Ciro Ciliberto
Roberto Lucchetti
(a cura di)

Un mondo di idee

La matematica ovunque

*i*blu

Springer

i blu pagine di scienza

Ciro Ciliberto
Roberto Lucchetti
(*a cura di*)

Un mondo di idee

La matematica ovunque

Springer

Ciro Ciliberto
Dipartimento di Matematica
Università di Roma Tor Vergata

Roberto Lucchetti
Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano

Collana *i blu – pagine di scienza* ideata e curata da Marina Forlizzi

ISBN 978-88-470-1743-6 e-ISBN 978-88-470-1744-3
DOI 10.1007/978-88-470-1744-3

Coordinamento editoriale: Barbara Amorese
Impaginazione: le-tex publishing services GmbH, Leipzig, Germania
Layout copertina: Simona Colombo, Milano
Stampa: Grafiche Porpora, Segrate (MI)

Springer-Verlag Italia S.r.l., Via Decembrio 28, I-20137 Milano
Springer fa parte di Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Prefazione

Ma che me ne faccio di tutta questa matematica,
tanto non mi serve proprio a niente!

Non è infrequente udire un'esasperata esternazione di questo tipo tra i banchi di scuola e perfino in qualche aula universitaria. Crescendo si cambia, ed è dunque difficile che una persona di esperienza si avventuri in affermazioni di questo genere. Resta però una diffusa diffidenza verso una disciplina che si fa fatica a capire, che appare di un tecnicismo spesso arido e immotivato, che non lascia spazio alla creatività, perciò decisamente poco accattivante. E questo fa purtroppo parte dell'immaginario collettivo, come testimoniano le parole di una canzone di un famoso cantautore che afferma in tono sprezzante: "la matematica non sarà mai il mio mestiere". Queste difficoltà a comprendere e apprezzare la matematica non sono d'altra parte del tutto immotivate. Esse trovano qualche giustificazione nella circostanza che per troppo tempo i matematici non hanno certo fatto del loro meglio per rendere più accessibile e gradevole la loro materia. In particolare non si sono preoccupati di sfatare la leggenda del matematico rigido, inconcludente, senza fantasia, un tipo magari po' svitato, e con la testa tra le nuvole, che borbotta tra sé e sé in autobus o che esce di casa vestito in modo stravagante. Questo stato di cose sta cambiando, e per fortuna in meglio. Già da tempo la comunità matematica ha preso coscienza del fatto che è un *dovere irrinunciabile* sforzarsi di far capire anche a chi non ne fa parte il senso del lavoro che i matematici fanno, la sua utilità sociale, i suoi obiettivi. Inoltre un numero sempre maggiore di loro si rende conto che una buona divulgazione, rigorosa ma accessibile anche ai non addetti ai lavori, non solo è importante ma può anche risultare una parte stimolante della propria attività professionale.

È forse per questo cambio di atteggiamento che, già da vari anni, i matematici e la matematica interessano il grande pubblico un po' più di prima. Come è testimoniato, per esempio, da vari film di successo con protagonisti matematici, da un crescente numero di libri che trattano di matematica presenti anche nelle librerie non specialistiche, da non pochi interventi di matematici in dibattiti televisivi dedicati ai più vari argomenti. E, tra le altre cose, ci piace sottolineare anche la nascita, nel nostro paese, di poche ma significative riviste dedicate alla diffusione della matematica e dei più vari argomenti a essa collegati. Tra queste figura in una posizione rilevante *Lettera Matematica Pristem* che, uscita con un primo numero sperimentale nel marzo 1991, è arrivata oggi al numero 75. La *Lettera*, come la chiamiamo in redazione, edita da Springer-Verlag Italia, affronta temi legati alla ricerca matematica, ai fondamenti di questa disciplina, alla sua storia e alle sue applicazioni negli ambiti più vari. Non si limita però a questo: coltiva anche l'ambizione di discutere e riflettere sulla società e sui suoi rapporti con la cultura scientifica, considerando in particolare il contributo che il matematico può dare in questi ambiti. È per questo che vi trovano spazio anche saggi su argomenti diversi dalla matematica, ma a essa vicini, su applicazioni e loro ricadute sociali, riflessioni e proposte sulla didattica, presentazioni di libri e convegni. E c'è altro: la *Lettera* è una rivista molto curata e attraente nella sua veste grafica, attenta ai fenomeni artistici connessi alla matematica. Insomma, una rivista piacevole da tenere in mano e sfogliare, perché fatta con gusto e passione.

La varietà e l'interesse dei contributi inseriti nella *Lettera* sono alla base di questo libro. Essi infatti ci hanno spinto, d'accordo con il comitato di redazione, a proporre in questa raccolta alcuni articoli apparsi sulla rivista dalla sua fondazione a oggi. Si tratta di saggi, in gran parte discorsivi, che pur nel rigore dell'esposizione cercano di evitare dettagli tecnici in modo da risultare adatti a un pubblico ben più vasto di quello specialistico formato dai lettori abituali della *Lettera*. La sfida è quella di incuriosire il lettore, e convincerlo che la matematica non è soltanto affare di pochi iniziati, lontana dagli interessi della gente comune, puro arido esercizio di calcoli astrusi. Essa è invece una vasta arena in cui lo spirito creativo si può sbizzarrire nelle più disparate direzioni. Ed è soprattutto fondamentale nella nostra vita quotidiana, perché è davvero dappertutto attorno a noi: nelle carte di credito, nella posta elettronica, su internet, nell'arte, nei giochi, nel modo di colorare le carte geografiche, nelle scelte – anche di tipo etico – che facciamo in situazioni conflittuali. Il suo apporto può essere illuminante perfino su temi politici assai attuali, per esempio nell'opzione per uno o l'altro tra vari sistemi elettorali. Insomma la matematica, anche senza che ne siamo del tutto consapevoli, incide profondamente sulla vita di tutti i giorni, e ha inciso sulla nostra storia.

Gli articoli qui proposti sono opere di vari autori – che ringraziamo per la loro disponibilità – e trattano argomenti disparati con gusto e linguaggi diversi. Un pregio e una ricchezza di questa raccolta è dunque la sua varietà, che avrebbe potuto essere anche maggiore se problemi di natura editoriale non ci avessero impedito di includere altri interessanti articoli che pure avevano attratto la nostra attenzione. I contributi sono stati scelti, come abbiamo già detto, con il criterio di poter risultare comprensibili e gradevoli a un pubblico vasto. La loro caratteristica è la non prevalenza di aspetti tecnici a fronte della presenza di ricchi contenuti concettuali. Ci auguriamo quindi che i nostri criteri di scelta, benchè ovviamente influenzati da gusti personali, abbiano una valenza generale e trovino riscontro nel gradimento che questo libro potrà trovare presso un vasto pubblico.

E ora qualche parola sui singoli contributi. Cominciamo da quello di Ennio De Giorgi, uno dei matematici più geniali e profondi del secolo scorso. Egli, oltre ad aver affrontato con grande successo difficili problemi da lungo tempo irrisolti, ha aperto anche nuovi orizzonti alla ricerca matematica con idee profonde, originali e innovative. Inoltre si è a lungo interrogato sull'importanza della matematica dal punto di vista umano e sociale. Ed è infatti a questi valori, piuttosto che a quelli puramente tecnici, che il suo contributo è dedicato. De Giorgi ci parla tra l'altro della matematica come efficace mezzo di comunicazione tra gli esseri umani, e come disciplina che, richiedendo minori investimenti rispetto ad altre scienze, è forse più aperta di altre ai contributi delle persone di talento, indipendentemente dalla loro condizione sociale o economica.

Al punto di vista di De Giorgi si può collegare quello di Vinicio Villani che, sempre attento alle questioni didattiche, parla, con la grande esperienza da lui maturata, di un problema di interesse generale e di grande attualità. Ossia dell'opportunità che l'insegnamento della matematica nelle scuole cambi in accordo ai mutamenti della società civile. Alcuni esempi da lui proposti indicano interessanti direzioni di approfondimento in questo senso.

A queste tematiche si può riallacciare, in parte, anche l'articolo di Lorenzo Robbiano, un matematico con una spiccata attenzione per il mondo delle applicazioni, pur vivendo il suo campo di ricerca nell'ambito della cosiddetta "matematica pura". Robbiano mostra come anche la matematica *elementare*, ossia quella che si incontra sui banchi di scuola, possa proporre problemi profondi e interessanti, se riletta in chiave adeguata, per esempio tenendo conto dello strumento di calcolo straordinario di cui oggi disponiamo, il computer. L'articolo di Robbiano fa riflettere su quante sfide intellettualmente affascinanti ci propone l'evoluzione degli strumenti di calcolo usati nel passato, dall'abaco al regolo degli ingegneri. Si sente spesso dire che l'uso delle calcolatrici fa sì che gli studenti non imparino più le tabelline e non sappiano più far di conto. Certo sarebbe grave se ciò accadesse, ma questo non può essere un freno a un uso anche molto precoce delle nuove tecnologie di cui disponiamo: le novità sono spesso fonti di sviluppi straordinari, vanno gestite e non rifiutate in nome di un passato aureo che sovente è tale solo nell'immaginazione.

Accanto a questi contributi critici, presentiamo un gruppo di articoli che illustrano temi classici della matematica, che sono di indubbio interesse e inesauribili fonti di riflessioni anche di là dall'ambito puramente disciplinare. Tra questi il contributo di Gabriele Lolli, un articolo che prende spunto da un suo intervento al convegno Pristem *Esistono rivoluzioni in Matematica*?, tenutosi a Milano presso l'Università Bocconi nel marzo 1995. Lolli ci conduce per mano attraverso la straordinaria avventura della nascita, poco più di un secolo fa, della teoria degli insiemi, una rivoluzione culturale che ha influenzato profondamente il pensiero scientifico.

Nell'ambito della teoria degli insiemi si colloca anche il lavoro di Stefano Leonesi, Carlo Toffalori e Samanta Tordini, che ci illustrano, con uno stile efficace e accessibile, alcuni dei più celebri paradossi e problemi di questa disciplina. Questi argomenti potrebbero secondo noi essere spunto, anche in ambito didattico, per interessanti riflessioni interdisciplinari, per esempio di natura filosofica, che vanno ben al di là del puro ambito matematico.

Non si può parlare di teoria degli insiemi e dei problemi logici a essa collegati, senza far riferimento a un personaggio geniale che, nel secolo scorso, ha rivoluzionato il modo stesso di pensare a questi argomenti fondamentali. Si tratta di Kurt Gödel, cui è dedicato l'articolo, scritto in forma dialogica, di Roberto Lucchetti e Giuseppe Rosolini, la cui curiosa collaborazione è stata avviata proprio nel bar che è teatro della chiacchierata qui riportata. I risultati di Gödel, apparentemente molto astratti e lontani dalla realtà, hanno avuto invece una profonda ricaduta su questioni estremamente concrete. Essi sono infatti alla base di questioni fondamentali della scienza dei calcolatori, come provato dai contributi di John von Neuman e Alan Turing.

Alcune di tali questioni sono trattate nel lavoro di Vieri Benci. Egli ci propone un dialogo tra due studenti (due bravissimi studenti, potremmo dire) che discutono di eventi casuali, complessità algoritmica, macchine di Turing, informazione: il tutto con un linguaggio accessibile, che suscita curiosità di approfondire queste tematiche. Gödel è protagonista anche dell'articolo di Giovanni Sambin. Qui si spiega come i meccanismi logici essenziali del pensiero, non solo matematico, non sono univoci e universali, ma possono e debbono essere analizzati con spirito critico. Esistono infatti molte "logiche" cui si può ricorrere, e non ci può che giovare il prendere atto che ciò non solo è possibile ma in certi casi inevitabile, perfino in un ambito come quello matematico da sempre ritenuto perfetto e immutabile. Si tratta di un messaggio importante non solo dal punto di vista scientifico, ma anche da quello etico ed educativo, che la matematica può contribuire a diffondere. Un insegnamento di tolleranza, già presente nel contributo di De Giorgi, un antidoto alle tentazioni particolaristiche purtroppo sempre più presenti nella nostra società e un arricchimento del nostro modo di pensare.

A questi temi si ricollega anche l'articolo di Stefania Funari e Marco Li Calzi. Essi spiegano come perfino una cosa apparentemente così elementare, come la moltiplicazione di due numeri interi, non è sempre stata fatta in questo modo in passato. Ciò conferma che, in matematica come in tanti aspetti della nostra vita, non esiste un'*unica* maniera possibile per fare le cose. È probabile che l'algoritmo che si insegna a scuola sia quello più efficiente. Sapere però che a esso si è pervenuti dopo averne adoperato per secoli altri, può servire a capire la ragione delle difficoltà del suo apprendimento per i bambini delle scuole elementari, a giustificarne l'uso e a stimolare la curiosità dei discenti.

Presentiamo poi alcuni contributi più direttamente legati ad applicazioni. Bruno Betrò spiega in maniera efficace alcuni aspetti interessanti del Calcolo delle Probabilità. È forse inutile insistere sull'importanza di questa disciplina nella nostra vita quotidiana, la quale è spesso governata da eventi probabilistici. È fondamentale sfatare in questo ambito errori e false credenze che sembrano molto diffuse e sono spesso alla base di vere e proprie trappole in cui è facile cadere: basti pensare a tutti gli imbrogli connessi ai giochi d'azzardo, o il falso suggerimento di giocare al lotto un numero "fortemente ritardatario" con la presunzione che ciò dia maggiori probabilità di vincita.

Renato Betti propone poi un invito alla crittografia, mostrandoci come la teoria dei numeri, da sempre ritenuta disciplina tra le più teoriche, sia in tempi recenti inaspettatamente divenuta strumento essenziale per applicazioni che pervadono le nostre attività quotidiane. La nostra civiltà, per esempio, non esisterebbe se non potessimo utilizzare la crittografia a chiave pubblica quale si è sviluppata negli ultimi cinquant'anni.

Ci sono poi altri aspetti della matematica, di cui forse il grande pubblico è meno consapevole, ma che hanno tuttavia un'importanza notevole nel nostro quotidiano. Piergiorgio Odifreddi ci parla di sistemi elettorali, spiegandoci come non esista e non possa esistere il meccanismo elettorale per la democrazia "perfetta": il risultato fondamentale in questo senso è un teorema di Arrow, che nelle scienze sociali ha avuto lo stesso impatto dei risultati di incompletezza di Gödel per la matematica.

Roberto Lucchetti poi ci parla di scacchi e della sfida tra un uomo e una macchina. Prendendo spunto dalla famosa partita tra Kasparov e Deep Blue, presenta alcune considerazioni sul gioco forse più interessante e significativo che sia mai stato inventato.

Il libro si conclude con due inediti. Il primo, di Fioravante Patrone, è dedicato alla Teoria delle Decisioni e alla Teoria dei Giochi. Quest'ultima riguarda decisioni prese da più persone contemporaneamente, le quali con le loro azioni influenzano anche i risultati degli altri giocatori. Si tratta di un campo relativamente nuovo e in grande espansione, sia teorica sia applicativa. Se le sue prime applicazioni erano pensate per decisori umani, oggi alcune parti di queste teorie si applicano al comportamento delle specie animali, e, addirittura, all'uso dei computer.

Chiudiamo con l'inedito di Ciro Ciliberto e Enrico Rogora, che forse risulterà sorprendente per i non addetti ai lavori. L'articolo è dedicato alla matematica che viene adoperata nella biologia dell'evoluzione e particolarmente in biologia molecolare, la scienza che sta aprendo nuove frontiere alla medicina e alla farmacologia. In un passato anche recente il bagaglio matematico adoperato nelle scienze naturali non andava molto al di là di quello acquisito sui banchi di scuola o al più in un primo corso universitario di contenuto analitico. Di certo di tale bagaglio non faceva parte la geometria e, tanto meno, l'algebra astratta, che qualcuno vorrebbe peraltro mettere in un canto persino in curricola spiccatamente matematici. Già l'articolo di Robbiano ci fa invece riflettere sull'importanza dell'algebra in informatica. Qui Ciliberto e Rogora mostrano come le ricerche più avanzate in filogenetica, di grande utilità per la comprensione dei meccanismi dell'evoluzione e nella produzione di farmaci, utilizzino raffinati strumenti algebrico–geometrici.

Come abbiamo detto, questa raccolta è stata pensata per essere fruibile per un pubblico vasto, non costituito da soli specialisti, pur sperando che anche questi ultimi lo trovino interessante. Tuttavia ci è chiaro che alcune parti potrebbero essere un po' ostiche da digerire a una prima lettura. Non ci sembra peró un problema, se si accetta l'idea, certamente non standard, forse addirittura "eretica", di provare ad apprezzare questi scritti senza voler a tutti i costi capire nei dettagli *tutta* la matematica presente in ogni articolo. Non lo diciamo noi, stiamo solo parafrasando John Nash Jr. Nash: in un suo importante lavoro scientifico (non di divulgazione!) scrisse che in fondo capire tutte le parti più tecniche non è essenziale, quel che davvero conta è cercare di catturare le *idee*.

Questo è il *filo conduttore* di tutto il libro. Siamo infatti convinti che, al di là degli aspetti tecnici pure fondamentali, la matematica consista di *idee*, belle e importanti di per sé. Noi speriamo, con questo contributo, di portarne un'altra prova.

Giugno 2010

Ciro Ciliberto
Roberto Lucchetti

Indice

Il valore sapienziale della matematica*

E. De Giorgi

A differenza dello studente di fisica, ingegneria, biologia, economia, filosofia il ragazzo portato per la matematica non trova nei giornali, nella televisione, nell'opinione pubblica molto incoraggiamento a proseguire in studi, che sembrano un po' lontani dallo sviluppo della cultura e della vita contemporanea. Qualche incoraggiamento può venirgli dalla pratica acquisita nel campo dei calcolatori, che per lo più i giovani imparano a maneggiare molto più rapidamente degli adulti. Ma anche in questo campo resta un po' un equivoco di fondo sui rapporti tra matematica e informatica, la cui definizione è abbastanza difficile così come è difficile definire con chiarezza i rapporti tra la "matematica pura" e la "matematica applicata" o meglio ancora tra la matematica e altri rami del sapere. Penso che tutte queste difficoltà derivino in parte dallo scarso interesse dei mass-media per la matematica, ma anche da una certa sfiducia dei matematici nel valore della loro scienza, nella possibilità di comunicarla e nell'arricchimento umano che potrebbe venire a tutta la società da questa comunicazione. Gli stessi matematici in fondo sono spesso rassegnati all'idea che la loro disciplina sia troppo formale e astratta per suscitare un vero entusiasmo, paragonabile a quello che possono suscitare la musica,

---

* *Lettera Matematica Pristem*, n. 15, 1995.

la pittura, quel vero interesse per la vita e i problemi quotidiani degli individui, delle famiglie, dei popoli che è all'origine del lavoro di un economista, giurista o storico. Per questo cercherò di segnalare alcuni aspetti di quello che io chiamo il "valore sapienziale della matematica", intendendo la parola "sapienza" nel suo significato più ampio che comprende scienza e arte, immaginazione e ragionamento, giustizia e misericordia, prudenza e generosità, desiderio di comunicare le proprie idee e di comprendere le idee altrui in un'atmosfera di fraterna fiducia. Da questo punto di vista mi sembra importante il fatto che i matematici siano riusciti a sviluppare un linguaggio e un sistema di idee facilmente comunicabili tra persone di diverse nazioni, religioni, culture, che i matematici – quasi senza accorgersene – siano riusciti a superare tante barriere che ancora dividono gli uomini. Si può aggiungere che in fondo ogni persona naturalmente dotata di attitudine alla matematica può abbastanza rapidamente raggiungere degli ottimi risultati anche se parte da basi culturali molto limitate, che degli studi matematici di ottimo livello possono essere condotti anche in paesi economicamente poveri e tecnicamente arretrati, che la matematica meglio di altre discipline può essere per così dire "innestata" su tutte le culture, può attrarre sia persone con mentalità più pratica e più attiva che trovano nella matematica un potente strumento di lavoro e una potente forza di progresso, sia persone con mentalità più teorica e contemplativa che trovano nella matematica occasioni di riflessione e contemplazione del tutto disinteressate. Si potrebbe dire qualcosa di più: per esempio, che tutta la matematica pura e applicata è costituita in un continuo passaggio dal concreto all'astratto e dall'astratto al concreto, che le teorie rimandano agli esempi e gli esempi rimandano alle teorie. Potremmo dire che, pur rispettando la varietà dei caratteri e delle doti naturali delle diverse persone, una meditazione sulla matematica ci dice che non possono essere separati il mondo concreto e il mondo dei principi astratti, che la saggezza è soprattutto armonica intesa tra persone più o meno portate all'azione o alla contemplazione, alla concretezza o all'astrazione, ma ugualmente convinte della necessità di capirsi e di collaborare. Oltre a una reale possibilità di comprensione tra uomini dello stesso tempo penso che la matematica offra singolari possibilità di comprensione tra uomini di epoche diverse e che l'innovazione matematica è forse la meno "distruttiva" tra le diverse forme di innovazione proprie di altre discipline e di altre attività umane. Dopo millenni, i teoremi di Pitagora, Talete, Euclide, Archimede sono ancora pienamente validi anche se con il progresso della matematica è cambiato il linguaggio in cui vengono esposti e si è molto allargato il quadro generale in cui vengono presentati. Ugualmente la scoperta delle geometrie non euclidee nulla ha tolto all'importanza della geometria euclidea anche se ha molto allargato il campo delle realtà che la matematica cerca di esplorare. Avendo usato la parola "realtà" si può aggiungere che gli enti considerati in matematica, la loro natura reale o ideale o convenzionale, attuale o potenziale ecc., sono sempre stati tra gli oggetti più interessanti della riflessione filosofica e mi dispiace solo di non avere le cognizioni necessarie per dare un'idea sintetica di tutto ciò che i maggiori filosofi hanno detto su questo argomento. Mi mancano pure le cognizioni necessarie per parlare della storia della matematica e di tutto ciò che essa ci può insegnare. Mi limiterò solo a osservare che talvolta anche grandi matematici hanno commesso qualche errore nella dimostrazione di un teorema o per lo meno hanno fornito dimostrazioni incomplete e poco soddisfacenti, anche rispetto alle esigenze dell'epoca in cui sono state scritte. È invece assai difficile che un grande matematico enunci teoremi complicati, oscuri, poco interessanti per i quali in ultima analisi non vale nemmeno la pena di affaticarsi a stabilire se le dimostrazioni proposte siano corrette o meno. Direi che in fondo l'arte del matematico è in primo luogo l'arte del buon testimone che cerca di esporre con chiarezza le cose che sa e che ritiene importanti e solo in un secondo momento è l'arte del buon avvocato capace di convincere chi lo ascolta della verità di ciò che afferma. Con questo non voglio sottovalutare l'interesse delle dimostrazioni matematiche; con esse il matematico collega tra loro affermazioni apparentemente lontane, arrivando a una più profonda comprensione delle idee fondamentali di una teoria, e si accorge che un gruppo di assiomi apparentemente abbastanza povero può rivelarsi molto più ricco di conseguenze interessanti di quanto non appaia da una prima affrettata valutazione. Naturalmente il discorso può anche essere rovesciato, da parte di chi tenta di introdurre nuovi concetti matematici. La valutazione delle conseguenze di un determinato gruppo di assiomi può anche indurre ad abbandonare un'impostazione che sia meno interessante del previsto e scegliere nuove vie che si spera portino più lontano e raggiungano mete più interessanti. Uno degli insegnamenti della ricerca matematica che credo abbia un valore umano oltre che tecnico è la disponibilità che il ricercatore deve mantenere di fronte agli sviluppi più impensati del suo lavoro. La disponibilità a quello che in altre occasioni ho chiamato "lo sfruttamento dell'insuccesso". Accorgersi che una congettura la cui dimostrazione è stata tentata con molti sforzi e con grande fatica è falsa non è una tragedia; può anzi essere una buona occasione per scoprire nuove direzioni di lavoro prima impensate. Accorgersi dell'errore e riconoscerlo è un atto di onestà intellettuale senz'altro apprezzabile. Partire da questo riconoscimento per riprendere con maggiore slancio la propria ricerca muovendosi verso direzioni nuove e più promettenti è un atto di intelligenza, attraverso cui in fondo il ricercatore più moderno si ricollega alla sapienza più antica, a Socrate che diceva di sapere di non sapere, a re Salomone che chiedeva a Dio la saggezza necessaria a dirigere un regno per il cui governo non si sentiva abbastanza esperto.

Dovendo dare un consiglio a un giovane a cui piace la ricerca matematica, gli raccomanderei di mantenere sempre una grande disponibilità a uno sbocco inatteso del suo lavoro, a pensare che una vera ricerca è sempre quella di cui a priori non si può prevedere la conclusione. Nello studio dei problemi più difficili consiglierei sempre la tattica del lavorare su due fronti: cercare da una parte la dimostrazione che un certo teorema ritenuto interessante è vero e cercare dall'altra controesempi i quali provino che l'enunciato di cui si è cercata la dimostrazione è falso; le difficoltà incontrate in una direzione si trasformano allora in aiuti per procedere nella direzione opposta. Naturalmente la storia ci dà molti esempi di teoremi interessanti che per secoli sono rimasti refrattari sia alla dimostrazione sia alla confutazione, come il classico "ultimo teorema di Fermat" il quale afferma che se n è un intero maggiore di 2 non esistono tre interi positivi a, b, c tali che sia $a^n + b^n = c^n$. In questi casi occorre che il matematico non si disperi di fronte ai ripetuti insuccessi, ma sappia godere accorgendosi di aver trovato un "bel problema", dove nel termine "bel problema" includiamo due aspetti: un enunciato semplice, chiaro, elegante e una grande difficoltà nello smentire o confermare l'enunciato stesso. Alla contemplazione del bel problema il matematico può unire sia la ricerca intorno ad argomenti diversi abbastanza interessanti e meno difficili, sia le possibili variazioni sullo stesso tema – che possono consistere tanto nella considerazione di qualche caso particolare significativo quanto in quella di una classe più generale in cui rientra il problema precedente. Non si può dare una regola assoluta per stabilire a quale livello di generalità il matematico debba fermarsi; in questo entra in modo determinante quella dote indefinibile che è il gusto matematico, e che rende il lavoro del matematico partecipe un po' del lavoro dell'artista e dello scienziato sperimentale. Al pari dell'artista il matematico cerca le soluzioni e i problemi "più belli" e armoniosi, al pari dello scienziato sperimentale il matematico deve essere pronto a modificare le proprie ipotesi di lavoro sulla base dei risultati via via ottenuti. Queste attitudini sono importanti sia per il matematico che ha poca familiarità con i moderni calcolatori sia per il matematico che invece ha imparato a usare il suo calcolatore con la maestria con cui un musicista suona il suo strumento preferito. Per quest'ultimo, il calcolatore non sarà mai un surrogato dell'immaginazione e della fantasia ma potrà essere ciò che per un musicista è un violino o un pianoforte e per uno scienziato sperimentale un qualsiasi moderno apparecchio scientifico. Naturalmente se i calcolatori non sostituiscono ma accompagnano l'immaginazione matematica essi possono costituire a loro volta oggetto di riflessione matematica e di idealizzazione matematica. L'esempio più classico di idealizzazione delle macchine calcolatrici, noto anche ai matematici che come me hanno assai scarse informazioni nel campo della logica e dell'informatica, è la cosiddetta macchina di Turing. In sostanza si tratta di una macchina ideale – a prima vista molto più semplice e meno potente delle macchine reali – dotata della proprietà preziosa di poter lavorare per tempi comunque lunghi. In termini un po' grossolani potremmo immaginare che una macchina di Turing possa lavorare per miliardi di miliardi di secoli e che a noi sia concessa la possibilità di considerare i risultati che la macchina conseguirà dopo un lavoro così lungo. Questa ipotesi informale fantascientifica può essere trasformata in assiomi matematici perfettamente formalizzabili: da essi seguono molti teoremi interessanti riguardanti la vera macchina di Turing, che è un ente matematico ideale caratterizzato come tutti gli enti matematici da alcuni postulati da cui a loro volta seguono vari teoremi. Il discorso fatto sui rapporti tra matematica e informatica può in parte ripetersi studiando le relazioni con scienze sperimentali, tecnica, arti, filosofia ecc. Da una parte il matematico può trarre molte ispirazioni da tutti questi rami del sapere, ma deve avere piena libertà di svilupparli secondo la propria sensibilità, rispettando la logica interna e la tradizione di questa scienza senza sentirsi vincolato a introdurre soltanto gli oggetti che hanno “significato” fisico, economico, biologico ecc. Per esempio, nel calcolo delle variazioni hanno un notevole interesse i problemi del tipo delle ricerche di superfici minime liberamente “ispirati” allo studio della forma delle bolle di sapone. Alcuni dei risultati più recenti e interessanti sulle superfici minime riguardano le superfici immerse in spazi a otto dimensioni o con un numero di dimensioni più grande di otto. Evidentemente si tratta di risultati che non hanno un’immediata interpretazione fisica, almeno nell’ambito delle bolle di sapone che sono evidentemente realizzabili solo nello spazio fisico usuale a tre dimensioni. Tuttavia non si può escludere che oggetti matematici di cui inizialmente non si conoscevano interpretazioni fisiche possano successivamente avere interpretazioni del tutto inattese. Per esempio, quando Apollonio studiò le sezioni coniche (comprendenti ellissi, iperboli e parabole) nessuno poteva immaginare che molti secoli dopo Keplero avrebbe mostrato che i pianeti si muovono su orbite ellittiche. È importante per il progresso della scienza che il matematico possa sviluppare liberamente le suggestioni che provengono da altre discipline, ma è ugualmente importante che lo studioso di discipline sperimentali o il tecnico possano liberamente scegliere il modello matematico più adatto alla descrizione matematica dell’oggetto da essi studiato, cambiare i modelli di cui l’esperienza mostra l’inadeguatezza, modificare ove occorre i modelli proposti dalla letteratura matematica. Il fisico, il biologo, l’economista debbono sapere che la letteratura matematica descrive ciò che si sa oggi degli enti matematici ma non ciò che si potrebbe sapere e forse si saprà domani e che la realizzazione di queste possibilità può anche essere favorita dalle domande degli scienziati sperimentali i quali chiedono se si possono immaginare oggetti dotati di certe proprietà. In altri termini, le relazioni più fruttuose tra matematica e altri rami del sapere si possono avere quando da tutte le parti vi sia l’amore per la propria disciplina, la coscienza delle sue caratteristiche, della sua logica interna e della sua autonomia, la coscienza che nell’ambito di ogni disciplina ciò che conosciamo è una parte piccolissima di ciò che esiste e di ciò che potremmo sapere, la coscienza che tutte le forme del sapere umano sono rami dell’unico albero della sapienza e conservano la loro bellezza e fecondità se non vengono separati dal tronco comune. Questa coscienza mi sembra opposta a ogni forma di riduzionismo antico e moderno che in maniere diverse pretende di imporre l'egemonia di una disciplina su tutte le altre, per esempio lo scientismo che tendeva a imporre l'egemonia delle scienze matematiche, fisiche e naturali oppure lo storicismo che tende a imporre un'analoga egemonia delle scienze storiche. Ovviamente con questa affermazione e con tutte le altre contenute in questo articolo non si pretende di costituire delle "dimostrazioni" nel senso matematico della parola, ma di indicare alcune tra le tante considerazioni umanamente importanti che a mio avviso sono suggerite dall'esperienza matematica. Del resto gli stessi matematici che sono d'accordo sull'enunciato e sulla dimostrazione di un dato teorema, ritenuto da tutti molto importante, possono avere idee diverse sulle ragioni di tale importanza. Per esempio, il classico teorema di Gödel sull'esistenza di proposizioni indecidibili in aritmetica può essere letto per così dire sia in chiave pessimistica che in chiave ottimistica. Il pessimista dirà che il teorema di Gödel prova la debolezza della ragione umana, la sua incapacità a conoscere perfettamente persino un oggetto familiare da millenni come l'insieme dei numeri naturali; l'ottimista si rallegrerà constatando che questo teorema prova le infinite potenzialità della matematica, dimostra che sarà sempre possibile, senza distruggere le teorie tradizionali, proporre nuovi assiomi o nuove teorie originali molto ricche e interessanti. La meditazione su questo teorema e più in generale su tutta la storia passata della matematica e sulle sue potenzialità ancora inesplorate può alla fine portarci a conclusioni abbastanza simili a quelle cui era giunto Pascal che parlava insieme della grandezza e della miseria dell'uomo, della forza e della debolezza della ragione, raccomandava nello stesso tempo le virtù dell'umiltà e della speranza.

Non pretendo che le mie opinioni sul significato "sapienziale", sul "valore umano" della "matematica pura" siano condivise da tutti i matematici, molti dei quali preferiranno mettere l'accento sul valore delle applicazioni della matematica o sulle difficoltà della didattica della matematica. Nelle prime si può riconoscere più facilmente il contributo che il matematico può dare alla soluzione di problemi umani urgenti, malattie, povertà, inquinamento ecc.; nella seconda si potrà vedere il difficile impegno necessario per evitare che lo studio sia per molti ragione di delusione, fastidio, sfiducia in se stessi e diventi invece per tutti (sia per i più dotati che per i meno dotati) fattore importante di crescita umana e tutti arrivino a comprendere e amare questa disciplina nella massima misura consentita dalle loro naturali inclinazioni. D'altra parte può accadere che un ragazzo dotato di spiccate attitudini matematiche, ma poco favorito da altri punti di vista (per esempio a causa di condizioni sociali ed economiche sfavorevoli, difficili situazioni familiari, cattiva salute, carattere timido e introverso, ambiente ostile o poco accogliente ecc.), raggiunga nella matematica un successo che difficilmente otterrebbe in altri campi. Tra l'altro, pur sapendo che i matematici non sono privi di umane debolezze e possono, come tutti gli altri uomini, sbagliare più o meno in buona fede nei loro giudizi, è indubbiamente possibile – nel giudizio sui meriti di un matematico – un'obiettività maggiore di quella che si può avere in altri campi, e anche una persona poco nota può ottenere rapidamente la stima e l'ammirazione della comunità matematica se dimostra un teorema molto bello. Ciò che vale per gli individui vale del resto anche per i popoli; nazioni la cui storia è stata tragica possono in breve tempo raggiungere nella matematica il livello delle nazioni che la storia ha più favorito, e questo successo può essere un importante fattore di prestigio, fiducia in se stessi, progresso tecnico e umano. Ugualmente si può notare che non è facile l'insegnamento della matematica nel proprio paese, nella propria città, nel proprio ambiente culturale: esso richiede sempre intelligenza, sensibilità, cultura ma le difficoltà crescono meno che per altre discipline quando si passa a un paese lontano per lingua, tradizioni, mentalità e cultura. Probabilmente la matematica è uno dei settori in cui la cooperazione internazionale può avere maggiore successo o per lo meno incontrare difficoltà minori di quelle che si incontrano in altri campi. Del resto è sempre vivo in Cina il ricordo di un famoso missionario cattolico, Matteo Ricci, che portò ai cinesi la scienza europea e raggiunse una profonda comprensione della cultura cinese attraverso un dialogo con i dotti cinesi che ebbe come punto di partenza il comune interesse per le applicazioni della matematica all'astronomia e alla geografia. Inoltre penso che un confronto con le idee di persone più lontane dalla matematica aiuterebbe a superare il pregiudizio secondo cui questa disciplina studia soltanto gli aspetti quantitativi della realtà e non quelli qualitativi. Chi ha una familiarità sia pur modesta con la matematica moderna sa che ormai i risultati di carattere qualitativo sono assai più numerosi di quelli di carattere quantitativo, che nello studio di molti fenomeni è già importante poter disporre di un modello matematico avente proprietà qualitative simili a quelle del fenomeno considerato anche in casi in cui non è possibile disporre di dati abbastanza precisi e di metodi di calcolo abbastanza potenti per arrivare a previsioni quantitative soddisfacenti; notiamo a tale proposito che se è vero che nella ricerca scientifica non va troppo lontano chi rinuncia allo sfruttamento dell'insuccesso, cioè chi non cerca vie nuove per affrontare problemi che sembrano inaccessibili ai metodi conosciuti, è altrettanto vero che si arresta ancora prima chi rinuncia allo sfruttamento del successo e si propone solo problemi difficilissimi. Occorre saper adoperare con intelligenza i metodi conosciuti nello studio di problemi abbastanza belli di media difficoltà e l'unico errore da evitare sono i problemi insignificanti, brutti e artificiosi, inventati solo perché si possiede un metodo atto a risolverli.

Il ruolo della scuola per un'alfabetizzazione matematica di base*

V. Villani

Parto da una constatazione: nella formazione dei giovani, per la società del Duemila, la centralità della scuola si è drasticamente ridotta rispetto a cinquant'anni fa. Per quanto riguarda specificamente la Matematica, questa perdita di centralità si manifesta sotto due aspetti particolarmente appariscenti:

1. Ai fini dell'uso "pratico", nella vita quotidiana e professionale, la rilevanza di saper effettuare diligentemente calcoli faticosi e complicati (numerici, trigonometrici, di derivate e integrali, ecc.) o di saper "studiare una funzione" è stata in larga misura marginalizzata con l'avvento dei calcolatori.

2. Sono invece divenute assai più rilevanti le capacità "progettuali" del tipo:

   – modellizzare situazioni problematiche non completamente formalizzate;
   – conoscere e saper utilizzare in modo appropriato vari tipi di linguaggi (verbale, algebrico, simbolico, grafico, informatico, ecc.) e saper passare da un linguaggio a un altro;
   – effettuare valutazioni probabilistiche, interpretare dati statistici, stimare ordini di grandezza;

* *Lettera Matematica Pristem*, n. 61, 2007.

– controllare la sensatezza dei risultati dei calcoli effettuati con l'uso di un computer a partire da dati numerici approssimati, tenendo conto della propagazione degli errori.

La scuola, mentre ha iniziato a prendere atto di quanto segnalato al punto 1, stenta a fare altrettanto per quanto riguarda la sfida di cui al punto 2. E una ragione c'è. È ben più difficile esplorare situazioni aperte (magari prive di soluzioni, o suscettibili di una pluralità di soluzioni diverse) che risolvere un problema del quale si sa già che avrà una e una sola soluzione, ottenibile mediante l'applicazione diligente di un procedimento calcolativo standard. Ma difficoltà non deve significare rinuncia, bensì gradualità partendo da problemi non stereotipati, che siano alla portata degli allievi (a ogni livello scolastico, dalle elementari all'università). Esempi significativi di questi problemi matematici si trovano ormai in molte pubblicazioni rivolte agli insegnanti (tra cui quelle citate in bibliografia e dalle quali ho attinto numerosi spunti per questa esposizione). Purtroppo, però, nella prassi didattica corrente lo spazio loro dedicato è ancora troppo limitato.

1 La spendibilità della matematica scolastica di base nella vita adulta del cittadino "informato"

Fin qui ho parlato di scuola. Ma come si collegano queste riflessioni alle problematiche che gli attuali studenti dovranno affrontare nel loro futuro di cittadini (sperabilmente "informati")? Onde evitare possibili fraintendimenti, specifico che non mi riferirò a quel 5 % della popolazione che ha acquisito una buona preparazione matematica di livello universitario e la sa utilizzare in modo appropriato nella propria vita quotidiana e professionale, per modellizzare situazioni anche complesse. Mi riferirò invece a quel 95 % della popolazione che non possiede una siffatta preparazione matematica e deve pur tuttavia confrontarsi quotidianamente con situazioni nelle quali intervengono (spesso in forma surrettizia e fuorviante) nozioni matematiche relativamente semplici. Per uscire dal vago, propongo un elenco – ovviamente soggettivo e incompleto – di temi che ampie fasce di cittadini ritengono importanti. Nello stilarlo, ho tenuto conto degli esiti di sondaggi di vario tipo, di articoli e "lettere al direttore" pubblicate su giornali e riviste, di trasmissioni televisive, di annunci pubblicitari e – perché no – di argomenti ricorrenti nelle rubriche dedicate ad astrologia e oroscopi (a scanso di equivoci: considero queste rubriche non solo inutili ma addirittura dannose sotto tutti i punti di vista, tranne il fatto di essere utili come specchio abbastanza fedele di ciò che molti lettori, e non solo i più sprovveduti, vorrebbero sentirsi dire):

– salute;
– lavoro;
– tasse;
– risparmi;
– pensioni;
– immigrazione;
– lotto, lotterie e giochi a premi.

La mia tesi, che nel seguito cercherò di esemplificare, è che, anche rimanendo nell'ambito dei programmi tradizionali, è possibile coinvolgere i nostri studenti in attività che ne sviluppino un atteggiamento mentale critico, spendibile poi nella successiva vita adulta, abituandoli a riconoscere la Matematica (nascosta) nei più svariati contesti di vita reale e a individuare ambiguità, sofismi, tentativi di truffe vere e proprie, dove la Matematica (palese) viene spesso usata per ammantare di "scientificità" affermazioni ingannevoli o tendenziose.

2 Esempi

Sono tutti estremamente semplici dal punto di vista matematico. Le difficoltà derivano dal fatto che la matematizzazione delle situazioni ipotizzate va lasciata agli allievi, con un'alternanza di momenti di lavoro individuale e di discussioni collettive (che l'insegnante non dovrebbe mai chiudere anzitempo suggerendo un'unica soluzione "ufficiale"). Va da sé che questi esempi non vanno visti come episodi isolati, bensì inseriti in un percorso didattico globale coerente, in linea con le priorità evidenziate all'inizio. La scommessa culturale è – lo ribadisco ancora una volta – che