$, ce qui contredirait $K.F = -2$.

Théorème 6

Soit C une courbe lisse non rationnelle. Les modèles minimaux de $C \times \mathbb{P}^1$ sont les surfaces géométriquement réglées de base C .

Démonstration : Il est clair qu'une surface géométriquement réglée ne contient pas de droites exceptionnelles, car celles-ci devraient s'envoyer surjectivement sur C , ce qui est impossible. Soient S une surface minimale, f une application birationnelle de S sur $C \times \mathbb{P}^1$, p la projection de $C \times \mathbb{P}^1$ sur C . Considérons l'application rationnelle $p \circ f : S \dashrightarrow C$; par le théorème d'élimination des indéterminations il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \hat{S} \arrow[dl, "\varepsilon_n"'] \arrow[ddr, "q_n"] & \\ \vdots \arrow[d, "\varepsilon_1"'] & & \\ S \arrow[rr, dashed, "pf"] & & C \end{tikzcd}$$

où les ε_i sont des éclatements, et q_n un morphisme. Notons E_n la droite exceptionnelle de l'éclatement ε_n . Comme C n'est pas rationnelle, $q_n(E_n)$ est réduit à un point, de sorte que q_n se factorise en $q_{n-1} \circ \varepsilon_n$. En continuant le procédé, on voit finalement que pf est un morphisme, de fibre générique isomorphe à $\mathbb{P}^1$.

D'après le lemme 5, les fibres de pf sont irréductibles, donc rationnelles lisses (puisqu'elles vérifient $F^2 = 0$, $F.K = -2$, d'où $g(F) = 0$) : par suite S est une surface géométriquement réglée de base C .

Nous nous contenterons d'énoncer sans démonstration le résultat analogue pour les surfaces rationnelles. On sait que tout fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ est somme de fibrés inversibles; il en résulte que les surfaces géométriquement réglées de base $\mathbb{P}^1$ sont les surfaces :

$$F_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) . \qquad \text{pour } n \geqslant 0 .$$

Théorème

Les surfaces rationnelles minimales sont $\mathbb{P}^2$ et les surfaces F_n pour $n \neq 1$.

Remarque 7

Il est facile de calculer les invariants numériques des surfaces réglées : si S est birationnellement équivalente à $C \times \mathbb{P}^1$, on trouve :

- $P_n(S) = 0$ pour tout n

- $q(S) = g(C)$.

Si de plus S est minimale $\neq \mathbb{P}^2$, on a :

$$K_S^2 = 8(1-q) \qquad b_2(S) = 2$$

tandis que $K^2_{\mathbb{P}^2} = 9$ et $b_2(\mathbb{P}^2) = 1$.

Nous allons voir qu'inversement l'annulation des P_n caractérise les surfaces réglées.

§4. Caractérisation des surfaces rationnelles et réglées.

Rappelons que nous démontrerons plus loin (§8) le :

Lemme-clé : Soit S une surface minimale non reglée, D un diviseur effectif sur S. Alors $D.K \geqslant 0$.

Lemme 8

Soit S une surface minimale avec $K^2 < 0$. Alors S est réglée.

Démonstration : Soit H une section hyperplane de S. Si $(H.K) < 0$, on applique le lemme-clé; de même si $(H.K) = 0$, en prenant $D = nH+K$ qui est effectif pour n assez grand. On peut donc supposer $(H.K) > 0$.

Posons $r_o = \dfrac{H.K}{-K^2}$. On a :

$(H+r_o K)^2 = H^2 + \dfrac{(H.K)^2}{-K^2} > 0$ et $(H+r_o K).K = 0$, de sorte que si r

est un rationnel $> r_o$ et suffisamment voisin de r_o , on a :

$(H+rK)^2 > 0 \qquad (H+rK).K < 0 \qquad (H+rK).H > 0$

Posons $D_m = m(H+rK)$, pour tout m tel que $mr \in \mathbb{Z}$. Par Riemann-Roch, on a : $h^o(D_m) + h^o(K-D_m) \longrightarrow \infty$ quand $m \longrightarrow \infty$.

Comme $(K-D_m).H$ devient négatif pour m grand , on voit que pour m grand le système $|D_m|$ est non vide; comme $D_m.K<0$, on conclut encore par le lemme-clé.

Théorème 9 (Castelnuovo)

Soit S *une surface avec* $q = P_2 = 0$. *Alors* S *est rationnelle*.

Démonstration : On peut supposer S minimale. Si $K^2 < 0$, on applique le lemme 8 . Si $K^2 \geq 0$, le théorème de Riemann-Roch (compte tenu de $P_2 = 0$) donne : $h^o(-K) \geq 1 + K^2 \geq 1$ donc si H est une section hyperplane, on a $(K.H) < 0$, d'où le résultat par le lemme-clé.

Notre but est maintenant de caractériser les surfaces réglées par l'annulation des plurigenres P_n . Si $q = 0$, l'annulation de P_2 suffit; Si $q \geq 1$, celle de p_g n'est pas loin de suffire :

Lemme 10

Soit S *une surface minimale avec* $p_g = 0$, $q \geq 1$. *On a alors* $K^2 < 0$ (*et donc* S *est réglée*) *sauf si* $q = 1$; $b_2 = 2$, $K^2 = 0$.

Démonstration : la formule de Noether (p. 5) s'écrit ici :

$$10 - 8q = K^2 + b_2$$

Il suffit donc de vérifier qu'on ne peut avoir $q = 1$, $b_2 = 1$. On considère pour cela la fibration d'Albanese $p : S \longrightarrow B$, où B (= Alb(S)) est une courbe elliptique; il est clair qu'une section hyperplane de S et une fibre générique de p sont linéairement indépendantes dans NS(S) , de sorte que $b_2 \geqslant 2$.

Proposition 11

Soit S une surface minimale non réglée avec $p_g = 0$, $q = 1$. Alors $S = (C \times F)/G$, où C et F sont des courbes lisses de genre $\geqslant 1$, G un groupe fini d'automorphismes de C , opérant sans points fixes sur $C \times F$ (de manière compatible avec la projection sur C) , C/G est elliptique, et C ou F est elliptique.

Démonstration (rapide): On considère la fibration d'Albanese $p : S \longrightarrow B$, où $B = \mathrm{Alb}(S)$ est une courbe elliptique. On désigne par F_b la fibre $p^{-1}(b)$ pour $b \in B$, et par F_η une fibre générique de p . On pose $g = g(F_\eta)$.

Pas 1 : Si $g \geqslant 2$, p est lisse; si $g = 1$, les fibres de p sont soit lisses, soit de la forme nE , où E est une courbe elliptique lisse.

En premier lieu le fait que $b_2 = 2$ entraîne que les fibres sont irréductibles. On utilise ensuite la formule topologique suivante :

$$\chi_{top}(S) = \chi_{top}(B) \cdot \chi_{top}(F_\eta) + \sum_{b \in B} (\chi_{top}(F_b) - \chi_{top}(F_\eta)) \qquad (d)$$

Lorsqu'une fibre générique F_η se spécialise en une fibre singulière (irréductible) F_b , un certain nombre de 1-cycles sur F (les "cycles évanescents") disparaissent dans l'homologie de F_b ; autrement dit, on a $b_1(F_b) < b_1(F_\eta)$, et donc $\chi_{top}(F_b) > \chi_{top}(F_\eta)$. Or par hypothèse $\chi_{top}(S) = \chi_{top}(B) = 0$; la formule (d) montre donc qu'il ne peut y avoir de fibres singulières. Enfin si $F_b = nC$, on trouve :

$$\chi_{top}(F_b) = \chi_{top}(C) = 2\chi(\mathcal{O}_C) = (C.K) = \frac{1}{n}(F_b.K) = \frac{1}{n}(F_\eta.K) = \frac{1}{n}\chi_{top}(F_\eta)$$

donc $\chi_{top}(F_b) > \chi_{top}(F_\eta)$ sauf si $\chi_{top}(F_b) = \chi_{top}(F_\eta) = 0$.

Pas 2 : Si p est lisse, il existe un revêtement étale $C \longrightarrow B$ tel que la fibration image réciproque $\tilde{S} = S \times_B C \longrightarrow C$ soit triviale (i.e. $\tilde{S} \cong C \times F_\eta$).

La fibration p définit une famille de courbes de genre g sur B. Quitte à passer à un revêtement étale C de B, on peut "rigidifier" la cohomologie (mod n) de ces courbes, c'est-à-dire rendre constant le système localement constant des $H^1(F_b, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et en choisir une base symplectique. Si $n \geq 3$, on sait ([G]) qu'il existe une famille de courbes de genre g $P : U_{n,g} \longrightarrow T_{n,g}$, à cohomologie (mod n) rigidifiée, qui est universelle; c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $f : C \longrightarrow T_{n,g}$ telle que la fibration $\tilde{S} \rightarrow C$ se déduise de P par image réciproque. Or le revêtement universel de C est $\mathbb{C}$ et celui de $T_{n,g}$ est l'espace de Teichmüller T_g qui est un domaine borné, donc le morphisme f est trivial (i.e. $f(C)$ est un point), ce qui implique que la fibration $\tilde{S} \rightarrow C$ est triviale. On peut supposer le revêtement $C \rightarrow B$ galoisien de groupe G, de sorte que $S = (C \times F)/G$, avec C elliptique.

(Au lieu d'utiliser le théorème difficile de structure de l'espace de Teichmüller, on peut considérer l'espace $\mathfrak{A}_{n,g}$ des modules des variétés abéliennes principalement polarisées, à cohomologie (mod n) rigidifiée; son revêtement universel est l'espace de Siegel H_g, qui est un domaine borné pratiquement par construction. Il faut alors utiliser le théorème de Torelli.)

<u>Pas 3</u> : <u>Si</u> p <u>a des fibres multiples</u> (donc $g = 1$), <u>il existe un revêtement ramifié</u> $C \longrightarrow B$ <u>tel que si</u> $\tilde{S}$ <u>désigne la normalisée de</u> $S \times_B C$, <u>la fibration</u> $\tilde{S} \longrightarrow C$ <u>déduite de</u> p <u>soit triviale</u>.

Soit B' une courbe lisse sur S, telle que $p(B') = B$; notons S' la normalisée de $S \times_B B'$. Alors S' est lisse; on montre que pour un choix convenable de B', la projection $S' \longrightarrow S$ est étale. La fibration $p' : S' \rightarrow B'$ déduite de p possède une section : elle n'a donc pas de fibres multiples, autrement dit p' est lisse. Quitte à passer à un revêtement étale C de B', on a alors comme précédemment un morphisme $f : C \longrightarrow T_{n,1} (n \geq 3)$. Or $T_{n,1}$ est une courbe affine (c'est un revêtement ramifié de $\mathbb{C}$, via l'invariant j), donc f est trivial et la fibration sur C déduite de p' est triviale. On peut supposer le revêtement $C \rightarrow B$ galoisien de groupe G, de sorte que $S = (C \times F_\eta)/G$, avec

F_η elliptique.

La proposition est donc démontrée.

Corollaire 12

Soit S une surface minimale non réglée avec $p_g = 0$, $q \geq 1$.

(i) Il existe un entier $n \geq 0$ tel que $P_n \neq 0$;

(ii) Si $S = (E \times F)/G$, où E et F sont elliptiques, on a $nK \equiv 0$;

(iii) Si S n'est pas du type précédent, les P_m ne sont pas bornés.

Démonstration : Il résulte de la proposition qu'il existe un revêtement étale de degré n $\pi : C \times F \longrightarrow S$, avec $g(C)$, $g(F) \geq 1$. On a $p_g(C \times F) = g(C).g(F) \geq 1$, donc il existe un diviseur effectif $D \in |K_{C \times F}|$; comme π est étale, on sait que $K_{C\times F} \equiv \pi^* K_S$, de sorte que :

$$\pi_* D \in |\pi_* \pi^* K_S| = |n.K_S| \qquad \text{d'où} \quad P_n(S) \geq 1 .$$

Le même argument montre que $P_{rn}(S) \geq P_r(C \times F)$, ce qui montre que les P_n sont non bornés dès que $g(C)$ ou $g(F) \geq 2$. Enfin si C et F sont elliptiques, on a $K_{C\times F} \equiv 0$; donc si $D \in |nK_S|$, le diviseur $\pi^* D$ est nul, ce qui signifie que $D = 0$, i.e. $n.K_S \equiv 0$.

Du théorème de Castelnuovo, du lemme 10 et du corollaire 12 résulte le :

Théorème 13 (Enriques)

Une surface S est réglée si et seulement si $P_n = 0$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque 14

Une étude plus approfondie des surfaces du type $(C \times F)/G$ donne la condition d'Enriques : S est réglée si et seulement si $P_{12} = 0$.

Les surfaces du type $S = (E \times F)/G$, où E et F sont elliptiques et $p_g = 0$, sont appelées surfaces bielliptiques (ou parfois hyperelliptiques, mais cette terminologie prête à confusion). On peut en donner une classification complète.

§5. Dimension de Kodaira

Les résultats qui précèdent montrent l'importance des P_n dans la classification des surfaces. Ils conduisent à poser la :

Définition 15

Soit S une surface; pour $n \geqslant 0$, notons φ_{nK} l'application rationnelle de S dans un espace projectif (éventuellement vide) définie par le système $|nK|$. La "dimension de Kodaira" de S, notée $\kappa(S)$ (ou simplement κ) est la plus grande dimension des images des φ_{nK} pour $n \geqslant 0$.

(On convient de poser $\dim(\emptyset) = -1$).

Explicitons la définition :

- $\kappa(S) = -1 \Leftrightarrow P_n = 0$ pour tout $n \Leftrightarrow S$ réglée (par le théorème d'Enriques).
- $\kappa(S) = 0 \Leftrightarrow P_n = 0$ ou 1, et il existe N tel que $P_N = 1$.
- $\kappa(S) = 1 \Leftrightarrow$ Il existe N tel que $P_N \geqslant 2$; et pour tout n, l'image de φ_{nK} est au plus une courbe.
- $\kappa(S) = 2 \Leftrightarrow$ Il existe N tel que l'image de φ_{NK} soit une surface.

Une définition analogue peut être donnée pour les courbes; on voit aussitôt que $\kappa(\mathbb{P}^1) = -1$, $\kappa(C) = 0$ si et seulement si C est elliptique, et $\kappa(C) = 1$ si et seulement si $g(C) \geqslant 2$.

Exemple 16

1/ $S = C \times C'$. On vérifie immédiatement que :
   - si C ou $C' = \mathbb{P}^1$, $\kappa(S) = -1$;
   - si C et C' sont elliptiques, $\kappa(S) = 0$;
   - si C est elliptique, et $g(C') \geqslant 2$, $\kappa(S) = 1$;
   - si $g(C)$ et $g(C') \geqslant 2$, $\kappa(S) = 2$.

2/ $S = V_{d_1,\dots,d_r}$ = intersection complète dans $\mathbb{P}^{r+2}$ de r hypersurfaces de degrés $d_1, \dots, d_r$.

Un calcul facile montre que $K_S \equiv (\sum d_i - r - 3)H$, où H est une section hyperplane de S . Il en résulte que :

$\kappa(S) = -1$ pour $S = V_2 , V_3 , V_{2,2}$

$\kappa(S) = 0$ (et en fait $K_S \equiv 0$) pour $S = V_4 , V_{2,3} , V_{2,2,2}$

$\kappa(S) = 2$ pour les autres.

3/ Toute surface telle que $n \cdot K \equiv 0$ pour un entier n , en particulier toute surface bielliptique (remarque 14) ou abélienne, a dimension de Kodaira zéro.

§6. Surfaces avec $\kappa = 0$.

Ce sont les surfaces avec $P_n = 0$ ou 1 pour tout n , et $P_n = 1$ pour au moins un n .

Lemme 17

Soit S *minimale avec* $\kappa = 0$.

a/ *On a* $K^2 \geqslant 0$

b/ *On a* $\chi(\mathcal{O}_S) \geqslant 0$

c/ *Si* $P_n = P_m = 1$, *et* $d = (n,m)$, *on a* $P_d = 1$.

Démonstration : a/ On a $K^2 \geqslant 0$ par le lemme 8 ; supposons $K^2 > 0$. On a par Riemann-Roch :

$$h^0(nK) + h^0((1-n)K) \to \infty \quad \text{quand} \quad n \to \infty \ .$$

Pour $n \geqslant 2$, le système $|(1-n)K)|$ ne peut contenir un diviseur E , sans quoi on aurait $(E.K) \geqslant 0$ (Lemme-clé) et donc $K^2 \leqslant 0$; on trouve donc que $P_n \longrightarrow \infty$ quand $n \to \infty$, ce qui contredit $\kappa = 0$.

b/ Comme $K^2 = 0$, la formule de Noether s'écrit :

$$12\, \chi(\mathcal{O}_S) = \chi_{top}(S) = 2 - 4q + b_2$$

soit : $8\chi(\mathcal{O}_S) = -2 - 4p_g + b_2 \geqslant -6$ (puisque $p_g \leq 1$)

d'où le résultat.

c/ Soient $D \in |nK|$, $E \in |mK|$; posons $m = m'd$, $n = n'd$. Comme $P_{\frac{nm}{d}} = 1$, on a $m'D = n'E \in |\frac{mn}{d} K|$, d'où $D = n'\Delta$, $E = m'\Delta$ pour un diviseur effectif Δ . Posons $\varepsilon = \Delta - dK$ dans Pic(S) ; on a $m'\varepsilon = n'\varepsilon = 0$, d'où $\varepsilon = 0$ puisque $(m',n') = 1$; donc $\Delta \in |dK|$ et $P_d = 1$.

Théorème 18

Soit S une surface minimale avec $\kappa = 0$. Une des 4 possibilités suivantes est réalisée :

1/ $p_g = 0$, $q = 0$. Alors $2K \equiv 0$. On dit que S est une "surface d'Enriques".

2/ $p_g = 0$, $q = 1$: S est une surface bielliptique (remarque 14)

3/ $p_g = 1$, $q = 0$. Alors $K \equiv 0$. On dit que S est une "surface K3".

4/ $p_g = 1$, $q = 2$. Alors S est une surface abélienne.

Démonstration : 1/ Si $p_g = 0$, $q = 0$, on a $P_2 \geqslant 1$ par le théorème de Castelnuovo, d'où par Riemann-Roch : $h^0(-2K) + h^0(3K) \geqslant 1$.

Comme $p_g = 0$, on doit avoir $P_3 = 0$ par le lemme 17. c/ , donc $h^0(-2K) \geqslant 1$; par suite $2K \equiv 0$.

2/ Les surfaces minimales avec $p_g = 0$, $q \geqslant 1$ ont été classifiées (§4); il résulte du corollaire 12 que celles qui vérifient $\kappa = 0$ sont les surfaces bielliptiques.

— Supposons maintenant $p_g = 1$. Par le lemme 17 b/ , on a $q = 0$, 1 ou 2 .

3/ Si $q = 0$, Riemann-Roch donne $h^0(-K) + h^0(2K) \geqslant 2$, d'où $h^0(-K) = 1$ et $K \equiv 0$.

3'/ Si $q = 1$, il existe un diviseur ε tel que $\varepsilon \not\equiv 0$ mais $2\varepsilon \equiv 0$. Appliquons-lui Riemann-Roch :

$$h^0(\varepsilon) + h^0(K-\varepsilon) \geqslant 1 \quad \text{d'où} \quad h^0(K-\varepsilon) \geqslant 1 .$$

Soit $D \in |K-\varepsilon|$, $K_0 \in |K|$; puisque $P_2 = 1$, on a $2D = 2K_0$ et donc $D = K_0$, ce qui contredit $\varepsilon \not\equiv 0$. Il existe donc pas de surface minimale avec $\kappa = 0$, $p_g = 1$, $q = 1$.

4/ Il reste à démontrer qu'une surface vérifiant $\kappa = 0$, $p_g = 1$, $q = 2$ est une surface abélienne. C'est l'objet de la proposition 20.

Lemme 19

Soient S *une surface,* B *une courbe lisse,* $p : S \to B$ *un morphisme surjectif à fibres connexes,* $C_1, \dots, C_r$ *les composantes irréductibles d'une fibre* F_b *de* p , $D = \sum n_i C_i$ $(n_i \in \mathbb{Z})$.

Alors $D^2 \leq 0$, *et* $D^2 = 0$ *si et seulement si* $D = r.F_b$ $(r \in \mathbb{Q})$.

Démonstration : Posons $F_b = \sum m_i C_i$, $m_i > 0$. On a :

$$D^2 = \sum_i n_i^2 C_i^2 + 2 \sum_{i<j} n_i n_j (C_i . C_j)$$

Eliminons les C_i^2 en utilisant le fait que $(F_b . C_i) = 0$:

$$D^2 = \sum_i n_i^2 (C_i \cdot \sum_{j \neq i} - \frac{m_j}{m_i} \cdot C_j) + 2 \sum_{i<j} n_i n_j (C_i . C_j)$$

$$= \sum_{i<j} (C_i.C_j)\left(- n_i^2 \frac{m_j}{m_i} - n_j^2 \frac{m_i}{m_j} + 2\, n_i\, n_j\right)$$

$$= - \sum_{i<j} (C_i.C_j)\, m_i\, m_j \left(\frac{n_i}{m_i} - \frac{n_j}{m_j}\right)^2 \leq 0$$

Comme $\cup C_i$ est connexe, on n'a égalité que si $\frac{n_i}{m_i} = \frac{n_j}{m_j}$ pour tout i,j, d'où le lemme.

<u>Proposition 20</u>

<u>Soit</u> S <u>une surface minimale avec</u> $\kappa = 0$, $p_g = 1$, $q = 2$. <u>Alors</u> S <u>est une surface abélienne</u>.

<u>Démonstration</u> : Notons $A = \mathrm{Alb}(S)$ et $\alpha : S \to A$ le morphisme d'Albanese. On distinguera quatre cas, suivant que $\alpha(S)$ est une courbe ou une surface, et K_S est trivial ou non.

1/ $K_S \neq 0$

Notons K le diviseur effectif de $|K_S|$. Ecrivons $K = \sum n_i C_i$; comme $K^2 = 0$ et $K.C_i \geq 0$ pour tout i , on a $K.C_i = 0$; par suite :
$0 = K.C_i = n_i C_i^2 + \sum_{j \neq i} n_j (C_i.C_j)$
donc ou bien $C_i^2 = -2$ et C_i est rationnelle lisse (car $K.C_i = 0$) , ou bien $C_i^2 = 0$, $C_i.C_j = 0$ pour tout $j \neq i$.
On conclut que si l'on écrit $K = \sum_\alpha D_\alpha$, où les D_α sont des diviseurs effectifs à supports connexes et disjoints, on a $D_\alpha^2 = 0$ pour tout α et :

- ou bien D_α est une courbe irréductible de genre 1 (i.e. une courbe elliptique lisse ou une courbe rationnelle avec un point double)
- ou bien D_α est réunion de courbes rationnelles lisses.

1 a/ $K \neq 0$ et $\alpha(S)$ est une courbe.