CIME Summer Schools

G. Scorza Dragoni (Ed.)

Topologia

6

Varenna, Italy 1955

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

G. Scorza Dragoni (Ed.)

Topologia

Lectures given at the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Varenna (Como), Italy,
August 26-September 3, 1955

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10897-6 e-ISBN: 978-3-642-10898-3
DOI:10.1007/978-3-642-10898-3
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Florence, 1955
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNATIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E)

3° Ciclo - Varenna, Villa Monastero – 26 agosto – 3 sett. 1955

TOPOLOGIA

Roma - Istituto Matematico dell' Università

C. K U R A T O W S K I

-T H É O R I E D E L A D I M E N S I O N-

Roma-Istituto Matematico dell'Università, 1955

C.Kuratowski

THÉORIE DE LA DIMENSION

Sommaire

I. Introduction. Espaces métriques.

Définition de l'espace métrique: Espace dont lequel une fonction non-négative de deux variables $|x-y|$, nommée distance, est le terme primitif, assujetti aux axiomes suivants:

(i) $\{|x-y| = 0\} \equiv (x=y)$, (ii) $|x-y| = |y-x|$,

(iii) $|x-y| + |y-z| \geq |x-z|$.

Exemples d'espaces métriques: l'espace euclidien à n dimensions E^n; cube de Hilbert, c'est-à-dire l'éspace H de suites infinies $x=(x_1,x_2,\dots)$, où $|x_n| \leq 1$ et où

$$|x-y| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n-y_n|.$$

Tous sous-ensemble d'un espace métrique est métrique.

Notions fondamentales. Diamètre d'un ensemble A:

$$\delta(A) = \sup |x-x'| \quad \text{où} \quad x,x' \in A.$$

Ensemble borné = ensemble dont le diamètre est fini.

Limite d'une suite de points d'un espace métrique:

$$(p = \lim_{n=\infty} p_n) \equiv (\lim_{n=\infty} |p_n-p| = 0).$$

Espace compact = espace dans lequel toute suite infinie de points contient une suite partielle convergente (exemples: l'intervalle $0 \leq t \leq 1$; cube H de Hilbert).

Espace complet = espace dans lequel toute suite satisfaisant à la condition de Cauchy est convergente (une suite $p_1, p_2, \dots$ satisfait à la condition de Cauchy, lorsqu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un k tel que pour $n > k$ on a $|p_n-p_k| < \varepsilon$).

Boule (ouverte) de centre a et de rayon r: l'ensemble de points dont la distance de a est inférieure à r, c'est-à-dire

$$\underset{x}{E}\ |x-a| < r.$$

Fermeture de A = l'ensemble $\bar{A}$ de tous les points p de la forme $p = \lim_{n=\infty} p_n$, où $p_n \in A$ (autrement dit: on a $p \in \bar{A}$ lorsque toute boule de centre p admet des points communs avec A).

Ensemble fermé = ensemble A satisfaisant à la condition $\bar{A} = A$. Ensemble ouvert = complémentaire d'un ensemble fermé (= ensemble qui, avec tout point, contient une boule ayant ce point pour centre).

La somme (l'union) d'un nombre fini d'ensembles fermés est un ensemble fermé. Le produit (l'intersection) d'un nombre fini d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. Le produit d'un nombre arbitraire d'ensembles fermés est férmé et la somme d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

Intérieur et frontière d'un ensemble A situé dans l'espace X:

$$\mathrm{Int}\,(A) = X-\overline{X-A}, \quad \mathrm{Fr}(A) = \bar{A}\cdot\overline{X-A}.$$

Écart $\rho(p,F) = \inf |p-x|$ où $x \in F$ (pour $F = 0$, on pose $\rho(p,F)=1$).

Entourage: [A est un entourage de p] $\equiv$ [$p \in \mathrm{Int}\,(A)$] (c'est-à-dire qu'il existe une boule de centre p contenue dans A).

Ensemble dense: [A est dense dans l'espace X] $\equiv$ [$(\bar{A}=X)$].

Espace séparable: espace qui contient un sous-ensemble dense dénombrable (exemples: espace euclidien E^n, cube de Hilbert H, tout ensemble fini, tout sous-ensemble d'un espace métrique séparable).

Tout espace métrique séparable contient une base, c'est-à-dire une suite $R_1, R_2, \ldots$ d'ensembles ouverts tels qu'à tout point p et tout $\varepsilon > 0$ correspond un k tel que $p \in R_k$ et $\delta(R_k) < \varepsilon$.

Ensemble frontière = ensemble dont le complémentaire est dense.

Ensemble de première catégorie = sous-ensemble d'un ensemble $F_1+F_2+\ldots+F_n+\ldots$, où F_n est frontière et fermé.

Théorème de Baire: dans un espace complet tout ensemble de première catégorie est un ensemble frontière.

Transformation continue: f est continue lorsque

$$\left[\lim_{n=\infty} x_n = x\right] \Longrightarrow \left[\lim_{n=\infty} f(x_n) = f(x)\right].$$

Transformation homéomorphe: la transformation f est une homéomorphie lorsqu'elle est continue, biunivoque et la transformation inverse est continue:

$$\left[\lim_{n=\infty} x_n = x\right] \equiv \left[\lim_{n=\infty} f(x_n) = f(x)\right].$$

Propriété topologique: propriété invariante relativement aux transformations homéomorphes.

Théorème d'Urysohn: tout espace métrique séparable [1] est homéomorphe à un sous-ensemble du cube H de Hilbert.

Espace fonctionnel Y^X: espace de toutes les transformations continues de l'espace X (supposé compact) en sous-ensembles de l'espace Y, la distance dans l'espace Y^X étant définie par la formule:

$$|f-g| = \sup |f(x)-g(x)| \quad \text{où } x \in X.$$

Si Y est complet, Y^X l'est également.

=.=.=.=.=.

Bibliographie. Traités sur la théorie de la dimension:

1. W.Hurewicz-H.Wallmann, Dimension Theory, Princeton 1948.
2. K.Menger, Dimensionstheorie, Teubner,1928.
3. P. Urysohn, Fund.Math. 7-8 (1925-26).
4. J.Favard,Espace et dimension, Paris (Michel) 1950.

---

1) Dans la suite tout espace sera supposé métrique séparable. La théorie de la dimension des espaces non séparables est bien plus compliquée. Voir, par exemple, M.Katětov, Čechoslov, mat.Žurn. 2(77).

5. K.Kuratowski, Topologie vol.I, §§ 20-23, et vol.II, § 40, Warszawa, Monogr. Mat. 1952 (nouv.édition).[1)]

Voir aussi pour les propriétés de la dimension liées à la topologie algébrique.

6. P.Alexandroff, Dimensionstheorie, Math.Ann. 106 (1932).

II. Définition de la dimension. Propriétés fondamentales.

Définition (inductive) de dim X (dimension de l'espace X) et de $\dim_p X$ (dimension de X au point p):

1°: $\dim 0 = -1$,

2°: $(\dim_p X \leq n) \equiv$ à tout $\varepsilon > 0$ correspond un ensemble ouvert G tel que

$$p \in G, \quad \delta(G) < \varepsilon \quad \text{et} \dim \mathrm{Fr}(G) \leq n-1,$$

3° $(\dim X \leq n) \equiv \dim_p X \leq n$ quel que soit $p \in X$,

$\dim_p X = \infty$, s'il n'existe aucun n satisfaisant à 2°.

Historique. L'idée de cette définition, qui remonte à H.Poincaré (1912), a été précisée par L.E.J.Brouwer en 1913. La théorie de la dimension a été crée indépendamment par K.Menger et P. Urysohn (vers 1922).

Exemples. L'intervalle $0 \leq t \leq 1$ a la dimension 1; de même la circonférence d'un cercle. On en conclut que le plan E^2 a la dimension ≤ 2, et - par induction - que $\dim E^n \leq n$.[2)]

L'espace des nombres irrationnels est de dimension 0. Il en est de même de l'ensemble C de Cantor (c'est-à-dire de l'ensemble des nombres de la forme

$$t = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{9} + \ldots + \frac{t_m}{3^m} + \ldots \quad \text{où } t_m = 0 \text{ ou } 2.$$

---

1) On y trouvera la majorité des notions et des théorèmes considérés ici.

2) La démonstration de l'inégalité inverse: $\dim E^n \geq n$ est omise ici, elle a été présentée dans les conférences de M.Sperner.

Remarque. La dimension est une propriété topologique.

Théorèmes. 1. Si $A \subset B$, on a $\dim A \leq \dim B$ et $\dim_p A \leq \dim_p B$ pour $p \in A$.

2. $(\dim_p E \leq n) \equiv$ à tout $\varepsilon > 0$ correspond un ensemble ouvert G tel que

$$p \in G, \quad \delta(G) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \dim\left[E \cdot Fr(G)\right] \leq n-1.$$

3. Si $F_k = \overline{F}_k$ et $\dim F_k = n$ pour $k=1,2,\ldots$, on a $\dim(F_1+F_2+\ldots)=n$

4. Tout espace à n dimensions contient une base $R_1, R_2, \ldots$ telle que $\dim Fr(R_k) \leq n-1$.

En particulier, tout espace de dimension 0 contient une base formée d'ensembles fermés-ouverts.

5. Si $\dim X=n$, on a $X=A+B$ où $\dim A \leq n-1$ et $\dim B=0$.

6. Si $\dim X=n$, on a $X=A_0+\ldots+A_n$ où $\dim A_j=0$ pour $j=0,\ldots,n$.

7. Si $X=A+B$ où $\dim A=n-1$ et $\dim B=0$, on a $\dim X \leq n$.

8. Si $X=A_0+\ldots+A_n$, où $\dim A_j=0$ pour $j=0,\ldots,n$, on a $\dim X \leq n$.

9. Tout espace de dimension 0 est homéomorphe à un sous-ensemble de l'ensemble C de Cantor.

III. Théorèmes de réduction et de décomposition.

Théorème de réduction. Etant donnée une décomposition d'un espace X de dimension n en une suite (finie ou infinie) d'ensembles ouverts:

$$X = G_0 + G_1 + \ldots ,$$

il existe une décomposition en ensembles ouverts:

$$X = H_0 + H_1 + \ldots$$

telle que

1° $\quad H_i \subset G_i$,

2° $\quad H_{i_0} \ldots H_{i_{n+1}} = 0$ pour tout système de $n+2$ indices différents.

En particulier, si $n=0$, les ensembles H_i sont disjoints et fermés.

A ce dernier cas on peut ramener la démonstration du théorème de réduction, en appliquant le théorème II,6.

En appliquant le théorème de Borel-Lebesgue, on en déduit le théorème suivant:

Théorème de décomposition. X étant un espace compact de dimension n, à tout $\varepsilon > 0$ corrèspond une décomposition de cet espace en un nombre fini d'ensembles ouverts:

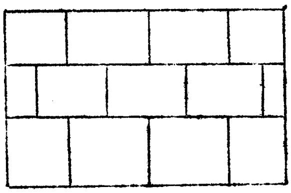
$$X = H_0 + \dots + H_m$$

tels que $\delta(H_i) < \varepsilon$ et que la condition 2° soit satisfaite.

Le théorème reste vrai en remplaçant le terme "ouvert" par "fermé".

Corollaire. À tout système d'ensembles fermés $F_0, \dots, F_m$ tel que $X = F_0 + \dots + F_m$ et à tout $\varepsilon > 0$ correspond un système d'ensembles fermés satisfaisant aux conditions 1° et 2° en remplaçant G_i par l'ensemble des points p tels que $\rho(p, F_i) < \varepsilon$.

Exemple. La figure ci-dessous représente une interprétation du théorème de décomposition pour le carré (cas de décomposition en ensembles fermés).



IV. Représentation paramétrique d'un espace compact sur l'ensemble C de Cantor.

Une fonction f est dite d'ordre $\leq k$, s'il n'existe aucun système de k points différents $x_1, \dots, x_k$ tel que $f(x_1) = \dots = f(x_k)$.

Théorème. X étant un espace compact et parfait (c'est-à-dire ne contenant aucun point isolé) de dimension n, il existe une transformation f de l'ensemble C en X d'ordre $\leq n+1$.

Plus encore: en désignant par Φ le sous-ensemble de