CIME Summer Schools

28

G. Agostinelli (Ed.)

Magnetofluidodinamica

Varenna, Italy 1962

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

G. Agostinelli (Ed.)

Magnetofluidodinamica

Lectures given at the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Varenna (Como), Italy,
September 28-October 6, 1962

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10997-3 e-ISBN: 978-3-642-10999-7
DOI:10.1007/978-3-642-10999-7
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma, 1962
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNATIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E)

Reprint of the 1st ed.- Varenna, Italy, September 28-October 6, 1962

MAGNETOFLUIDODINAMICA

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTI

(C. I. M. E.)

C. AGOSTINELLI

PROBLEMI SPECIALI DI MAGNETOFLUIDODIN

ROMA - Istituto Matematico dell'Univers:

PROBLEMI SPECIALI DI MAGNETOFLUIDODINAMICA

C. Agostinelli

SULL'EQUILIBRIO ADIABATICO MAGNETODINAMICO DI MASSE FLUIDE GASSOSE ELETTRICAMENTE CONDUTTRICI UNIFORMEMENTE ROTANTI E GRAVITANTI.

1. INTRODUZIONE. In questa lezione ci occuperemo dell'equilibrio adiabatico di una massa gassosa di grande conducibilità elettrica, tale da poter la ritenere infinita, uniformemente rotante intorno ad un suo asse baricentrale, soggetta alla mutua attrazione newtoniana delle particelle fluide, e nell'ipotesi che per effetto delle correnti di conduzione si generi in essa un campo magnetico.

La questione ha ovviamente interesse per lo studio dell equilibrio delle masse gassose stellari ad elevatissima temperatura, e quindi di alta conduttività elettrica, rotanti e gravitanti. Ma la sua considerazione può essere utile non solo in problemi di astrofisica ma anche in tutte quelle applicazioni in cui si ha da trattare con masse fluide rotanti, elettricamente conduttrici, sotto l'azione di campi magnetici.

Nelle ipotesi ammesse vedremo come il campo e gli elementi del moto devono essere necessariamente simmetrici rispetto all'asse di rotazione e che la questione si riduce all'integrazione di due equazioni differenziali alle derivate parziali in cui sono incognite quella che si può chiamare la funzione del campo e la densità del fluido.

Nel caso particolare in cui è nulla la componente trasversa del campo magnetico, da quelle equazioni si può eliminare la funzione del campo riducendo la questione alla risoluzione di un'equazione alle derivate parziali del 4^o ordine in cui è incognita la sola densità.

Supponendo infine che si tratti di un plasma soggetto a intensi campi magnetici, in cui le forze di mutua attrazione newtoniana sono trascurabili in confronto delle azioni elettromagnetiche, la questione si riduce all'integrazione di un'equazione differenziale del 2° ordine in cui è ancora incognita la sola densità.

2. EQUAZIONI DEL MOTO E DEL CAMPO.

Ciò premesso, ricordiamo che le equazioni del moto di una massa gassosa elettricamente conduttrice, in cui si generi un campo magnetico, nell'ipotesi che la viscosità sia trascurabile, in forma euleriana sono

$$(1) \qquad \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mathrm{rot}\, \vec{v} \wedge \vec{v} + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\, v^2\right) = \vec{I} \wedge \vec{B} - \mathrm{grad}\, p + \rho\, \mathrm{grad}\, U$$

$$(2) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \vec{v}) = 0,$$

la seconda delle quali è l'equazione di continuità, e dove $\vec{v}$ è il vettore velocità delle particelle fluide, ρ la densità, p la pressione, U il potenziale delle forze newtoniane di mutua attrazione, $\vec{I}$ la corrente di conduzione e $\vec{B}$ il vettore induzione magnetica. Se supponiamo che il gas si evolva adiabaticamente avremo inoltre.

$$(3) \qquad p = C \rho^{\gamma}$$

con C costante e γ pure costante, uguale al rapporto tra il calore specifico a pressione costante e quello a volume costante.

Alle precedenti equazioni vanno associate quelle maxwelliane del campo che nell'ipotesi di conducibilità elettrica infinita, nella metrologia gaussiana razionalizzata si scrivono

(4) $$\text{rot}\ \vec{B} = \vec{I}$$

(5) $$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}\,(\vec{B} \wedge \vec{v}) = 0$$

(6) $$\text{div}\ \vec{B} = 0$$

Trattandosi di una massa fluida uniformemente rotante con velocità angolare costante $\vec{\omega}$, intorno ad un asse baricentrale Oz, in equilibrio relativo magnetico dinamico, gli elementi del moto e del campo saranno indipendenti dal tempo, la velocità $\vec{v}$ di una particella fluida P sarà data da

(7) $$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

e le equazioni (1) e (2) si ridurranno alle seguenti

(8) $$\text{grad}\ p = \text{rot}\ \vec{B} \wedge \vec{B} + \frac{1}{2}\,\omega^2 \rho\ \text{grad}\ r^2 + \rho\ \text{grad}\ U$$

(9) $$\text{grad}\ \rho \times \vec{k} \wedge (P - O) = 0$$

dove si è indicata con r la distanza di un punto P dall'asse z, e $\vec{k}$ è versore di quest'asse.

Con riferimento a coordinate cilindriche r, φ, z la (9) equivale alla

(9') $$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0\ .$$

Perciò la densità ρ, e quindi anche la pressione p, saranno funzioni di r, z soltanto.

Le equazioni (5) e (6) diventano ora

(10) $$\text{rot}\,(\vec{B} \wedge \vec{v}) = 0,$$ (11) $$\text{div}\ \vec{B} = 0$$

dalle quali, se indichiamo con B_r, B_φ, B_z le componenti cilindriche del campo magnetico, si deduce che sarà anche

$$\frac{\partial B_r}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} = 0 .$$

Queste relazioni mostrano che il campo è simmetrico rispetto all'asse z. La (11) diventa allora

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{11'}$$

e da questa segue che esisterà una funzione $V(r,z)$ per cui si può porre

$$B_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} \tag{12}$$

Avremo perciò

$$\vec{B} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{grad}\, r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{grad}\, z + rH_\varphi\ \mathrm{grad}\varphi = \tag{13}$$

$$= \mathrm{grad}\, V \wedge \mathrm{grad}\varphi + rB_\varphi \cdot \mathrm{grad}\varphi$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\,\mathrm{grad} r - \nabla_2 V\,\mathrm{grad}\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\,\mathrm{grad} z \tag{14}$$

dove per semplicità si è posto

$$\nabla_2 V = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{15}$$

essendo ∇_2 l'operatore differenziale del 2° ordine associato al Δ_2 di Laplace, nel caso della simmetria assiale.

3. CONDIZIONI DI INTEGRABILITA' E RIDUZIONE DELLA QUESTIONE.

Ciò premesso, consideriamo le condizioni di integrabilità della (8). Prendendo per questo il rotore di ambo i membri si ha

$$(16)\qquad \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{B} \wedge \vec{B}) + \frac{1}{2}\,\omega^2\,\mathrm{grad}\,\rho \wedge \mathrm{grad}\,r^2 + \mathrm{grad}\,\rho \wedge \mathrm{grad}\,U = 0,$$

Da questa, essendo anche $U = U(r,z)$, si deduce

$$(17)\qquad \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{B} \wedge \vec{B}) \times \mathrm{grad}\,r = 0, \qquad \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{B} \wedge \vec{B}) \times \mathrm{grad}\,z = 0.$$

Indicando inoltre con $\vec{a}_\varphi = r\,\mathrm{grad}\,\varphi$ il versore secondo cui cresce l'anomalia φ, si ha

$$(18)\qquad \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{B} \wedge \vec{B}) \times \vec{a}_\varphi + \omega^2 r \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial \rho}{\partial r}\frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Ora, dalle (13) e (14) si ricava

$$(19)\qquad \mathrm{rot}\,\vec{B} \wedge \vec{B} = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\nabla_2 V}{r^2} + \frac{B_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi)\right]\mathrm{grad}\,r + $$
$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}\right]\mathrm{grad}\,\varphi - \left[\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\nabla_2 V}{r^2} + B_\varphi\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right]\mathrm{grad}\,z$$

e quindi le equazioni (17) diventano

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}\right]\right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}\right]\right\} = 0$$

da cui segue l'integrale

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial z}-\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}\right] = \text{cost.} \tag{20}$$

Ma dalla (8), moltiplicando ambo i membri scalarmente per $\vec{a}_\varphi$ si ottiene

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}\wedge\vec{B}\times\vec{a}_\varphi \equiv \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial z}-\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}\right] = 0$$

perciò la costante del secondo membro della (20) deve essere nulla e quindi

$$\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial z}-\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} = 0\,. \tag{20'}$$

Questa mostra che rB_φ sarà funzione di V. Il modo più semplice di soddisfarla si ha ponendo

$$rB_\varphi = kV \tag{21}$$

con k costante. Così facendo la (19) porge

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}\wedge\vec{B} = -\frac{1}{r^2}(\nabla_2 V + k^2 V)\,\mathrm{grad}V.$$

Sostituendo nella (8), dividendo quindi per ρ e tenendo conto della (3), si ottiene

$$\mathrm{grad}\left[\frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}-\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - U\right]+\frac{1}{r^2\rho}(\nabla_2 V + k^2 V)\,\mathrm{grad}V = 0 \tag{22}$$

Rimane da considerare l'equazione (18), che esplicitata tenendo conto della (21), dopo facili semplificazioni si riduca alla seguente

$$(23)\quad \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial \nabla_2 V}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial \nabla_2 V}{\partial z}\right) - \frac{2}{r^3}\frac{\partial V}{\partial z}(\nabla_2 V + k^2 V) +$$

$$+ \omega^2 r \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial \rho}{\partial r}\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

Osserviamo ora che dalla (8), moltiplicando scalarmente per $\vec{B}$ si deduce

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} - \omega^2 r\rho - \rho\frac{\partial U}{\partial r}\right)B_r + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho\frac{\partial U}{\partial z}\right)B_z = 0,$$

cioè, per le (12)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho\frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial r} - \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \omega^2 r\rho - \rho\frac{\partial U}{\partial r}\right)\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Esisterà quindi un fattore integrante λ (r, z,), per cui

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \lambda\left(\frac{\partial p}{\partial r} - \omega^2 r\rho - \rho\frac{\partial U}{\partial r}\right), \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \lambda\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

Poichè per la (3) la pressione p è funzione della densità ρ, prendendo $\lambda = h/\rho$, con h costante arbitraria e tenendo conto della stessa (3), si riconosce subito che le equazioni precedenti sono integrabili e si ottiene, a meno di una costante inessenziale,

$$(24)\qquad V = h\left(\frac{C\gamma}{\gamma - 1}\rho^{\gamma-1} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - U\right).$$

Eliminando quindi dalla (23) il potenziale U, servendosi della (24), si ha

$$(23')\quad \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial \nabla_2 V}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial \nabla_2 V}{\partial z}\right) - \frac{2}{r^3}\frac{\partial V}{\partial z}(\nabla_2 V + k^2 V) + \frac{1}{h}\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial z} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

Questa è identicamente soddisfatta prendendo

$$\nabla_2 V + k^2 V = -\frac{1}{h} r^2 \rho \tag{25}$$

e allora la (22) diventa

$$\operatorname{grad}\left(\frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - U - \frac{1}{h} V\right) = 0$$

che porge l'integrale

$$\frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - U - \frac{1}{h} V = \text{cost.}$$

Ma volendo eliminare il potenziale U delle forze di mutua attrazione newtoniana prendiamo il laplaciano di ambo i membri. Tenendo conto dell'equazione di Poisson $\Delta_2 U = -4\pi f \rho$, essendo f la costante di attrazione universale, si ottiene

$$\Delta_2 V = h\left(\frac{C\gamma}{\gamma-1}\Delta_2 \rho^{\gamma-1} + 4\pi f \rho - 2\omega^2\right) \tag{26}$$

La questione è così ridotta a determinare la funzione V del campo magnetico e la densità ρ soddisfacenti alle equazioni differenziali (25) e (26) e ad assegnate condizioni ai limiti. Dopo ciò la (12) e la (21) forniscono le componenti del campo magnetico e la (13) dà la pressione p. Ponendo

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\nu}, \qquad \rho = u^{\nu} \tag{27}$$

le equazioni (25) e (26) si possono scrivere anche

$$\Delta_2 V + k^2 V = -\frac{1}{h} r^2 u^{\nu} \tag{25'}$$

(26') $$\Delta_2 V = h \left[C(\nu + 1) \; \Delta_2 u + 4\pi f u^{\nu} - 2\omega^2 \right]$$

e si può dimostrare che ci si può ridurre alla determinazione della sola incognita u.

Nel caso particolare in cui si pone $k = 0$, e quindi, per la (21), $B_{\varphi} = 0$, la (25') diventa

(28) $$\Delta_2 V = -\frac{1}{h} r^2 u^{\nu}$$

e tenendo conto dell'identità

$$\Delta_2 (\Delta_2 V - \nabla_2 V) - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\nabla_2 V) = 0$$

ci si riduce all'equazione differenziale alle derivate parziali del 4° ordine

(29) $$\Delta_2 \left[\Delta_2 u + (\alpha^2 + \beta^2 r^2) u^{\nu} \right] + \frac{2\beta^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u^{\nu}) = 0$$

in cui è incognita la sola funzione u, e nella quale si è posto

(30) $$\alpha^2 = \frac{4\pi f}{C(\nu + 1)} \quad , \quad \beta^2 = \frac{1}{h^2 C(\nu + 1)}$$

Le equazioni ottenute, associate alle condizioni che al contorno sia nulla la densità, sono utili per lo studio dell'equilibrio adiabatico di una massa gassosa stellare in cui per l'alta conducibilità elettrica si generano delle correnti di conduzione e quindi dei campi magnetici. Sotto questo punto di vista esse sono state da me applicate al caso di una massa gassosa sferoidale, uniformemente rotante e gravitante, nell'ipotesi di un campo magnetico sufficientemente debole e con la condizione che la densità si annulli in superficie.

Se supponiamo invece che si tratti di un plasma soggetto a intensi campi magnetici, in cui le forze di mutua attrazione sono trascurabili in confronto delle azioni elettromagnetiche, ponendo $U = 0$, l'equazione (23') risulta ancora soddisfatta mediante la posizione (25), che per le (27) assume la forma (25'). Inoltre la (24) si riduce alla

$$V = h \left[C(\nu + 1) u - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right] \tag{31}$$

Sostituendo nella (25') si ha

$$\nabla_2 u + k^2 u + \beta^2 r^2 u^\nu = \frac{\omega^2 k^2}{2C(\nu + 1)} r^2 \tag{32}$$

che è l'equazione differenziale alla quale deve soddisfare la funzione $u = \rho^{\frac{1}{\nu}}$ nel caso considerato.

Se più semplicemente si pone $k = 0$, cioè $B_\varphi = 0$, la (32) diventa

$$\nabla_2 u + \beta^2 r^2 u^\nu = 0 \tag{33}$$

che si può considerare una generalizzazione dell'equazione di Emden.

Determinata la u, la (31) fornisce senz'altro la funzione V del campo, la quale, nel caso dell'equilibrio statico ($\omega = 0$), risulta proporzionale alla u.

4. CASO IN CUI IL CAMPO MAGNETICO E' TUTTO TRASVERSALE.

Se supponiamo che il campo magnetico sia completamente trasversale, tale cioè che

$$B_r = B_z = 0, \qquad B_\varphi \neq 0$$

abbiamo

$$\vec{B} = r\, B_\varphi \ \operatorname{grad}\varphi \ , \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{grad}(r\, B_\varphi) \wedge \operatorname{grad}\varphi$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} \wedge \vec{B} = -\frac{B_\varphi}{r}\operatorname{grad}(r\, B_\varphi)$$

e per le equazioni (3), (8) otteniamo

$$(34) \qquad \operatorname{grad}\left(\frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - U - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right) + \frac{B_\varphi}{r\rho}\operatorname{grad}(r\, B_\varphi) = 0.$$

Da questa, prendendo il rotore di ambo i membri, si deduce

$$\operatorname{grad}\frac{r\, B_\varphi}{r^2\rho} \wedge \operatorname{grad}(r\, B_\varphi) = 0$$

cioè

$$\operatorname{grad}(r^2\rho) \wedge \operatorname{grad}(r\, B_\varphi) = 0$$

Questa mostra che $r\, B_\varphi$ è funzione di $r^2\rho$. Il caso più semplice è quello in cui si assume

$$(35) \qquad r\, B_\varphi = \lambda_0 r^2 \rho\ , \qquad B_\varphi = \lambda_0 r \rho$$

con λ_0 costante. In tal caso la relazione (34) diventa

$$(36) \qquad \operatorname{grad}\left(\frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - U - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \lambda_0^2 r^2 \rho\right) = 0$$

da cui si ha l'integrale

$$(37) \qquad \frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - U - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \lambda_0^2 r^2 \rho = \text{cost.}$$

Prendendo la divergenza di ambo i membri della (36), e considerando l'equazione di Poisson, otteniamo

$$\Delta_2 \left[C(\nu+1)u + \lambda_0^2 r^2 u^\nu - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \right] + 6\pi f u^\nu = 0 \tag{38}$$

in cui è incognita la sola funzione u. Quando questa funzione è determinata con assegnata condizione in superficie, abbiamo subito

$$B_\varphi = \lambda_0 r u^\nu \tag{39}$$

Se le forze non elettromagnetiche sono trascurabili o nulle ($U = 0$), la (37) definisce senz'altro la densità ρ, e si ha quindi $B_\varphi = \lambda_0 r \rho$.

MASSE FLUIDE IN ROTAZIONE NON UNIFORME

5. POSIZIONE DEL PROBLEMA E SIMMETRIA DEL CAMPO.

Poichè nel caso delle masse gassose stellari, come quella del sole, l'ipotesi della rotazione uniforme non rispecchia esattamente la realtà, ma, come mostrano le osservazioni, essa varia sia colla latitudine e sia con la distanza dall'asse, vogliamo ora indagare come nel caso della rotazione non uniforme si modificano le equazioni dell'equilibrio relativo di una massa gassosa nelle stesse condizioni considerate prima.

Supponendo che la velocità angolare di rotazione non dipenda dall'angolo di rotazione φ, si riconosce anche in questo caso come la distribuzione del campo magnetico, della densità e della pressione è necessariamente a simmetria assiale.

Invero, la velocità $\vec{v}$ delle particelle fluide è ora della forma

$$\vec{v} = r^2 \omega \operatorname{grad} \varphi \tag{40}$$

dove la velocità angolare $\vec{\omega}$ è da considerare funzione delle coordinate cilindriche r, z. Dalla (40) segue allora $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, e pertanto l'equazione di continuità, che si riduce alla $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$, porge

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0 ,$$

cioè la densità ρ, e quindi la pressione p, sono indipendenti dall'anomalia φ.

Dall'equazione (10) si ha inoltre che esiste una funzione Φ tale che

$$\vec{v} \wedge \vec{B} \equiv r^2 \omega \operatorname{grad} \varphi \wedge \vec{B} \equiv \operatorname{grad} \Phi \tag{41}$$

con Φ necessariamente indipendente da φ ($\operatorname{grad} \Phi \times \operatorname{grad} \varphi = 0$). Dalla (41) si ricava

$$r \omega B_z = \frac{\partial \Phi}{\partial r} , \qquad r \omega B_r = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{41'}$$

da cui segue che le componenti B_r, B_z del campo magnetico sono anche indipendenti dall'anomalia φ.

Osserviamo che dalla (41) si ha

$$\operatorname{grad} \Phi \times \vec{B} = 0 , \qquad \operatorname{grad} \Phi \times \vec{v} = 0$$

e quindi le linee di forza magnetica giacciono sulle superficie Φ = cost, e queste sono anche le superficie fluide.

Eliminando la funzione Φ dalle (41') si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \omega B_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r \omega B_z) = 0 \tag{42}$$

mentre dall'equazione div $\vec{B} = 0$, si ha

$$(43)\qquad \frac{\partial}{\partial r}(r\,B_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\,B_z) + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

Moltiplicando ambo i membri della (43) per ω, e sottraendo quindi dalla (42), si ha ancora

$$(44)\qquad r\,B_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + r\,B_z \frac{\partial \omega}{\partial z} - \omega \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

Ma ω, B_r, B_z, sono indipendenti da φ, perciò anche la componente B_φ, che dovrà essere una funzione uniforme, sarà indipendente da φ.

6. RISOLUZIONE DEL PROBLEMA.

Le equazioni (43) e (44) si riducono ora alle seguenti

$$(43')\qquad \frac{\partial}{\partial r}(r\,B_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\,B_z) = 0$$

$$(44')\qquad r\,B_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + r\,B_z \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

Dalla (43') si ha, anche qui, che dovrà esistere una funzione $V(r, z)$ tale che

$$(45)\qquad B_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}\,, \qquad B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

e pertanto la (44') diventa

$$\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$$

la quale mostra che la velocità angolare ω sarà funzione di V,

$$\omega = \omega(V) \tag{46}$$

In base ai risultati ottenuti si ha

$$\vec{B} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{grad}\, r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{grad}\, z + r\,B_\varphi\;\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = -\nabla_2 V\,\mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{grad}\,(r\,B_\varphi)\wedge\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}\wedge\vec{B} = -\frac{\nabla_2 V}{r^2}\,\mathrm{grad}\,V - \frac{1}{2r^2}\,\mathrm{grad}\,(r\,B_\varphi)^2 - \tag{47}$$

$$-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\,B_\varphi)}{\partial r}\cdot\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial(r\,B_\varphi)}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial r}\right]\mathrm{grad}\,\varphi$$

dove $\nabla_2 V$ ha l'espressione (15).

Ora l'equazione del moto assume ancora la forma (8). Sostituendo in questa la (47), ed osservando che p ed U sono indipendenti dall'anomalia φ, si deduce che deve essere

$$\frac{\partial(r\,B_\varphi)}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial(r\,B_\varphi)}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

e quindi $r\,B_\varphi$, così come ω, sarà funzione di V:

$$r\,B_\varphi = F(V) \tag{48}$$

Dividendo allora per ρ ambo i membri della (8), e tenendo conto della (3), si ottiene

$$\mathrm{grad}\left(\frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - U\right) = -\frac{1}{r^2\rho}\left(\nabla_2 V + \frac{1}{2}\frac{dF^2}{dV}\right)\mathrm{grad}\,V + r\,\omega^2\,\mathrm{grad}\,r \tag{49}$$

Essendo ω funzione di V si puó scrivere anche

$$(49') \quad \operatorname{grad}\left(\frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - U - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right) = -\left[\frac{1}{r^2\rho}\left(\nabla_2 V + \frac{1}{2}\frac{dF^2}{dV}\right) + \frac{1}{2}r^2\frac{d\omega^2}{dV}\right]\operatorname{grad} V$$

e questa è integrabile se la quantità fra parentesi quadra è una funzione di V, che indichiamo con dG/dV, cioè

$$(50) \qquad \frac{1}{r^2\rho}\left(\nabla_2 V + \frac{1}{2}\frac{dF^2}{dV}\right) + \frac{1}{2}r^2\frac{d\omega^2}{dV} = \frac{dG}{dV}$$

In questo caso dalla (49') si ottiene l'integrale

$$(51) \qquad \frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - U - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + G(V) = \text{cost.}$$

Se U è il potenziale delle forze di mutua attrazione newtoniana delle particelle fluide, applicando il Δ_2 di Laplace ad ambo i membri della (51) e ricordando l'equazione di Poisson, si ha

$$(52) \qquad \Delta_2\left[\frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + G(V)\right] + 4\pi f\rho = 0$$

Fissate opportunamente le funzioni $\omega(V)$, $F(V)$, $G(V)$, le (50) e (52) risulteranno due equazioni differenziali alle derivate parziali del 2^o ordine in cui sono incognite la funzione V del campo magnetico e la densità ρ.

Nel caso particolarmente importante in cui ω ed rH si suppongono funzioni lineari di V, e così pure la $G(V)$, ponendo

$$\omega = \omega_0\,(1 + \alpha_0 V)$$

$$F \equiv r B_\varphi = kV, \quad G = \beta_0 V$$

con ω_0, α_0, k, β_0, costanti, la (50) e la (52) diventano

$$(53) \qquad \nabla_2 V + k^2 V + r^2 \rho \left[\omega_0^2 \alpha_0 r^2 (1 + \alpha_0 V) - \beta_0 \right] = 0$$

$$(54) \qquad \Delta_2 \left[\frac{C\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma - 1} - \frac{1}{2} \omega_0^2 r^2 (1 + \alpha_0 V)^2 + \beta_0 V \right] + 4\pi f \rho = 0$$

le quali, per $\alpha_0 = 0$, cioè per $\omega = \omega_0$ (rotazione uniforme) e scrivendo $-\frac{1}{h}$ al posto di β_0, si riducono alle equazioni (25) e (26) ottenute precedentemente.

7. CASO IN CUI IL CAMPO MAGNETICO E' DIRETTO TRASVERSALMENTE.

Consideriamo ora il caso in cui il campo magnetico è diretto trasversalmente rispetto all'asse di rotazione, sia cioè $B_r = B_z = 0$, e quindi

$$(55) \qquad \vec{B} = rB_\varphi \ \mathrm{grad}\, \varphi \ .$$

Segue

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mathrm{grad}\,(rB_\varphi) \wedge \mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} \wedge \vec{B} = -\frac{1}{2r^2}\, \mathrm{grad}\,(rB_\varphi)^2$$

e l'equazione del moto porge

$$(56) \qquad \mathrm{grad}\left(\frac{C\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma - 1} - U\right) = -\frac{1}{2r^2 \rho}\, \mathrm{grad}(rB_\varphi)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \, \mathrm{grad} r^2$$

dalla quale seguono le due equazioni scalari

$$(57) \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{C\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma - 1} - U\right) = -\frac{1}{2r^2 \rho} \frac{\partial (rB_\varphi)^2}{\partial r} + r\omega^2$$

$$(57) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - U\right) = -\frac{1}{2r^2\rho}\frac{\partial(rB_\varphi)^2}{\partial z}$$

Per l'integrabilità di questa equazione deve essere verificata la condizione

$$(58) \qquad \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2\rho}\right)\cdot\frac{\partial(rB_\varphi)^2}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^2\rho}\right)\frac{\partial(rB_\varphi)^2}{\partial r}\right\} + r\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = 0$$

Nel caso in cui ω è funzione di r soltanto, oppure costante, questa condizione richiede che rB_φ sia una funzione di $r^2\rho$.

Per ω non costante porremo

$$(59) \qquad rB_\varphi = F(r^2\rho)\cdot g(r) + h(r).$$

con F funzione per ora arbitraria di $r^2\rho$, e g, h funzioni pure arbitrarie della sola r. Sostituendo nella (58) si ha

$$(60) \qquad \frac{1}{2(r^2\rho)^2}\frac{\partial(r^2\rho)}{\partial z}\left[F^2\frac{dg^2}{dr} + 2F\frac{d(gh)}{dr} + \frac{dh^2}{dr}\right] + r\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = 0$$

Se per semplicità si pone

$$(61) \qquad \Phi(r^2\rho) = \int_0^{r^2\rho} F^2(\xi)\frac{d\xi}{\xi^2}, \quad \Psi(r^2\rho) = \int_0^{r^2\rho} F(\xi)\frac{d\xi}{\xi^2}$$

la (60) si può scrivere

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\Phi\frac{dg^2}{dr} + 2\Psi\frac{d(gh)}{dr} - \frac{1}{r^2\rho}\frac{dh^2}{dr}\right] + r\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = 0$$

da cui si ricava

$$(62) \qquad \omega^2 = \chi(r) - \frac{1}{2r}\left[\Phi\frac{dg^2}{dr} + 2\Psi\frac{d(gh)}{dr} - \frac{1}{r^2\rho}\frac{dh^2}{dr}\right]$$

essendo $\chi(r)$ un'altra funzione arbitraria di r.

Sostituendo nelle (57) in luogo di rB_φ e di ω^2, rispettivamente i valori espressi dalle (59) e (62), e ponendo ancora

$$(63) \qquad M(r^2\rho) = \frac{F^2}{r^2\rho} + \Phi , \qquad N(r^2\rho) = \frac{F}{r^2\rho} + \Psi ,$$

esse diventano

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - U + \frac{1}{2}(Mg^2 + 2Ngh) - \int_0^r r\,\chi(r)\,dr\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - U + \frac{1}{2}(Mg^2 + 2Ngh)\right] = 0$$

dalle quali segue l'integrale

$$(64) \qquad \frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - U + \frac{1}{8}(Mg^2 + 2Ngh) - \int_0^r r\,\chi(r)\,dr = \text{cost.}$$

Prendendo al solito il Δ_2 di Laplace di ambo i membri si può eliminare il potenziale U e ridursi a un'equazione in cui è incognita la sola densità ρ ; cioè

$$(65) \qquad \Delta_2\left[\frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} + \frac{1}{2}(Mg^2 + 2Ngh) - \int_0^r r\,\chi(r)\,dr\right] + 4\pi f\rho = 0$$

Se in particolare poniamo

$$h = 0, \qquad F = r^2\rho$$

si ha

$$(66) \qquad rB_\varphi = r^2\rho\, g(r), \qquad \omega^2 = \chi(r) - r\rho\, g\, g'$$

e l'equazione (65) in ρ diventa

$$\Delta_2 \left[\frac{C\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma - 1} + r^2 \rho\, g^2 - \int_0^r r\, \chi(r)\, dr \right] + 4\pi f \rho = 0$$

che al solito si può trasformare ponendo $\gamma = 1 + 1/\nu$, e $\rho = u^{\nu}$.

Se più in particolare si pone $g = k$ (costante), ci si riduce al caso in cui la velocità angolare ω è funzione soltanto di r, o addirittura è costante, se anche χ si pone eguale a costante.

C. Agostinelli

SULLA STABILITA' DEI MOTI MAGNETOFLUIDODINAMICI STAZIONARI

1. Il problema della stabilità in magnetofluidodinamica, che inizialmente attirò l'attenzione dei fisici nucleari in relazione alla questione del contenimento del plasma ad alta temperatura negli apparecchi termonucleari, successivamente, per la sua importanza anche nelle applicazioni alla dinamica cosmica e a quella stellare, è stato oggetto di numerose ricerche specialmente da parte di Chandrasekhar[1)] e dei suoi allievi, che hanno studiato la stabilità di vari casi di equilibrio. Più recentemente, in una memoria scritta in collaborazione da J.B. Bernstein, E.A. Friman, M.A. Kruskal, R. M. Kulsrud[2)] è stata effettuata una indagine molto estesa della stabilità statica di un plasma altamente conduttore e completamente ionizzato, applicando il principio di energia secondo l'idea originaria di Lord Rayleigh[3)], principio che era già stato utilizzato da Lundquist[4)].

Noi in questa lezione ci occuperemo dell'estensione di questo principio al caso della stabilità di un generico moto magnetofluidodinamico, considerando un fluido barotropico di alta conduttività elettrica il quale si muove in un campo limitato da una parete rigida perfettamente conduttrice.

Supposto di conoscere un moto permanente del fluido, soddisfacente alle dovute condizioni in superficie, considereremo un moto perturbato, assumendo come incognita lo spostamento $\vec{\xi}$ che riceve una particella fluida rispetto alla simultanea posizione che occuperebbe se il moto non fosse perturbato, spostamento che deve soddisfare alla condizione di essere tangente in superficie.

Considerando d'altra parte il movimento generale dal punto di vista lagrangiano, determineremo la densità e la pressione in funzione delle analoghe quantità che si hanno nel moto permanente e dello spostamento $\vec{\xi}$, qualunque sia la grandezza di questo spostamento. Stabiliremo quindi un'equazione differenziale per il campo magnetico analoga all'equazione di Helmholtz per i vortici. L'integrale di detta equazione, che è conforme all'equazione di Cauchy dell'idrodinamica, fornisce l'intensità del campo magnetico in funzione dei dati iniziali e quindi in funzione del corrispondente campo magnetico che si ha nel moto permanente e dello spostamento $\vec{\xi}$.

Supponendo poi che detto spostamento $\vec{\xi}$ sia infinitesimo e tale da poter trascurare i termini di ordine superiore al primo rispetto ad esso e sue derivate, dedurremo l'equazione differenziale delle piccole oscillazioni e quindi un'equazione di secondo grado completa nella pulsazione Ω. Osservando che l'esistenza di uno spostamento che rende immaginaria la frequenza di oscillazione, o la pulsazione, dà luogo ad instabilità, stabiliremo una diseguaglianza che consente di ricavare un limite di instabilità per quelle oscillazioni.

Quella diseguaglianza esprime una generalizzazione del principio di energia che si ha nel caso statico, al quale si riduce quando il moto permanente si annulla. Dimostreremo ancora che i valori estremi della pulsazione Ω appartengono all'insieme degli autovalori di essa. Se perciò Ω ammette un massimo o un minimo, ciascuno di questi valori può servire per stabilire un limite di instabilità per le frequenze di oscillazione.

Considereremo infine il caso dei motirotatori uniformi intorno ad un asse, che hanno particolare importanza nella dinamica stellare, nel quale caso, come si sa dovrà sussistere la simmetria assiale[5]. In questo caso la relazione di instabilità potrà consentire di studiare nei vari casi l'influenza delle azioni centrifughe.

2. Con riferimento ad un fluido di alta conduttività elettrica, come un plasma completamente ionizzato, costituito di elettroni e di ioni positivi, le equazioni macroscopiche che ne reggono.il movimento, scritte nelle unità gaussiane razionalizzate sono, come sappiamo

$$(1) \qquad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \operatorname{grad} p + \vec{J} \wedge \vec{B} - \rho \operatorname{grad} \Phi$$

$$(2) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

$$(3) \qquad p \rho^{-\gamma} = \text{cost.}$$

$$(4) \qquad \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0$$

$$(5) \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(6) \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{J}$$

$$(7) \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

dove Φ rappresenta l'energia potenziale esterna riferita all'unità di massa.

Nel caso dei moti stazionari, indicando con P la particella fluida, queste equazioni si riducono alle seguenti:

$$(8) \qquad \rho \frac{d\vec{v}}{dP} \vec{v} = - \operatorname{grad} p + \operatorname{rot} \vec{B} \wedge \vec{B} - \rho \operatorname{grad} \Phi$$

$$(9) \qquad \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

(10) $$\rho p^{-\gamma} = \text{cost.}$$

(11) $$\text{rot}\,(\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$$

(12) $$\text{div}\,\vec{B} = 0$$

Supposta nota una soluzione di queste equazioni, con assegnate condizioni ai limiti, corrispondente a un dato moto magnetofluidodinamico stazionario, consideriamo un moto perturbato nell'intorno di esso e contrassegnamo con un apice gli elementi del campo e del moto in questo moto perturbato.

Essendo P_0 la posizione della particella fluida all'istante iniziale, P quella all'istante t nel moto stazionario considerato, e P' la simultanea posizione della stessa particella nel moto perturbato, poniamo

(13) $$P' = P + \vec{\xi}$$

dove $\vec{\xi}$ è uno spostamento, funzione di P e di t, che va ritenuto infinitesimo.

Si ricava allora per la velocità $\vec{v}'$ del punto P' il valore

(14) $$\vec{v}' = \vec{v} + \frac{d\vec{\xi}}{dt} = \vec{v} + \frac{d\vec{\xi}}{dP}\,\vec{v} + \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t} .$$

Osserviamo ora che se si considera il moto dal punto di vista lagrangiano e quindi si suppone la posizione P funzione della posizione iniziale P_0, e così pure P' funzione di P_0, introducendo le omografie vettoriali

(15) $$\alpha = \frac{dP}{dP_0}, \qquad \alpha' = \frac{dP'}{dP_0}, \qquad \beta = \frac{dP'}{dP} = 1 + \frac{d\vec{\xi}}{dP}$$

si ha

$$\alpha' = \frac{dP'}{dP}\ \frac{dP}{dP_0} = \beta\alpha \ . \tag{16}$$

Essendo allora $I_3\ \alpha'$ l'invariante terzo dell'omografia α' (o se si vuole lo jacobiano delle coordinate x', y', z' di P' rispetto alle coordinate x_0, y_0, z_0 di P_0), dall'equazione lagrangiana di continuità nel moto stazionario e nel moto perturbato, si ha

$$\rho = \rho_0/I_3\alpha \quad , \qquad \rho' = \rho_0/I_3\alpha' \ .$$

Ma $I_3\ \alpha' = I_3\alpha \cdot I_3\beta$, ne segue

$$\rho' = \rho\ /\ I_3\beta = \rho\ /\ I_3\,(1 + \frac{d\vec{\xi}}{dP}) \tag{17}$$

La pressione p' in virtù della (4) sarà data da

$$p' = C\ \rho'^{\gamma} = C\ \rho^{\gamma}\ /\ (I_3\beta)^{\gamma} = p\ /\ (I_3\beta)^{\gamma} \tag{18}$$

dove C è una costante.

In quanto all'intensità $\vec{B}'$ del campo magnetico, dalle equazioni (3) e (5) si ha

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} + \mathrm{rot}_{P'}\,(\vec{B}' \wedge \vec{v}') = 0$$

cioè, essendo $\mathrm{div}_{P'}\,\vec{B}' = 0$, si ha ancora

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} + (\mathrm{div}_{P'}\,\vec{v}' - \frac{d\vec{v}'}{dP'})\,\vec{B}' + \frac{d\vec{B}'}{dP'}\,\vec{v}' = 0$$

Ma

$$\mathrm{div}_{P'}\,\vec{v}' = -\frac{1}{\rho'}\,\frac{d\rho'}{dt} \quad ,$$