N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE
MATHÉMATIQUE

GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

Chapitres 2 et 3

Springer

Réimpression inchangée de l'édition originale de 1972

ISBN-10 3-540-33940-X Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-33940-3 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: *design & production*, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

CHAPITRE II

ALGÈBRES DE LIE LIBRES

Dans ce chapitre,[1] *la lettre* K *désigne un anneau commutatif non réduit à* 0. *L'élément unité de* K *est noté* 1. *Sauf mention du contraire, toutes les cogèbres, algèbres et bigèbres, tous les modules et tous les produits tensoriels sont relatifs à* K.

A partir du § 6, *on suppose que* K *est un corps de caractéristique zéro.*

§ 1. Bigèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

Dans tout ce paragraphe, on note $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur K, $U(\mathfrak{g})$ ou simplement U son algèbre enveloppante (chap. I, § 2, nº 1), σ l'application canonique de $\mathfrak{g}$ dans $U(\mathfrak{g})$ (*loc. cit.*) et $(U_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration canonique de U (*loc. cit.*, nº 6).

1. Éléments primitifs d'une cogèbre

Dans tout ce nº, on considère une *cogèbre* E (A, III, p. 138), de coproduit

$$c\colon E \rightarrow E \otimes E$$

possédant une *coünité* ε (*loc. cit.*, p. 146). Rappelons que ε est une forme linéaire sur le K-module E telle que (après identification canonique de $E \otimes K$ et $K \otimes E$ avec E) l'on ait:

$$\mathrm{Id}_E = (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_E) \circ c = (\mathrm{Id}_E \otimes \varepsilon) \circ c.$$

On note E^+ le noyau de ε et on se donne un élément u de E tel que

$$c(u) = u \otimes u \quad \text{et} \quad \varepsilon(u) = 1.$$

Le K-module E est somme directe de E^+ et du sous-module $K.u$, qui est libre de base u; on note $\pi_u\colon E \rightarrow E^+$ et $\eta_u\colon E \rightarrow K.u$ les projecteurs associés à cette décomposition. On a

$$(1) \qquad \pi_u(x) = x - \varepsilon(x).u, \qquad \eta_u(x) = \varepsilon(x).u.$$

Définition 1. — *On dit qu'un élément x de* E *est u-primitif si l'on a*

$$(2) \qquad c(x) = x \otimes u + u \otimes x.$$

Les éléments u-primitifs de E forment un sous-module de E, noté $P_u(E)$.

[1] Les résultats des chapitres II et III dépendent des six premiers Livres (E, A, TG, FVR, EVT, INT) de LIE I, de AC et de VAR, R; le nº 9 du § 6 du chap. III dépend en outre de TS I.

PROPOSITION 1. — *Tout élément u-primitif de* E *appartient à* E^+.

En effet, (2) entraîne $x = \varepsilon(x).u + \varepsilon(u).x = \varepsilon(x).u + x$, d'où $\varepsilon(x) = 0$.

Remarque. — Si $x \in E$ et si $c(x) = x' \otimes u + u \otimes x''$, où x', x'' sont dans E^+, alors $x = \varepsilon(x').u + \varepsilon(u).x'' = x''$; de même $x = x'$, et x est u-primitif.

Pour tout $x \in E^+$, on pose

$$c_u^+(x) = c(x) - x \otimes u - u \otimes x. \tag{3}$$

PROPOSITION 2. — *On a*

$$(\pi_u \otimes \pi_u) \circ c = c_u^+ \circ \pi_u. \tag{4}$$

En effet, soit x dans E; on a

$$\begin{aligned}(\pi_u \otimes \pi_u)(c(x)) &= ((1 - \eta_u) \otimes (1 - \eta_u))(c(x)) \\ &= c(x) - (1 \otimes \eta_u)(c(x)) - (\eta_u \otimes 1)(c(x)) + (\eta_u \otimes \eta_u)(c(x)).\end{aligned}$$

Comme ε est coünité de E, on a

$$(1 \otimes \eta_u)(c(x)) = x \otimes u, \qquad (\eta_u \otimes 1)(c(x)) = u \otimes x$$

d'où

$$(\eta_u \otimes \eta_u((c(x)) = (\eta_u \otimes 1)((1 \otimes \eta_u)(c(x))) = \varepsilon(x).u \otimes u;$$

de tout ceci, on tire

$$(\pi_u \otimes \pi_u)(c(x)) = c(x) - x \otimes u - u \otimes x + \varepsilon(x).u \otimes u.$$

D'autre part, on a

$$c_u^+(\pi_u(x)) = c(x) - x \otimes u - u \otimes x + \varepsilon(x).u \otimes u,$$

d'où la formule (4).

Comme E^+ est un sous-module facteur direct de E, on peut identifier $E^+ \otimes E^+$ à un sous-module facteur direct de $E \otimes E$. Avec cette identification, $\pi_u \otimes \pi_u$ est un projecteur de $E \otimes E$ sur $E^+ \otimes E^+$. D'après la formule (4), c_u^+ applique E^+ dans $E^+ \otimes E^+$ et π_u *est un morphisme de la cogèbre* (E, c) *dans la cogèbre* (E^+, c_u^+).

PROPOSITION 3. — *Si la cogèbre* (E, c) *est coassociative* (resp. *cocommutative*) (A, III, p. 143–144), *il en est de même de la cogèbre* (E^+, c_u^+).

Cela résulte du lemme suivant:

Lemme 1. — *Soit* $\pi \colon E \to E'$ *un morphisme surjectif de cogèbres. Si* E *est coassociative* (resp. *cocommutative*), *il en est de même de* E'.

Soit B une K-algèbre associative; l'application $f \mapsto f \circ \pi$ est un homomorphisme *injectif* d'algèbres de $\mathrm{Hom}_K(E', B)$ dans $\mathrm{Hom}_K(E, B)$. Il suffit alors d'appliquer la prop. 1 (resp. la prop. 2) de A, III, p. 143 (resp. p. 144).

2. Éléments primitifs d'une bigèbre

Soient E une *bigèbre* (A, III, p. 148), c son coproduit, ε sa coünité, 1 son élément unité. Comme $\varepsilon(1) = 1$ et $c(1) = 1 \otimes 1$, on peut appliquer les résultats du n° précédent avec $u = 1$. On appelle simplement *primitifs* (cf. A, III, p. 164) les éléments 1-primitifs de E (n° 1, déf. 1), c'est-à-dire les éléments x de E tels que

$$c(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x. \tag{5}$$

On écrira simplement π, η, P(E), c^+ au lieu de π_1, η_1, $P_1(E)$, c_1^+.

PROPOSITION 4. — *L'ensemble* P(E) *des éléments primitifs de* E *est une sous-algèbre de Lie de* E.

Si x, y sont dans P(E), on a

$$\begin{aligned} c(xy) &= c(x)c(y) = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)(y \otimes 1 + 1 \otimes y) \\ &= xy \otimes 1 + 1 \otimes xy + x \otimes y + y \otimes x, \end{aligned}$$

d'où

$$c([x,y]) = [x,y] \otimes 1 + 1 \otimes [x,y].$$

PROPOSITION 5. — *Soit* f: E $\rightarrow$ E' *un morphisme de bigèbres. Si* x *est un élément primitif de* E, *alors* $f(x)$ *est un élément primitif de* E', *et la restriction de* f *à* P(E) *est un homomorphisme d'algèbres de Lie* $P(f)$: P(E) $\rightarrow$ P(E').

Soit c (resp. c') le coproduit de E (resp. E'). Puisque f est un morphisme de cogèbres, on a $c' \circ f = (f \otimes f) \circ c$, d'où

$$c'(f(x)) = (f \otimes f)(c(x)) = (f \otimes f)(x \otimes 1 + 1 \otimes x) = f(x) \otimes 1 + 1 \otimes f(x),$$

pour x primitif. Donc f applique P(E) dans P(E') et l'on a $f([x,y]) = [f(x), f(y)]$ puisque f est un homomorphisme d'algèbres.

Remarques. — 1) Soit p un nombre premier tel que $p.1 = 0$ dans K. La formule du binôme et les congruences $\binom{p}{i} \equiv 0 \pmod{p}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$ entraînent que P(E) est stable par l'application $x \mapsto x^p$.

2) Par définition, le diagramme

$$0 \rightarrow P(E) \rightarrow E^+ \xrightarrow{c^+} E^+ \otimes E^+$$

est une suite exacte. Si K' est un anneau commutatif et ρ: K $\rightarrow$ K' un homomorphisme d'anneaux, $\rho^*(E) = E \otimes_K K'$ est une K'-bigèbre et l'inclusion P(E) $\rightarrow$ E définit un homomorphisme de K'-algèbres de Lie

$$\alpha\colon P(E) \otimes_K K' \rightarrow P(E \otimes_K K').$$

Si K′ est *plat* sur K (AC, I, § 2, n° 3, déf. 2), il résulte de *loc. cit.* que le diagramme

$$0 \to \mathrm{P(E)} \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{K}' \to \mathrm{E}^+ \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{K}' \xrightarrow{c^+ \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{Id}_{\mathrm{K}'}} (\mathrm{E}^+ \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{K}') \otimes_{\mathrm{K}'} (\mathrm{E}^+ \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{K}')$$

est une suite exacte, ce qui entraîne que α est un *isomorphisme*.

3. Bigèbres filtrées

DÉFINITION 2. — *Soit* E *une bigèbre de coproduit c. On appelle filtration compatible avec la structure de bigèbre de* E *une suite croissante* $(\mathrm{E}_n)_{n \geqslant 0}$ *de sous-modules de* E *telle que*

$$\mathrm{E}_0 = \mathrm{K}.1, \qquad \mathrm{E} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathrm{E}_n$$

$$\mathrm{E}_m.\mathrm{E}_n \subset \mathrm{E}_{m+n} \qquad \text{pour } m \geqslant 0, n \geqslant 0$$

$$c(\mathrm{E}_n) \subset \sum_{i+j=n} \mathrm{Im}(\mathrm{E}_i \otimes \mathrm{E}_j) \qquad \text{pour } n \geqslant 0.^1 \tag{6}$$

On appelle bigèbre filtrée *une bigèbre munie d'une filtration compatible avec sa structure de bigèbre.*

Exemple. — Soient E une bigèbre graduée (A, III, p. 148, déf. 3), $(\mathrm{E}^n)_{n \geqslant 0}$ sa graduation. Posons $\mathrm{E}_n = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}^i$. La suite (E_n) est une filtration compatible avec la structure de bigèbre de E.

PROPOSITION 6. — *Soient* E *une bigèbre filtrée,* $(\mathrm{E}_n)_{n \geqslant 0}$ *sa filtration. Pour tout entier* $n \geqslant 0$, *soit* $\mathrm{E}_n^+ = \mathrm{E}_n \cap \mathrm{E}^+$. *Alors* $\mathrm{E}_0^+ = \{0\}$ *et*

$$c^+(\mathrm{E}_n^+) \subset \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Im}(\mathrm{E}_i^+ \otimes \mathrm{E}_{n-i}^+) \qquad \text{pour } n \geqslant 0.^1 \tag{7}$$

Comme $\mathrm{E}_0 = \mathrm{K}.1$, on a $\mathrm{E}_0^+ = 0$. Si $x \in \mathrm{E}_n$, on a $\pi(x) = x - \varepsilon(x).1$ (formule (1)), d'où $\pi(x) \in \mathrm{E}_n^+$ et $\pi(\mathrm{E}_n) \subset \mathrm{E}_n^+$. Il en résulte que $\pi \otimes \pi$ applique $\mathrm{Im}(\mathrm{E}_i \otimes \mathrm{E}_j)$ dans $\mathrm{Im}(\mathrm{E}_i^+ \otimes \mathrm{E}_j^+)$ pour $i \geqslant 0, j \geqslant 0$. Comme $c^+ = (\pi \otimes \pi) \circ c$ dans E^+ (n° 1, prop. 2), on a d'après (6)

$$c^+(\mathrm{E}_n^+) \subset \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Im}(\mathrm{E}_i^+ \otimes \mathrm{E}_{n-i}^+) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Im}(\mathrm{E}_i^+ \otimes \mathrm{E}_{n-i}^+).$$

COROLLAIRE. — *Les éléments de* E_1^+ *sont primitifs.*

Si $x \in \mathrm{E}_1^+$, on a $c^+(x) = 0$ d'après (7), d'où (5).

4. Bigèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

Rappelons que $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie, et U son algèbre enveloppante, munie de sa filtration canonique $(\mathrm{U}_n)_{n \geqslant 0}$.

[1] Si A et B sont deux sous-modules de E, on désigne par $\mathrm{Im}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})$ l'image de l'application canonique $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} \to \mathrm{E} \otimes \mathrm{E}$.

PROPOSITION 7. — *Il existe sur l'algèbre* U *un coproduit* c *et un seul faisant de* U *une bigèbre telle que les éléments de* $\sigma(\mathfrak{g})$ *soient primitifs. La bigèbre* (U, c) *est cocommutative; sa coünité est la forme linéaire* ε *telle que le terme constant* (chap. I, § 2, n° 1) *de tout élément* x *de* U *soit* $\varepsilon(x) . 1$. *La filtration canonique* $(\mathrm{U}_n)_{n \geqslant 0}$ *de* U *est compatible avec cette structure de bigèbre.*

a) Soit $x \in \mathfrak{g}$; posons $c_0(x) = \sigma(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(x) \in \mathrm{U} \otimes \mathrm{U}$. Si x, y sont dans $\mathfrak{g}$, on a $c_0(x)c_0(y) = (\sigma(x)\sigma(y)) \otimes 1 + 1 \otimes (\sigma(x)\sigma(y)) + \sigma(x) \otimes \sigma(y) + \sigma(y) \otimes \sigma(x)$, d'où

$$[c_0(x), c_0(y)] = c_0([x, y]).$$

D'après la propriété universelle de U (chap. I, § 2, n° 1, prop. 1), il existe un homomorphisme d'algèbres unifères, et un seul

$$c\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U} \otimes \mathrm{U}$$

tel que $c(\sigma(x)) = \sigma(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(x)$ pour $x \in \mathfrak{g}$. Cela démontre l'assertion d'unicité de la prop. 7.

b) *Montrons que* c *est coassociatif.* En effet, les applications linéaires c' et c'' de U dans $\mathrm{U} \otimes \mathrm{U} \otimes \mathrm{U}$ définies par

$$c' = (c \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{U}}) \circ c \quad \text{et} \quad c'' = (\mathrm{Id}_{\mathrm{U}} \otimes c) \circ c$$

sont des homomorphismes d'algèbres unifères qui coïncident dans $\sigma(\mathfrak{g})$ car, pour $a \in \sigma(\mathfrak{g})$, on a

$$c'(a) = a \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes a = c''(a),$$

d'où le résultat.

c) *Montrons que* c *est cocommutatif.* Soit τ l'automorphisme de $\mathrm{U} \otimes \mathrm{U}$ tel que $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ pour a, b dans U. Les applications $\tau \circ c$ et c de U dans $\mathrm{U} \otimes \mathrm{U}$ sont des homomorphismes d'algèbres unifères qui coïncident dans $\sigma(\mathfrak{g})$, d'où le résultat.

d) *Montrons que* ε *est une coünité pour* c. En effet, les applications $(\mathrm{Id}_{\mathrm{U}} \otimes \varepsilon) \circ c$ et $(\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{U}}) \circ c$ de U dans U sont des homomorphismes d'algèbres unifères qui coïncident avec Id_{U} dans $\sigma(\mathfrak{g})$.

e) On sait que $\mathrm{U}_0 = \mathrm{K}.1$, $\mathrm{U}_n \subset \mathrm{U}_{n+1}$, $\mathrm{U} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathrm{U}_n$ et $\mathrm{U}_n . \mathrm{U}_m \subset \mathrm{U}_{n+m}$ (chap. I, § 2, n° 6). Soient $a_1, \ldots, a_n$ dans $\sigma(\mathfrak{g})$. On a

$$(8) \qquad c(a_1 \ldots a_n) = \prod_{i=1}^{n} c(a_i) = \prod_{i=1}^{n} (a_i \otimes 1 + 1 \otimes a_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\alpha \in \mathrm{I}(i)} (a_{\alpha(1)} \ldots a_{\alpha(i)}) \otimes (a_{\alpha(i+1)} \ldots a_{\alpha(n)}),$$

où $\mathrm{I}(i)$ désigne l'ensemble des permutations de $[1, n]$ croissantes dans chacun des intervalles $[1, i]$ et $[i + 1, n]$. Comme U_n est le K-module engendré par les produits d'au plus n éléments de $\sigma(\mathfrak{g})$, la formule (8) entraîne que la filtration (U_n) est compatible avec la structure de bigèbre de (U, c).

DÉFINITION 3. — *La bigèbre* (U, c) *est appelée* bigèbre enveloppante *de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$.

PROPOSITION 8. — *Soit* E *une bigèbre de coproduit noté* c_E *et soit* h *un homomorphisme d'algèbres de Lie de* $\mathfrak{g}$ *dans* P(E) (nº 2, prop. 4). *L'homomorphisme d'algèbres unifères* $f\colon U \to E$ *tel que* $f(\sigma(x)) = h(x)$ *pour tout* $x \in \mathfrak{g}$ *est un morphisme de bigèbres.*

Montrons que $(f \otimes f) \circ c = c_E \circ f$. Ce sont là deux homomorphismes d'algèbres unifères de U dans $E \otimes E$, et pour $a \in \sigma(\mathfrak{g})$, on a

$$(f \otimes f)(c(a)) = f(a) \otimes 1 + 1 \otimes f(a) = c_E(f(a))$$

puisque $f(a) \in P(E)$. De même, si ε_E est la coünité de E, $\varepsilon_E \circ f$ est un homomorphisme d'algèbres unifères $U \to K$ nul dans $\sigma(\mathfrak{g})$ (nº 1, prop. 1) et coïncide donc avec ε.

Il résulte des propositions 5 et 8 que l'application $f \mapsto f \circ \sigma$ définit une correspondance biunivoque entre homomorphismes de bigèbres $U(\mathfrak{g}) \to E$ et homomorphismes d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to P(E)$.

COROLLAIRE. — *Soient* $\mathfrak{g}_i$ $(i = 1, 2)$ *une algèbre de Lie,* $U(\mathfrak{g}_i)$ *sa bigèbre enveloppante,* $\sigma_i\colon \mathfrak{g}_i \to U(\mathfrak{g}_i)$ *l'application canonique. Pour tout homomorphisme d'algèbres de Lie* $h\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$, *l'homomorphisme d'algèbres unifères* $U(h)\colon U(\mathfrak{g}_1) \to U(\mathfrak{g}_2)$ *tel que* $U(h) \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ h$ (chap. I, § 2, nº 1) *est un morphisme de bigèbres.*

5. Structure de la cogèbre $U(\mathfrak{g})$ en caractéristique 0.

Dans ce nº, on suppose que K est un *corps de caractéristique* 0.

Soient $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, c_S son coproduit (A, III, p. 139, *Exemple* 6), η l'isomorphisme canonique de l'espace vectoriel $S(\mathfrak{g})$ sur l'espace vectoriel U (chap. I, § 2, nº 7). Rappelons que si $x_1, \ldots, x_n$ sont dans $\mathfrak{g}$, on a

$$\eta(x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \sigma(x_{\tau(1)}) \ldots \sigma(x_{\tau(n)}). \tag{9}$$

En particulier, pour $x \in \mathfrak{g}$ et $n \geqslant 0$, on a

$$\eta(x^n) = \sigma(x)^n. \tag{10}$$

Remarquons, d'après A, III, p. 68, *Remarque* 3, que η est l'unique application linéaire de $S(\mathfrak{g})$ dans U satisfaisant à la condition (10).

PROPOSITION 9. — *Pour tout entier* $n \geqslant 0$, *soit* U^n *le sous-espace vectoriel de* U *engendré par les* $\sigma(x)^n$ *pour* $x \in \mathfrak{g}$.

a) La suite $(\mathrm{U}^n)_{n \geqslant 0}$ *est une graduation de l'espace vectoriel* U *compatible avec sa structure de cogèbre.*

Munissons U *de la graduation* (U^n).

b) L'application canonique $\eta : \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}$ *est un isomorphisme de cogèbres graduées.*

Soient $x \in \mathfrak{g}$ et $n \in \mathbf{N}$. On a

$$c_{\mathrm{S}}(x^n) = c_{\mathrm{S}}(x)^n = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i} \tag{11}$$

puisque c_{S} est un homomorphisme d'algèbres. De même, d'après (10),

$$\begin{aligned} c(\eta(x^n)) &= c(\sigma(x)^n) = c(\sigma(x))^n = (\sigma(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(x))^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sigma(x)^i \otimes \sigma(x)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \eta(x^i) \otimes \eta(x^{n-i}), \end{aligned} \tag{12}$$

d'où

$$(\eta \otimes \eta)(c_{\mathrm{S}}(x^n)) = c(\eta(x^n)).$$

Comme les x^n, pour $x \in \mathfrak{g}$ et $n \in \mathbf{N}$, engendrent l'espace vectoriel $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, on a $(\eta \otimes \eta) \circ c_{\mathrm{S}} = c \circ \eta$, et η est un isomorphisme de cogèbres.

Par ailleurs, la formule (10) montre que $\eta(\mathrm{S}^n(\mathfrak{g})) = \mathrm{U}^n$, ce qui achève de démontrer *a*) et *b*) compte tenu de ce que la graduation de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ est compatible avec sa structure de cogèbre.

La graduation $(\mathrm{U}^n)_{n \geqslant 0}$ de U est appelée *graduation canonique.*

COROLLAIRE. — *L'application canonique* σ *définit un isomorphisme de* $\mathfrak{g}$ *sur l'algèbre de Lie* P(U) *des éléments primitifs de* U.

Comme c^+ est un homomorphisme gradué de degré 0, on a

$$\mathrm{P(U)} = \sum_{n \geqslant 1} (\mathrm{P(U)} \cap \mathrm{U}^n).$$

Il suffit de prouver que si $n > 1$ et si $a \in \mathrm{U}^n$ est primitif, alors $a = 0$. Or a s'écrit $\sum_i \lambda_i a_i^n$, où $\lambda_i \in \mathrm{K}$, $a_i \in \sigma(\mathfrak{g})$. D'après (12), le terme de bidegré $(1, n-1)$ de $c^+(a)$ est $n \sum_i \lambda_i a_i \otimes a_i^{n-1}$. On a donc $\sum_i \lambda_i a_i \otimes a_i^{n-1} = 0$. Si $\mu : \mathrm{U} \otimes \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ est l'application linéaire définie par la multiplication de U, on a donc

$$a = \sum_i \lambda_i a_i^n = \mu\Big(\sum_i \lambda_i a_i \otimes a_i^{n-1}\Big) = 0.$$

Remarques. — 1) On a $\mathrm{U}_n = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{U}^i$ (chap. I, § 2, n° 7, cor. 4 du th. 1).

2) L'application η est l'unique morphisme de cogèbres graduées de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ dans U tel que $\eta(1) = 1$ et $\eta(x) = \sigma(x)$ pour $x \in \mathfrak{g}$. En effet, si η' est un mor-

phisme satisfaisant à ces conditions, prouvons par récurrence sur n que $\eta'(x^n) = \eta(x^n)$ pour $x \in \mathfrak{g}$ et $n > 1$. Comme $c_S^+(x^n) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i}$ d'après (3) et (11), on a $(\eta \otimes \eta)(c_S^+(x^n)) = (\eta' \otimes \eta')(c_S^+(x^n))$ par l'hypothèse de récurrence. Il s'ensuit que $c^+(\eta(x^n)) = c^+(\eta'(x^n))$; il en résulte que $\eta(x^n) - \eta'(x^n)$ est un élément primitif de degré n, donc est nul (cor. de la prop. 9).

3) Soit ψ l'isomorphisme canonique de la bigèbre $\mathsf{TS}(\mathfrak{g})$ sur la bigèbre $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$ (A, IV, § 5, cor. 1 de la prop. 12). L'application

$$\eta \circ \psi \colon \mathsf{TS}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}$$

est dite *canonique*. C'est l'unique morphisme η' de cogèbres graduées de $\mathsf{TS}(\mathfrak{g})$ dans U tel que $\eta'(1) = 1$ et $\eta'(x) = \sigma(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

4) Soit V un espace vectoriel. Les éléments primitifs de la bigèbre $\mathsf{S}(\mathrm{V})$ sont les éléments de degré 1. Cela résulte en effet du cor. de la prop. 9 appliqué à l'algèbre de Lie commutative V.

Soit $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une base du K-espace vectoriel $\mathfrak{g}$, où l'ensemble d'indices I est muni d'un ordre total. Pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^{(\mathrm{I})}$, on pose

$$e_\alpha = \prod_{i \in \mathrm{I}} \frac{\sigma(e_i)^{\alpha(i)}}{\alpha(i)!}. \tag{13}$$

Les e_α, pour $|\alpha| \leqslant n$, forment une base du K-espace vectoriel U_n (chap. I, § 2, n° 7, cor. 3 du th. 1). On a

$$e_0 = 1, \qquad e_{\varepsilon_i} = \sigma(e_i) \text{ pour } i \in \mathrm{I}.$$

Comme l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée U est commutative (*loc. cit.*, th. 1), on a, pour α, β dans $\mathbf{N}^{(\mathrm{I})}$,

$$e_\alpha . e_\beta \equiv ((\alpha, \beta)) . e_{\alpha+\beta} \qquad \text{mod. } \mathrm{U}_{|\alpha|+|\beta|-1}, \tag{14}$$

où $((\alpha, \beta)) = \prod_{i \in \mathrm{I}} \frac{(\alpha(i) + \beta(i))!}{\alpha(i)!\beta(i)!}$.

D'autre part, on a aussitôt

$$\varepsilon(e_0) = 1, \qquad \varepsilon(e_\alpha) = 0 \qquad \text{pour } |\alpha| \geqslant 1. \tag{15}$$

Enfin, la formule (12) entraîne que, pour $\alpha \in \mathbf{N}^{(\mathrm{I})}$, on a

$$c(e_\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} e_\beta \otimes e_\gamma. \tag{16}$$

Cette formule permet de déterminer l'algèbre $\mathrm{U}' = \mathrm{Hom}(\mathrm{U}, \mathrm{K})$ *duale* de la cogèbre U (A, III, p. 143). Soit en effet $\mathrm{K}[[\mathrm{X}_i]]_{i \in \mathrm{I}}$ l'algèbre des séries formelles par rapport à des indéterminées $(\mathrm{X}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ (cf. A, III, p. 28); si $\lambda \in \mathrm{U}'$, notons f_λ la série formelle

$$f_\lambda = \sum_\alpha \langle \lambda, e_\alpha \rangle \mathrm{X}^\alpha, \qquad \text{avec } \mathrm{X}^\alpha = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i^{\alpha(i)},$$

l'indice de sommation α parcourant $\mathbf{N}^{(\mathrm{I})}$.

PROPOSITION 10. — *L'application* $\lambda \mapsto f_\lambda$ *est un isomorphisme de l'algèbre* U′ *sur l'algèbre de séries formelles* $K[[X_i]]_{i \in I}$.

Du fait que (e_α) est une base de U, l'application $\lambda \mapsto f_\lambda$ est K-linéaire et bijective. D'autre part, pour λ, μ dans U′, on a

$$\begin{aligned} f_{\lambda\mu} &= \sum_\alpha \langle \lambda\mu, e_\alpha \rangle X^\alpha = \sum_\alpha \langle \lambda \otimes \mu, c(e_\alpha) \rangle X^\alpha \\ &= \sum_\alpha \langle \lambda \otimes \mu, \sum_{\beta+\gamma=\alpha} e_\beta \otimes e_\gamma \rangle X^\alpha \qquad \text{(d'après (16))} \\ &= \sum_{\beta,\gamma} \langle \lambda, e_\beta \rangle \langle \mu, e_\gamma \rangle X^{\beta+\gamma} = f_\lambda f_\mu, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\lambda \mapsto f_\lambda$ est un isomorphisme *d'algèbres*, et achève la démonstration.

6. Structure des bigèbres filtrées en caractéristique 0

Dans ce n°, on continue de supposer que K est un *corps de caractéristique* 0.

Si E est une bigèbre, l'injection canonique $P(E) \to E$ se prolonge en un morphisme de bigèbres $f_E : U(P(E)) \to E$ (n° 4, prop. 8).

THÉORÈME 1. — *Soit* E *une bigèbre cocommutative.*

a) *Le morphisme de bigèbres* $f_E : U(P(E)) \to E$ *est injectif.*

b) *S'il existe sur* E *une filtration compatible avec sa structure de bigèbre* (n° 3, déf. 2), *le morphisme* f_E *est un isomorphisme.*

(Dans le cas *b*), la bigèbre E s'identifie donc à la bigèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de ses éléments primitifs.)

Soit c_E (resp. ε_E) le coproduit (resp. la coünité) de E. Posons $\mathfrak{g} = P(E)$; soit $(e_i)_{i \in I}$ une base du K-espace vectoriel $\mathfrak{g}$, où l'ensemble d'indices I est muni d'un ordre total, et soit $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^{(I)}}$ la base de $U(\mathfrak{g})$ introduite au n° précédent. Posons $X_\alpha = f_E(e_\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbf{N}^{(I)}$. D'après (15) et (16), on a:

$$(17) \qquad \varepsilon_E(X_0) = 1, \qquad \varepsilon_E(X_\alpha) = 0 \qquad \text{pour } |\alpha| \geqslant 1,$$

$$(18) \qquad c_E(X_\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} X_\beta \otimes X_\gamma \qquad \text{pour } \alpha \in \mathbf{N}^{(I)},$$

puisque f_E est un morphisme de cogèbres.

Montrons que f_E *est injectif.* Cela résulte du lemme suivant:

Lemme 2. — *Soit* V *un espace vectoriel, et soient* E *une cogèbre,* $f : S(V) \to E$ *un morphisme de cogèbres. Si la restriction de* f *à* $S^0(V) + S^1(V)$ *est injective, alors* f *est injectif.*

Soit $n \geqslant 0$; posons $S_n = \sum_{i \leqslant n} S^i(V)$, notons c_S le coproduit de S(V), et montrons par récurrence sur n que $f \mid S_n$ est injectif. L'assertion étant triviale pour $n = 0$ et $n = 1$, supposons $n \geqslant 2$ et soit $u \in S_n$ tel que $f(u) = 0$. On a

$$\begin{aligned} 0 = c_{\mathrm{E}}(f(u)) &= (f \otimes f)(c_{\mathrm{S}}(u)) \\ &= f(u) \otimes 1 + 1 \otimes f(u) + (f \otimes f)(c_{\mathrm{S}}^{+}(u)) \\ &= (f \otimes f)(c_{\mathrm{S}}^{+}(u)). \end{aligned}$$

Comme $c_{\mathrm{S}}^{+}(u) \in \mathrm{S}_{n-1} \otimes \mathrm{S}_{n-1}$, d'après (11) l'hypothèse de récurrence montre que u est un élément primitif de $\mathrm{S}(\mathrm{V})$, donc est de degré 1 (nº 5, *Remarque* 4), donc nul, puisque $f \mid \mathrm{S}^1(\mathrm{V})$ est injectif.

Il en résulte en particulier que la famille (X_α) est *libre.*

Montrons que f_{E} *est surjectif* si E possède une filtration compatible avec sa structure de bigèbre. Soit $(\mathrm{E}_n)_{n \geqslant 0}$ une telle filtration, et posons $\mathrm{E}_n^+ = \mathrm{E}_n \cap \mathrm{Ker}(\varepsilon_{\mathrm{E}})$. Démontrons par récurrence sur n que E_n^+ est contenu dans l'image de f_{E}. Comme $\mathrm{E} = \mathrm{K}.1 + \bigcup_{n \geqslant 0} \mathrm{E}_n^+$, cela entraînera la surjectivité de f_{E}. L'assertion est triviale pour $n = 0$, et résulte du cor. de la prop. 6 du nº 3 pour $n = 1$; supposons désormais $n \geqslant 2$, et soit $x \in \mathrm{E}_n^+$. D'après la prop. 6 du nº 3, on a

$$c_{\mathrm{E}}^{+}(x) \in \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{E}_i^+ \otimes \mathrm{E}_{n-i}^+$$

et il existe d'après l'hypothèse de récurrence des scalaires $\lambda_{\alpha,\beta}$, pour α, β dans $\mathbf{N}^{(\mathrm{I})}$, nuls sauf un nombre fini d'entre eux, tels que

$$c_{\mathrm{E}}^{+}(x) = \sum_{\alpha,\beta \neq 0} \lambda_{\alpha,\beta} \mathrm{X}_\alpha \otimes \mathrm{X}_\beta. \tag{19}$$

D'après la formule (18), on a donc

$$(c_{\mathrm{E}}^{+} \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})(c_{\mathrm{E}}^{+}(x)) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma \neq 0} \lambda_{\alpha+\beta,\gamma} \mathrm{X}_\alpha \otimes \mathrm{X}_\beta \otimes \mathrm{X}_\gamma$$

$$(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \otimes c_{\mathrm{E}}^{+})(c_{\mathrm{E}}^{+}(x)) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma \neq 0} \lambda_{\alpha,\beta+\gamma} \mathrm{X}_\alpha \otimes \mathrm{X}_\beta \otimes \mathrm{X}_\gamma.$$

D'après la prop. 3 du nº 1, et l'indépendance linéaire des X_α, on a donc

$$\lambda_{\alpha+\beta,\gamma} = \lambda_{\alpha,\beta+\gamma} \qquad \text{pour } \alpha, \beta, \gamma \text{ dans } \mathbf{N}^{(\mathrm{I})} - \{0\}. \tag{20}$$

Par ailleurs, le coproduit c_{E} est cocommutatif; le même raisonnement que ci-dessus entraîne

$$\lambda_{\alpha,\beta} = \lambda_{\beta,\alpha} \qquad \text{pour } \alpha, \beta \text{ dans } \mathbf{N}^{(\mathrm{I})} - \{0\}. \tag{21}$$

Supposons qu'il existe une famille de scalaires (μ_α) *pour* $|\alpha| \geqslant 2$, *telle que*

$$\mu_{\alpha+\beta} = \lambda_{\alpha,\beta} \qquad \text{pour } \alpha, \beta \text{ dans } \mathbf{N}^{(\mathrm{I})} - \{0\}. \tag{22}$$

On a alors

$$c_{\mathrm{E}}^{+}(x) = \sum_{\alpha,\beta \neq 0} \mu_{\alpha+\beta} \mathrm{X}_\alpha \otimes \mathrm{X}_\beta = \sum_{|\gamma| \geqslant 2} \mu_\gamma c_{\mathrm{E}}^{+}(\mathrm{X}_\gamma),$$

d'après la formule (18), donc $y = x - \sum_{|\gamma| \geqslant 2} \mu_\gamma \mathrm{X}_\gamma$ est primitif, donc appartient à $\mathrm{P}(\mathrm{E}) \subset \mathrm{Im}(f_{\mathrm{E}})$. On a donc

$$x = y + \sum_{|\gamma| \geqslant 2} \mu_\gamma f_E(e_\gamma) \in \mathrm{Im}(f_E).$$

La démonstration sera donc achevée lorsque nous aurons démontré le lemme suivant:

Lemme 3. — Si une famille de scalaires $(\lambda_{\alpha,\beta})$ *de support fini* (pour α, β dans $\mathbf{N}^{(I)} - \{0\}$) *satisfait aux relations* (20) *et* (21), *il existe une famille* $(\mu_\alpha)_{|\alpha| \geqslant 2}$ *de support fini telle que* $\mu_{\alpha+\beta} = \lambda_{\alpha,\beta}$ *pour* α, β *non nuls.*

Il suffit de prouver que

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta \tag{23}$$

entraîne $\lambda_{\alpha,\beta} = \lambda_{\gamma,\delta}$ pour α, β, γ, δ non nuls. D'après le lemme de décomposition de Riesz (A, VI, § 1, n° 10, th. 1), il existe π, ρ, σ et τ dans $\mathbf{N}^{(I)}$ tels que

$$\alpha = \pi + \sigma, \qquad \beta = \rho + \tau, \qquad \gamma = \pi + \rho, \qquad \delta = \sigma + \tau.$$

Supposons $\pi \neq 0$; comme on a $\sigma + \beta = \rho + \delta$, la relation (20) entraîne

$$\lambda_{\alpha,\beta} = \lambda_{\pi+\sigma,\beta} = \lambda_{\pi,\sigma+\beta} = \lambda_{\pi,\rho+\delta} = \lambda_{\pi+\rho,\delta} = \lambda_{\gamma,\delta}.$$

Si par contre on a $\pi = 0$, on a $\beta = \gamma + \tau$ et $\delta = \alpha + \tau$, d'où

$$\lambda_{\alpha,\beta} = \lambda_{\alpha,\gamma+\tau} = \lambda_{\alpha+\tau,\gamma} = \lambda_{\delta,\gamma}$$

d'après (20), mais on a aussi $\lambda_{\delta,\gamma} = \lambda_{\gamma,\delta}$ d'après (21), d'où $\lambda_{\alpha,\beta} = \lambda_{\gamma,\delta}$.

§ 2. Algèbres de Lie libres

1. Rappels sur les algèbres libres

Soit X un ensemble. Rappelons la construction du magma libre M(X) construit sur X (A, I, p. 77). Par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$, on définit les ensembles X_n en posant $X_1 = X$ et en prenant pour X_n l'ensemble somme des ensembles $X_p \times X_{n-p}$ pour $p = 1, 2, \ldots, n-1$; si X est fini, il en est de même de chacun des X_n. L'ensemble somme de la famille $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est noté M(X); chacun des ensembles X_n (et en particulier X) est identifié à une partie de M(X). Soient w et w' dans M(X); on note p et q les entiers tels que $w \in X_p$ et $w' \in X_q$ et l'on pose $n = p + q$; l'image du couple (w, w') par l'injection canonique de $X_p \times X_{n-p}$ dans X_n se note $w.w'$ et s'appelle le produit de w et w'. Toute application de X dans un magma M se prolonge de manière unique en un homomorphisme de magmas de M(X) dans M.

Soit w dans M(X); l'unique entier n tel que $w \in X_n$ s'appelle la *longueur* de w et se note $l(w)$. On a $l(w.w') = l(w) + l(w')$ pour w, w' dans M(X). L'ensemble X est la partie de M(X) formée des éléments de longueur 1. Tout élément w de longueur $\geqslant 2$ s'écrit de manière unique sous la forme $w = w'.w''$.

L'algèbre du magma M(X) à coefficients dans l'anneau K est notée Lib(X), ou $\mathrm{Lib}_K(X)$ lorsqu'il y a lieu de préciser l'anneau K. L'ensemble M(X) est une base du K-module Lib(X), et X sera donc identifié à une partie de Lib(X). Si A est une algèbre, toute application de X dans A se prolonge de manière unique en un homomorphisme de Lib(X) dans A (A, III, p. 22, prop. 7).

2. Construction de l'algèbre de Lie libre

DÉFINITION 1. — *On appelle algèbre de Lie libre sur l'ensemble* X *l'algèbre quotient* $L(X) = \mathrm{Lib}(X)/\mathfrak{a}$ *où* $\mathfrak{a}$ *est l'idéal bilatère de* Lib(X) *engendré par les éléments de l'une des formes*

$$Q(a) = a.a \qquad \textit{pour } a \textit{ dans } \mathrm{Lib}(X), \tag{1}$$

$$J(a, b, c) = a.(b.c) + b.(c.a) + c.(a.b) \tag{2}$$

pour a, b, c *dans* Lib(X).

Il est clair que L(X) est une K-algèbre de Lie; le composé de deux éléments u, v de L(X) sera noté $[u, v]$. Lorsqu'il y a lieu de préciser l'anneau K, on écrit $L_K(X)$ pour L(X).

La proposition suivante justifie le nom d'algèbre de Lie *libre* donné à L(X).

PROPOSITION 1. — *Soient* ψ *l'application canonique de* Lib(X) *sur* L(X) *et* φ *la restriction de* ψ *à* X. *Pour toute application* f *de* X *dans une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$, *il existe un homomorphisme* $F: L(X) \to \mathfrak{g}$ *et un seul tel que* $f = F \circ \varphi$.

a) *Existence de* F: soit h l'homomorphisme de Lib(X) dans $\mathfrak{g}$ prolongeant f (n° 1). Pour tout a dans Lib(X), on a $h(Q(a)) = h(a.a) = [h(a), h(a)] = 0$; de même, l'identité de Jacobi satisfaite par $\mathfrak{g}$ entraîne $h(J(a, b, c)) = 0$ pour a, b, c dans Lib(X). On en déduit $h(\mathfrak{a}) = 0$, d'où un homomorphisme F de L(X) dans $\mathfrak{g}$ tel que $h = F \circ \psi$. Par restriction à X, on obtient $f = F \circ \varphi$.

b) *Unicité de* F: soit $F': L(X) \to \mathfrak{g}$ un homomorphisme tel que $f = F' \circ \varphi$. Les homomorphismes $F \circ \psi$ et $F' \circ \psi$ de Lib(X) dans $\mathfrak{g}$ coïncident dans X, donc sont égaux; comme ψ est surjective, on a $F = F'$.

COROLLAIRE 1. — *La famille* $(\varphi(x))_{x \in X}$ *est libre sur* K *dans* L(X).

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments distincts de X et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans K tels que

$$\lambda_1 . \varphi(x_1) + \cdots + \lambda_n . \varphi(x_n) = 0. \tag{3}$$

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie commutative ayant K comme module sous-jacent. Pour $i = 1, 2, \ldots, n$, il existe un homomorphisme F_i de L(X) dans $\mathfrak{g}$ tel que $F_i(\varphi(x_i)) = 1$ et $F_i(\varphi(x)) = 0$ pour $x \neq x_i$ (prop. 1); appliquant F_i à la relation (3), on trouve $\lambda_i = 0$.

COROLLAIRE 2. — *Soit* $\mathfrak{a}$ *une algèbre de Lie. Toute extension de* L(X) *par* $\mathfrak{a}$ *est inessentielle.*

Soit $\mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} L(X)$ une telle extension (chap. I, § 1, n° 7). Comme μ est surjective, il existe une application f de X dans $\mathfrak{g}$ telle que $\varphi = \mu \circ f$. Soit F l'homomorphisme de L(X) dans $\mathfrak{g}$ tel que $f = F \circ \varphi$ (prop. 1). On a $(\mu \circ F) \circ \varphi =$

$\mu \circ f = \varphi$, et la prop. 1 montre que $\mu \circ \mathrm{F}$ est l'automorphisme identique de $\mathrm{L}(\mathrm{X})$. L'extension donnée est donc inessentielle (chap. I, § 1, n° 7, prop. 6 et déf. 6).

Comme l'anneau K n'est pas réduit à 0, le cor. 1 de la prop. 1 montre que φ est *injective*. *On peut donc identifier au moyen de* φ *l'ensemble* X *à son image dans* $\mathrm{L}(\mathrm{X})$; avec cette convention, X engendre $\mathrm{L}(\mathrm{X})$ et toute application de X dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ *se prolonge* en un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathrm{L}(\mathrm{X})$ dans $\mathfrak{g}$.

Remarque. — Lorsque X est vide, $\mathrm{M}(\mathrm{X})$ est vide, donc $\mathrm{L}(\mathrm{X}) = \{0\}$. Si X a un seul élément x, le sous-module $\mathrm{K}.x$ de $\mathrm{L}(\mathrm{X})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{L}(\mathrm{X})$; comme X engendre $\mathrm{L}(\mathrm{X})$, le cor. 1 de la prop. 1 montre que $\mathrm{L}(\mathrm{X})$ est un module libre de base $\{x\}$.

3. Présentations d'une algèbre de Lie

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille d'éléments de $\mathfrak{g}$. On note $f_{\boldsymbol{a}}$ l'homomorphisme de $\mathrm{L}(\mathrm{I})$ dans $\mathfrak{g}$ appliquant tout $i \in \mathrm{I}$ sur a_i. L'image de $f_{\boldsymbol{a}}$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\boldsymbol{a}$; les éléments du noyau de $f_{\boldsymbol{a}}$ s'appellent les *relateurs* de la famille $\boldsymbol{a}$. On dit que la famille $\boldsymbol{a}$ est génératrice (resp. libre, basique) si $f_{\boldsymbol{a}}$ est surjectif (resp. injectif, bijectif).

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Une *présentation* de $\mathfrak{g}$ est un couple $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$ formé d'une famille génératrice $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in \mathrm{I}}$ et d'une famille $\boldsymbol{r} = (r_j)_{j \in \mathrm{J}}$ de relateurs de $\boldsymbol{a}$ engendrant l'idéal de $\mathrm{L}(\mathrm{I})$ noyau de $f_{\boldsymbol{a}}$. On dit aussi que $\mathfrak{g}$ est présentée par la famille $\boldsymbol{a}$ liée par les relateurs r_j ($j \in \mathrm{J}$).

Soient I un ensemble et $\boldsymbol{r} = (r_j)_{j \in \mathrm{J}}$ une famille d'éléments de l'algèbre de Lie libre $\mathrm{L}(\mathrm{I})$; soit $\mathfrak{a}_{\boldsymbol{r}}$ l'idéal de $\mathrm{L}(\mathrm{I})$ engendré par $\boldsymbol{r}$. L'algèbre quotient $\mathrm{L}(\mathrm{I}, \boldsymbol{r}) = \mathrm{L}(\mathrm{I})/\mathfrak{a}_{\boldsymbol{r}}$ s'appelle l'algèbre de Lie définie par I et la famille de relateurs $(r_j)_{j \in \mathrm{J}}$; on dit aussi que $\mathrm{L}(\mathrm{I}, \boldsymbol{r})$ est définie par la présentation $(\mathrm{I}, \boldsymbol{r})$, ou encore par $(\mathrm{I}; (r_j = 0)_{j \in \mathrm{J}})$. Lorsque la famille $\boldsymbol{r}$ est vide, on a $\mathrm{L}(\mathrm{I}, \boldsymbol{r}) = \mathrm{L}(\mathrm{I})$.

Soient I et $\boldsymbol{r}$ comme précédemment; notons ξ_i l'image de i dans $\mathrm{L}(\mathrm{I}, \boldsymbol{r})$. La famille génératrice $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)_{i \in \mathrm{I}}$ et la famille de relateurs $\boldsymbol{r}$ constituent une présentation de $\mathrm{L}(\mathrm{I}, \boldsymbol{r})$. Réciproquement, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$, avec $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in \mathrm{I}}$, une présentation de $\mathfrak{g}$, il existe un unique isomorphisme $u : \mathrm{L}(\mathrm{I}, \boldsymbol{r}) \to \mathfrak{g}$ tel que $u(\xi_i) = a_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$.

4. Polynômes de Lie et substitutions

Soit I un ensemble. Notons T_i l'image canonique de l'élément i de I dans $\mathrm{L}(\mathrm{I})$ (que l'on note aussi parfois $\mathrm{L}((\mathrm{T}_i)_{i \in \mathrm{I}})$); les éléments de $\mathrm{L}(\mathrm{I})$ s'appellent *polynômes de Lie* en les indéterminées $(\mathrm{T}_i)_{i \in \mathrm{I}}$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Si $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille d'éléments de $\mathfrak{g}$, notons $f_{\boldsymbol{t}}$ l'homomorphisme de $\mathrm{L}(\mathrm{I})$ dans $\mathfrak{g}$ tel que $f_{\boldsymbol{t}}(\mathrm{T}_i) = t_i$ pour $i \in \mathrm{I}$ (n° 2, prop. 1). L'image par $f_{\boldsymbol{t}}$ de l'élément P de $\mathrm{L}(\mathrm{I})$ se note $\mathrm{P}((t_i)_{i \in \mathrm{I}})$. En particulier, on a $\mathrm{P}((\mathrm{T}_i)_{i \in \mathrm{I}}) = \mathrm{P}$; l'élément $\mathrm{P}((t_i)_{i \in \mathrm{I}})$ précédent s'appelle parfois l'élément de $\mathfrak{g}$ obtenu par substitution des t_i aux T_i dans le polynôme de Lie $\mathrm{P}((\mathrm{T}_i)_{i \in \mathrm{I}})$.

Soit $\sigma: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un homomorphisme d'algèbres de Lie. Pour toute famille $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'éléments de $\mathfrak{g}$ et tout $\mathrm{P} \in \mathrm{L}(\mathrm{I})$, on a

(4) $$\sigma(\mathrm{P}((t_i)_{i \in \mathrm{I}})) = \mathrm{P}((\sigma(t_i))_{i \in \mathrm{I}}),$$

car $\sigma \circ f_t$ applique T_i sur $\sigma(t_i)$, pour $i \in \mathrm{I}$.

Soit $(\mathrm{Q}_j)_{j \in \mathrm{J}}$ une famille d'éléments de $\mathrm{L}(\mathrm{I})$, et soit $\mathrm{P} \in \mathrm{L}(\mathrm{J})$. Par substitution des Q_j aux T_j dans P, on obtient un polynôme de Lie $\mathrm{R} = \mathrm{P}((\mathrm{Q}_j)_{j \in \mathrm{J}}) \in \mathrm{L}(\mathrm{I})$. On a

(5) $$\mathrm{R}((t_i)_{i \in \mathrm{I}}) = \mathrm{P}((\mathrm{Q}_j((t_i)_{i \in \mathrm{I}}))_{j \in \mathrm{J}}),$$

pour toute famille $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'éléments d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, comme on le voit en transformant par l'homomorphisme f_t l'égalité $\mathrm{R} = \mathrm{P}((\mathrm{Q}_j)_{j \in \mathrm{J}})$ et en tenant compte de (4).

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, I un ensemble fini, et $\mathrm{P} \in \mathrm{L}(\mathrm{I})$. Supposons que $\mathfrak{g}$ soit un K-module libre. L'application

$$\tilde{\mathrm{P}}: \mathfrak{g}^{\mathrm{I}} \to \mathfrak{g}$$

définie par $\tilde{\mathrm{P}}((t_i)_{i \in \mathrm{I}}) = \mathrm{P}((t_i)_{i \in \mathrm{I}})$ est alors *polynomiale*.[1] En effet, l'ensemble F des applications de $\mathfrak{g}^{\mathrm{I}}$ dans $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie pour le crochet défini par

(6) $$[\varphi, \psi](\boldsymbol{t}) = [\varphi(\boldsymbol{t}), \psi(\boldsymbol{t})];$$

l'ensemble F′ des applications polynomiales de $\mathfrak{g}^{\mathrm{I}}$ dans $\mathfrak{g}$ en est une sous-algèbre de Lie, d'après la bilinéarité du crochet. Notre assertion résulte alors de ce que l'application $\mathrm{P} \mapsto \tilde{\mathrm{P}}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie et que $\tilde{\mathrm{T}}_i = \mathrm{pr}_i \in \mathrm{F}'$ pour tout i.

5. Propriétés fonctorielles

Proposition 2. — *Soient* X *et* Y *deux ensembles. Toute application* $u: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *se prolonge de manière unique en un homomorphisme d'algèbres de Lie* $\mathrm{L}(u): \mathrm{L}(\mathrm{X}) \to \mathrm{L}(\mathrm{Y})$. *Pour toute application* $v: \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$, *on a* $\mathrm{L}(v \circ u) = \mathrm{L}(v) \circ \mathrm{L}(u)$.

L'existence et l'unicité de $\mathrm{L}(u)$ résultent de la prop. 1 du nº 2. Les homomorphismes $\mathrm{L}(v \circ u)$ et $\mathrm{L}(v) \circ \mathrm{L}(u)$ ont même restriction à X, donc sont égaux (prop. 1).

Corollaire. — *Si u est injective* (resp. *surjective, bijective*), *il en est de même de* $\mathrm{L}(u)$.

L'assertion étant triviale pour $\mathrm{X} = \emptyset$, supposons $\mathrm{X} \neq \emptyset$. Si u est injective, il existe une application v de Y dans X telle que $v \circ u$ soit l'application identique de X; d'après la prop. 2, $\mathrm{L}(v) \circ \mathrm{L}(u)$ est l'automorphisme identique de $\mathrm{L}(\mathrm{X})$, donc

[1] Rappelons (A, IV, § 5, nº 10, nelle édition) la définition des applications polynomiales d'un module libre M dans un module N: si q est un entier $\geqslant 0$, on dit qu'une application f: M → N est *polynomiale homogène de degré q* s'il existe une application multilinéaire u de M^q dans N telle que

$$f(x) = u(x, \ldots, x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathrm{M}.$$

Une application de M dans N est dite *polynomiale* si elle est somme finie d'applications polynomiales homogènes de degrés convenables.

$L(u)$ est injective. Lorsque u est surjective, il existe une application w de Y dans X telle que $u \circ w$ soit l'application identique de Y; alors $L(u) \circ L(w)$ est l'application identique de $L(Y)$, ce qui prouve que $L(u)$ est surjective.

Soit X un ensemble et soit S une partie de X. Le corollaire précédent montre que l'injection canonique de S dans X se prolonge en un isomorphisme α de $L(S)$ sur la sous-algèbre de Lie $L'(S)$ de $L(X)$ engendrée par S; *nous identifierons* $L(S)$ *et* $L'(S)$ au moyen de α.

Soit $(S_\alpha)_{\alpha\in I}$ une *famille filtrante croissante* de parties de X, de réunion S. La relation $S_\alpha \subset S_\beta$ entraîne $L(S_\alpha) \subset L(S_\beta)$, donc la famille des sous-algèbres de Lie $L(S_\alpha)$ de $L(X)$ est filtrante croissante. Par suite, $\mathfrak{g} = \bigcup_{\alpha\in I} L(S_\alpha)$ est une sous-algèbre de Lie de $L(X)$; on a $S \subset \mathfrak{g}$, d'où $L(S) \subset \mathfrak{g}$, et comme $L(S_\alpha) \subset L(S)$ pour tout $\alpha \in I$, on a $\mathfrak{g} \subset L(S)$. Donc

$$L\Big(\bigcup_{\alpha\in I} S_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in I} L(S_\alpha) \tag{7}$$

pour toute famille *filtrante croissante* $(S_\alpha)_{\alpha\in I}$ de parties de X.

Appliquant ce qui précède à la famille des parties finies de X, on voit que tout élément de $L(X)$ est de la forme $P(x_1, \ldots, x_n)$ où P est un polynôme de Lie à n indéterminées et $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de X.

PROPOSITION 3. — *Soit* K' *un anneau commutatif non réduit à* $\{0\}$, *et soit* $u\colon K \to K'$ *un homomorphisme d'anneaux. Pour tout ensemble* X, *il existe un homomorphisme de* K'-*algèbres de Lie et un seul*

$$v\colon\ L_K(X) \otimes K' \to L_{K'}(X)$$

tel que $v(x \otimes 1) = x$ *pour* $x \in X$. *De plus,* v *est un isomorphisme.*

Appliquant la prop. 1 à $\mathfrak{g} = L_{K'}(X)$ considérée comme K-algèbre de Lie, et à l'application $x \mapsto x$ de X dans $\mathfrak{g}$, on obtient un K-homomorphisme $L_K(X) \to L_{K'}(X)$, d'où un K'-homomorphisme $v\colon L_K(X) \otimes K' \to L_{K'}(X)$. Le fait que v soit unique et soit un isomorphisme résulte du ce que le couple $(L_K(X) \otimes K', x \mapsto x \otimes 1)$ est solution du même problème universel que le couple $(L_{K'}(X), x \mapsto x)$.

Remarque. — Soient $\mathfrak{h}'$ une K'-algèbre de Lie et $\mathfrak{h}$ la K-algèbre de Lie déduite de $\mathfrak{h}'$ par restriction de l'anneau des scalaires. Si $P \in L_K(X)$, on peut définir $\tilde{P}\colon \mathfrak{h}^X \to \mathfrak{h}$ (n° 4). On voit aussitôt que

$$\tilde{P} = (v(P \otimes 1))^{\sim}.$$

6. Graduations

Soit Δ un monoïde commutatif, noté additivement. On note φ_0 une application de X dans Δ et φ l'homomorphisme du magma libre $M(X)$ dans Δ qui prolonge φ_0. Pour tout $\delta \in \Delta$, soit $\mathrm{Lib}^\delta(X)$ le sous-module de $\mathrm{Lib}(X)$ ayant pour base la partie $\varphi^{-1}(\delta)$ de $M(X)$. La famille $(\mathrm{Lib}^{\delta}(X))_{\delta\in\Delta}$ est une graduation de l'algèbre $\mathrm{Lib}(X)$, c'est-à-dire que l'on a

$$\mathrm{Lib}(X) = \bigoplus_{\delta\in\Delta} \mathrm{Lib}^{\delta}(X) \tag{8}$$

$$\mathrm{Lib}^{\delta}(X).\mathrm{Lib}^{\delta'}(X) \subset \mathrm{Lib}^{\delta+\delta'}(X) \qquad \text{pour } \delta, \delta' \text{ dans } \Delta \tag{9}$$

(A, III, p. 31, *Exemple* 3).

Lemme 1. — *L'idéal* $\mathfrak{a}$ *de la définition* 1 *est gradué.*

Pour a, b dans $\mathrm{Lib}(X)$, posons $B(a, b) = a.b + b.a$. Les formules

$$B(a, b) = Q(a + b) - Q(a) - Q(b) \tag{10}$$

$$Q(\lambda_1.w_1 + \cdots + \lambda_n.w_n) = \sum_i \lambda_i^2 Q(w_i) + \sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j B(w_i, w_j) \tag{11}$$

pour $w_1, \ldots, w_n$ dans $M(X)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans K, montrent que les familles $(Q(a))_{a\in\mathrm{Lib}(X)}$ et $(Q(w), B(w, w'))_{w,w'\in M(X)}$ engendrent le même sous-module de $\mathrm{Lib}(X)$. Comme J est trilinéaire, l'idéal $\mathfrak{a}$ est engendré par les éléments homogènes $Q(w)$, $B(w, w')$ et $J(w, w', w'')$ pour w, w', w'' dans $M(X)$, donc est gradué (A, III, p. 32, prop. 1).

C.Q.F.D.

Munissons l'algèbre de Lie $L(X) = \mathrm{Lib}(X)/\mathfrak{a}$ de la graduation quotient. La composante homogène de degré δ de $L(X)$ est notée $L^{\delta}(X)$; c'est le sous-module de $L(X)$ engendré par les images des éléments $w \in M(X)$ tels que $\varphi(w) = \delta$.

Nous utiliserons surtout les deux cas particuliers suivants :

a) *Graduation totale*: on prend $\Delta = \mathbf{N}$ et $\varphi_0(x) = 1$ pour tout $x \in X$, d'où $\varphi(w) = l(w)$ pour w dans $M(X)$. Le K-module $L^n(X)$ est engendré par les images des éléments de longueur n dans $M(X)$, que nous appellerons *alternants de degré n*. Nous verrons plus tard que le module $L^n(X)$ est libre et admet une base formée d'alternants de degré n (nº 11, th. 1). On a $L(X) = \bigoplus_{n\geqslant 1} L^n(X)$, et $L^1(X)$ admet X pour base (nº 2, cor. 1 de la prop. 1). Par construction de $M(X)$, on a

$$L^n(X) = \sum_{p=1}^{n-1} [L^p(X), L^{n-p}(X)] \tag{12}$$

et en particulier

$$[L^m(X), L^n(X)] \subset L^{m+n}(X). \tag{13}$$

b) *Multigraduation*: on prend pour Δ le monoïde commutatif libre $\mathbf{N}^{(X)}$ construit sur X. L'application φ_0 de X dans Δ est définie par $(\varphi_0(x))(x') = \delta_{xx'}$, où $\delta_{xx'}$ est le symbole de Kronecker. Pour $w \in M(X)$ et $x \in X$, l'entier $(\varphi(w))(x)$ est « le nombre d'occurrences de la lettre x dans w ». Pour α dans $\mathbf{N}^{(X)}$, on pose $|\alpha| = \sum_{x\in X} \alpha(x)$, d'où $|\varphi(w)| = l(w)$ pour tout w dans $M(X)$. On en déduit

$$(14)\qquad L^n(X) = \bigoplus_{|\alpha|=n} L^\alpha(X);$$

on a évidemment

$$(15)\qquad [L^\alpha(X), L^\beta(X)] \subset L^{\alpha+\beta}(X) \qquad \text{pour } \alpha, \beta \text{ dans } \mathbf{N}^{(X)}.$$

PROPOSITION 4. — *Soit* S *une partie de* X. *Si l'on identifie* $\mathbf{N}^{(S)}$ *à son image canonique dans* $\mathbf{N}^{(X)}$ (A, I, p. 89), *on a* $L(S) = \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^{(S)}} L^\alpha(X)$. *De plus, pour tout* $\alpha \in \mathbf{N}^{(S)}$, *la composante homogène de degré* α *pour la multigraduation de* L(S) *est égale à* $L^\alpha(X)$.

Soit $\alpha \in \mathbf{N}^{(S)}$. Le module $L^\alpha(S)$ est engendré par les images dans L(X) des éléments *w de* M(S) tels que $\varphi(w) = \alpha$, c'est-à-dire (A, I, p. 91, formules (23) et (24)) l'ensemble des *w de* M(X) tels que $\varphi(w) = \alpha$. On a donc $L^\alpha(S) = L^\alpha(X)$. La proposition résulte de là et de la relation $L(S) = \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^{(S)}} L^\alpha(S)$.

COROLLAIRE. — *Pour toute famille* $(S_i)_{i\in I}$ *de parties de* X, *on a*

$$(16)\qquad L\Big(\bigcap_{i\in I} S_i\Big) = \bigcap_{i\in I} L(S_i).$$

Cela résulte de la prop. 4 et de la formule évidente

$$(17)\qquad \mathbf{N}^{(S)} = \bigcap_{i\in I} \mathbf{N}^{(S_i)}$$

où l'on a posé $S = \bigcap_{i\in I} S_i$.

7. Suite centrale descendante

PROPOSITION 5. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie et* P *un sous-module de* $\mathfrak{g}$. *Définissons les sous-modules* P_n *de* $\mathfrak{g}$ *par les formules* $P_1 = P$ *et* $P_{n+1} = [P, P_n]$ *pour* $n \geqslant 1$. *Alors on a*

$$(18)\qquad [P_m, P_n] \subset P_{m+n},$$

$$(19)\qquad P_n = \sum_{p=1}^{n-1} [P_p, P_{n-p}] \quad \textit{pour } n \geqslant 2.$$

Démontrons (18) par récurrence sur *m*. Le cas $m = 1$ est clair. D'après l'identité de Jacobi, on a

$$[[P, P_m], P_n] \subset [P_m, [P, P_n]] + [P, [P_m, P_n]],$$

c'est-à-dire

$$[P_{m+1}, P_n] \subset [P_m, P_{n+1}] + [P, [P_m, P_n]].$$

L'hypothèse de récurrence entraîne $[P_m, P_{n+1}] \subset P_{m+n+1}$ et $[P_m, P_n] \subset P_{m+n}$, d'où

$$[P_{m+1}, P_n] \subset P_{m+n+1} + [P, P_{m+n}] = P_{m+n+1}.$$

D'après la formule (18), on a $P_n \supset \sum_{p=1}^{n-1} [P_p, P_{n-p}] \supset [P_1, P_{n-1}] = P_n$, d'où (19).

Lorsque l'on prend $P = \mathfrak{g}$, la suite (P_n) est la *suite centrale descendante* $(\mathscr{C}^n\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ (chap. I, § 1, n° 5, 2ème édition).[1] On a donc:

PROPOSITION 6. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $(\mathscr{C}^n\mathfrak{g})_{n\geqslant 1}$ la suite centrale descendante de $\mathfrak{g}$. On a*

$$[\mathscr{C}^m\mathfrak{g}, \mathscr{C}^n\mathfrak{g}] \subset \mathscr{C}^{m+n}\mathfrak{g} \qquad \textit{pour } m \geqslant 1 \textit{ et } n \geqslant 1.$$

Généralisant la déf. 1 du chap. I, § 4, n° 1, nous dirons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *nilpotente* si $\mathscr{C}^n\mathfrak{g} = \{0\}$ pour n assez grand. On appelle *classe de nilpotence* d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ le plus petit entier n tel que $\mathscr{C}^{n+1}\mathfrak{g} = \{0\}$.

PROPOSITION 7. — *Soit X un ensemble et soit n un entier $\geqslant 1$.*

a) On a $L^{n+1}(X) = [L^1(X), L^n(X)]$.

b) Le module $L^n(X)$ est engendré par les éléments $[x_1, [x_2, \ldots, [x_{n-1}, x_n]\ldots]]$ où $(x_1, \ldots, x_n)$ parcourt l'ensemble des suites de n éléments de X.

c) La suite centrale descendante de $L(X)$ est donnée par $\mathscr{C}^n(L(X)) = \sum_{p\geqslant n} L^p(X)$.

a) Nous appliquerons la prop. 5 avec $\mathfrak{g} = L(X)$ et $P = L^1(X)$. Par récurrence sur n, on déduit de (12) (n° 6) et (19) l'égalité $P_n = L^n(X)$. La relation cherchée équivaut alors à la définition $[P, P_n] = P_{n+1}$.

b) Cela résulte de *a)* par récurrence sur n.

c) Posons $\mathfrak{g} = L(X)$ et $\mathfrak{g}_n = \sum_{p\geqslant n} L_p(X)$. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1$ et la formule (13) du n° 6 entraîne $[\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_m] \subset \mathfrak{g}_{n+m}$, et en particulier $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_n] \subset \mathfrak{g}_{n+1}$. Par récurrence sur n, on a $\mathscr{C}^n\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_n$. Par ailleurs, de *a)* on déduit $L^n(X) \subset \mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ par récurrence sur n. Comme $\mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, la relation $L^p(X) \subset \mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ entraîne

$$L^{p+1}(X) = [L^1(X), L^p(X)] \subset \mathscr{C}^n\mathfrak{g}$$

d'après *a)*. On a donc $L^p(X) \subset \mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ pour $p \geqslant n$, d'où $\mathfrak{g}_n \subset \mathscr{C}^n\mathfrak{g}$.

COROLLAIRE. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice dans $\mathfrak{g}$. Le n-ième terme $\mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ de la suite centrale descendante de $\mathfrak{g}$ est le module engendré par les crochets itérés $[x_{i_1}, [x_{i_2}, \ldots, [x_{i_{p-1}}, x_{i_p}]\ldots]]$ pour $p \geqslant n$ et $i_1, \ldots, i_p$ dans I.*

Soit f l'homomorphisme de $L(I)$ dans $\mathfrak{g}$ tel que $f(i) = x_i$ pour tout $i \in I$. Comme $(x_i)_{i\in I}$ engendre $\mathfrak{g}$, on a $\mathfrak{g} = f(L(I))$, d'où $\mathscr{C}^n\mathfrak{g} = f(\mathscr{C}^n(L(I)))$ d'après la prop. 4 du chap. I, § 1, n° 5. Le corollaire résulte alors des assertions *b)* et *c)* de la prop. 7.

[1] Avec la définition adoptée dans la première édition du chap. I, on aurait $P_n = \mathscr{C}^{n-1}\mathfrak{g}$.

8. Dérivations des algèbres de Lie libres

PROPOSITION 8. — *Soit* X *un ensemble, soit* M *un* L(X)*-module et soit d une application de* X *dans* M. *Il existe une application linéaire* D *de* L(X) *dans* M, *et une seule, prolongeant d et satisfaisant à la relation*:

$$\text{(20)} \qquad D([a, a']) = a.D(a') - a'.D(a) \qquad \textit{pour } a, a' \textit{ dans } L(X).$$

On définit une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ayant pour module sous-jacent $M \times L(X)$ au moyen du crochet

$$\text{(21)} \qquad [(m, a), (m', a')] = (a.m' - a'.m, [a, a']),$$

pour a, a' dans L(X) et m, m' dans M (chap. I, § 1, n° 8). Soit f l'homomorphisme de L(X) dans $\mathfrak{g}$ tel que $f(x) = (d(x), x)$ pour tout x dans X; posons $f(a) = (D(a), u(a))$ pour tout a dans L(X). D'après la formule (21), u est un homomorphisme de L(X) dans elle-même; comme on a $u(x) = x$ pour x dans X, on a $u(a) = a$ pour tout a dans L(X), d'où

$$\text{(22)} \qquad f(a) = (D(a), a).$$

D'après (21) et (22), la relation (20) découle alors de $f([a, a']) = [f(a), f(a')]$.

Réciproquement, soit D′ une application de L(X) dans M qui satisfasse à la relation (20′) analogue à (20) et prolonge d. Posons $f'(a) = (D'(a), a)$ pour $a \in L(X)$; d'après (20′) et (21), f' est un homomorphisme de L(X) dans $\mathfrak{g}$, coïncidant avec f dans X, d'où $f' = f$ et $D' = D$.

COROLLAIRE. — *Toute application de* X *dans* L(X) *se prolonge de manière unique en une dérivation de* L(X).

Lorsque M est égal à L(X) muni de la représentation adjointe, la relation (20) signifie que D est une dérivation.

9. Théorème d'élimination

PROPOSITION 9. — *Soient* S_1 *et* S_2 *deux ensembles disjoints et d une application de* $S_1 \times S_2$ *dans* $L(S_2)$. *Soit* $\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie quotient de* $L(S_1 \cup S_2)$ *par l'idéal qu'engendrent les éléments* $[s_1, s_2] - d(s_1, s_2)$ *pour* $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$; *soit* ψ *l'application canonique de* $L(S_1 \cup S_2)$ *sur* $\mathfrak{g}$.

a) *Pour* $i = 1, 2$, *la restriction* φ_i *de* ψ *à* S_i *se prolonge en un isomorphisme de* $L(S_i)$ *sur une sous-algèbre* $\mathfrak{a}_i$ *de* $\mathfrak{g}$.

b) *On a* $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = \{0\}$ *et* $\mathfrak{a}_2$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$.

Pour $i = 1, 2$, notons ψ_i l'homomorphisme de $L(S_i)$ dans $\mathfrak{g}$ qui prolonge φ_i, et $\mathfrak{a}_i$ son image. Il est clair que $\varphi_i(S_i)$ engendre $\mathfrak{a}_i$.

Soit $s_1 \in S_1$; on pose $D = \operatorname{ad} \varphi_1(s_1)$. La dérivation D de $\mathfrak{g}$ applique $\varphi_2(S_2)$ dans $\mathfrak{a}_2$ d'après la relation

$$[\varphi_1(s_1), \varphi_2(s_2)] = \psi_2(d(s_1, s_2)) \qquad \text{pour } s_2 \in S_2;$$

comme la sous-algèbre $\mathfrak{a}_2$ de $\mathfrak{g}$ est engendrée par $\varphi_2(S_2)$, on a donc $D(\mathfrak{a}_2) \subset \mathfrak{a}_2$. L'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $\operatorname{ad} x$ laisse stable $\mathfrak{a}_2$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, qui contient $\varphi_1(S_1)$ d'après ce qui précède, donc aussi $\mathfrak{a}_1$. On a donc

$$(23) \qquad [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2] \subset \mathfrak{a}_2.$$

Par suite $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, et comme elle contient l'ensemble générateur $\varphi_1(S_1) \cup \varphi_2(S_2)$, on a

$$(24) \qquad \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{g}.$$

Pour tout $s_1 \in S_1$, il existe une dérivation D_{s_1} de $L(S_2)$ telle que $D_{s_1}(s_2) = d(s_1, s_2)$ pour tout s_2 dans S_2 (n° 8, cor. de la prop. 8). L'application $s_1 \mapsto D_{s_1}$ se prolonge en un homomorphisme D de $L(S_1)$ dans l'algèbre de Lie des dérivations de $L(S_2)$. Soit $\mathfrak{h}$ le produit semi-direct de $L(S_1)$ par $L(S_2)$ correspondant à D (chap. I, § 1, n° 8). En tant que module, $\mathfrak{h}$ est égal à $L(S_1) \times L(S_2)$, et l'on a en particulier

$$(25) \qquad [(s_1, 0), (0, s_2)] = (0, d(s_1, s_2))$$

pour $s_1 \in S_1$ et $s_2 \in S_2$.

De (25) on déduit l'existence d'un homomorphisme f de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$ tel que $f(\varphi_1(s_1)) = (s_1, 0)$ et $f(\varphi_2(s_2)) = (0, s_2)$ pour $s_1 \in S_1$ et $s_2 \in S_2$. On en déduit aussitôt la relation

$$(26) \qquad f(\psi_1(a_1) + \psi_2(a_2)) = (a_1, a_2)$$

pour $a_1 \in L(S_1)$ et $a_2 \in L(S_2)$.

La relation (26) montre que ψ_1 et ψ_2 sont injectifs et que $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = \{0\}$. Les formules (23) et (24) entraînent alors la proposition.

PROPOSITION 10 (théorème d'élimination). — *Soient* X *un ensemble,* S *une partie de* X, *et* T *l'ensemble des suites* $(s_1, \ldots, s_n, x)$ *avec* $n \geqslant 0$, $s_1, \ldots, s_n$ *dans* S *et* x *dans* $X - S$.[1]

a) Le module L(X) *est somme directe de la sous-algèbre* L(S) *de* L(X) *et de l'idéal* $\mathfrak{a}$ *de* L(X) *engendré par* $X - S$.

b) Il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie φ *de* L(T) *sur* $\mathfrak{a}$ *qui transforme* $(s_1, \ldots, s_n, x)$ *en* $(\operatorname{ad} s_1 \circ \ldots \circ \operatorname{ad} s_n)(x)$.

[1] Pour $n = 0$, on obtient les éléments de $X - S$, d'où $X - S \subset T$.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie construite comme dans la prop. 9 avec les données

$$S_1 = S, \qquad S_2 = T, \qquad d(s, t) = (s, s_1, \ldots, s_n, x) \in T \subset L(T)$$

pour $t = (s_1, \ldots, s_n, x)$ dans T et $s \in S_1$. Nous identifions L(S) et L(T) à leurs images canoniques dans $\mathfrak{g}$ (prop. 9, *a*)).

Soit ψ l'application $(s_1, \ldots, s_n, x) \mapsto (\operatorname{ad} s_1 \circ \cdots \circ \operatorname{ad} s_n)(x)$ de T dans L(X). On a évidemment $\psi(d(s, t)) = [s, \psi(t)]$ pour $s \in S$ et $t \in T$, et il existe donc un homomorphisme $\alpha \colon \mathfrak{g} \to L(X)$ dont la restriction à S est l'identité et dont la restriction à T est ψ. On a $X - S \subset T$, d'où un homomorphisme $\beta \colon L(X) \to \mathfrak{g}$ dont la restriction à $X = S \cup (X - S)$ est l'identité.

Montrons que α est un isomorphisme, et β l'isomorphisme réciproque. Comme on a $\psi(x) = x$ pour x dans $X - S$, on voit que $\alpha \circ \beta$ coïncide avec l'identité dans X, d'où $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{L(X)}$. On a par ailleurs $[s, t] = d(s, t)$ dans $\mathfrak{g}$ pour $s \in S$, $t \in T$, par construction même; on en déduit que $t = (s_1, \ldots, s_n, x)$ est égal dans $\mathfrak{g}$ à $(\operatorname{ad} s_1 \circ \cdots \circ \operatorname{ad} s_n)(x)$, d'où $t = \beta(\alpha(t))$. Comme on a $\beta(\alpha(s)) = s$ pour $s \in S$ et que $S \cup T$ engendre $\mathfrak{g}$, on a $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$.

Comme α est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur L(X), la prop. 9 montre que la restriction de α à L (T) est un isomorphisme φ de L(T) sur un idéal $\mathfrak{b}$ de L(X), tel que le module L(X) soit somme directe de L(S) et $\mathfrak{b}$. On a évidemment

$$\varphi(s_1, \ldots, s_n, x) = (\operatorname{ad} s_1 \circ \ldots \circ \operatorname{ad} s_n)(x)$$

pour $(s_1, \ldots, s_n, x)$ dans T.

On a donc $\varphi(T) \subset \mathfrak{a}$, d'où $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ puisque $\varphi(T)$ engendre la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de L(X). Mais $\mathfrak{b}$ est un idéal et $X - S \subset \varphi(T) \subset \mathfrak{b}$, d'où $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$.

COROLLAIRE. — *Soit $y \in X$. L'algèbre de Lie libre* L(X) *est somme directe du sous-module libre* $K.y$ *et de la sous-algèbre de Lie admettant comme famille basique la famille des* $((\operatorname{ad} y)^n.z)$ *pour* $n \geqslant 0$ *et* $z \in X - \{y\}$.

Il suffit de faire $S = \{y\}$ dans la prop. 10.

10. Ensembles de Hall dans un magma libre

Soient X un ensemble, M(X) le magma libre construit sur X et $M^n(X)$, pour $n \in \mathbf{N}^*$, l'ensemble des éléments de M(X) de longueur n (n° 1). Si $w \in M(X)$ et $l(w) \geqslant 2$, on note $\alpha(w)$ et $\beta(w)$ les éléments de M(X) déterminés par la relation $w = \alpha(w)\beta(w)$; on a $l(\alpha(w)) < l(w)$, $l(\beta(w)) < l(w)$. Enfin, pour u, v dans M(X), on note $u^m v$ l'élément défini par récurrence sur l'entier $m \geqslant 0$ par $u^0 v = v$ et $u^{m+1}v = u(u^m v)$.

DÉFINITION 2. — *On appelle* ensemble de Hall relatif à X *toute partie* H *de* M(X) *munie d'une relation d'ordre total satisfaisant aux conditions suivantes*:

(A) *Si* $u \in H$, $v \in H$ *et* $l(u) < l(v)$, *on a* $u < v$.

(B) *On a* $X \subset H$ *et* $H \cap M^2(X)$ *se compose des produits* xy *avec* x, y *dans* X *et* $x < y$.

(C) *Un élément* w *de* M(X) *de longueur* $\geqslant 3$ *appartient à* H *si et seulement s'il est de la forme* $a(bc)$ *avec* a, b, c *dans* H, $bc \in H$, $b \leqslant a < bc$ *et* $b < c$.

PROPOSITION 11. — *Il existe un ensemble de Hall relatif à* X.

Nous allons construire par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$ des ensembles $H_n \subset M^n(X)$ et une relation d'ordre total sur chacun de ces ensembles:

a) On pose $H_1 = X$ et on le munit d'une relation d'ordre total.

b) L'ensemble H_2 se compose des produits xy avec x, y dans X et $x < y$. On le munit d'un ordre total.

c) Soit $n \geqslant 3$ tel que les ensembles totalement ordonnés $H_1, \ldots, H_{n-1}$ soient déjà définis. L'ensemble $H'_{n-1} = H_1 \cup \cdots \cup H_{n-1}$ est muni de la relation d'ordre total qui induit les relations données sur $H_1, \ldots, H_{n-1}$ et telle que l'on ait $w < w'$ si $l(w) < l(w')$. On définit H_n comme l'ensemble des produits $a(bc) \in M^n(X)$ avec a, b, c dans H'_{n-1} satisfaisant aux relations $bc \in H'_{n-1}$, $b \leqslant a < bc$, $b < c$ et on munit H_n d'une structure d'ordre total.

Posons $H = \bigcup_{n \geqslant 1} H_n$; on munit H de l'ordre total défini ainsi: on a $w \leqslant w'$ si et seulement si $l(w) < l(w')$ ou bien $l(w) = l(w') = n$ et $w \leqslant w'$ dans l'ensemble H_n. Il est immédiat que H est un ensemble de Hall relatif à X.

Pour toute partie S de X, nous identifions le magma libre M(S) à son image canonique dans M(X).

PROPOSITION 12. — *Soit* H *un ensemble de Hall relatif à* X *et soient* x, y *dans* X.

a) *On a* $H \cap M(\{x\}) = \{x\}$.

b) *Supposons* $x < y$ *et soit* d_y *l'homomorphisme de* M(X) *dans* **N** *tel que* $d_y(y) = 1$ *et* $d_y(z) = 0$ *pour* $z \in X$, $z \neq y$. *L'ensemble des éléments* $w \in H \cap M(\{x, y\})$ *tels que* $d_y(w) = 1$ *se compose des éléments* $x^n y$ *pour* n *entier* $\geqslant 0$.

D'après la déf. 2 (B), on a $x \in H$ et $H \cap M^2(\{x\}) = \emptyset$. Si $w \in H \cap M(\{x\})$, avec $n = l(w) \geqslant 3$, les éléments $\alpha(w)$ et $\beta(w)$ appartiennent aussi à $H \cap M(\{x\})$ d'après la déf. 2 (C). On en déduit aussitôt par récurrence sur n que $H \cap M^n(\{x\}) = \emptyset$ pour $n \geqslant 2$, d'où *a*).

Démontrons maintenant *b*). D'après la déf. 2 (B), on a $y \in H$ et $xy \in H$. Démontrons par récurrence sur n que $x^n y \in H$ pour n entier $\geqslant 2$. On a $x^n y = x(x(x^{n-2}y))$ et l'hypothèse de récurrence entraîne que $x^{n-2}y \in H$. On a $l(x) < l(x^{n-2}y)$ pour $n > 2$ et $x < y$, d'où $x < x^{n-2}y$ dans tous les cas; la condition (C) de la déf. 2 montre que $x^n y \in H$. D'autre part, on a bien $d_y(x^n y) = 1$. Inversement, soit $w \in H \cap M(\{x, y\})$, avec $d_y(w) = 1$. Si $l(w) = 1$, on a $w = y$; si $l(w) = 2$, on a $w = xy$ d'après la déf. 2 (B). Si $l(w) \geqslant 3$, on a $w = a(bc)$, avec a, b, c, bc dans $H \cap M(\{x, y\})$ (déf. 2 (C)). On ne peut pas avoir $d_y(bc) = 0$, car ceci entraînerait $bc \in M(\{x\})$, ce qui est impossible d'après *a*).

On a donc $d_y(bc) = 1$ et $d_y(a) = 0$, d'où $a = x$ d'après *a*). On en déduit aussitôt par récurrence sur $n = l(w)$ que $w = x^{n-1}y$, ce qui achève la démonstration de *b*).

COROLLAIRE. — *Si* Card X $\geqslant 2$, *on a* $\mathrm{H} \cap \mathrm{M}^n(\mathrm{X}) \neq \emptyset$, *pour tout entier* $n \geqslant 1$.

PROPOSITION 13. — *Soit* X *un ensemble fini possédant au moins deux éléments. On note* H *un ensemble de Hall relatif à* X. *Il existe alors une bijection strictement croissante* $p \mapsto w_p$ *de* $\mathbf{N}$ *sur* H *et une suite* $(\mathrm{P}_p)_{p\in\mathbf{N}}$ *de parties de* H *avec les propriétés suivantes:*

a) *On a* $\mathrm{P}_0 = \mathrm{X}$.

b) *Pour tout entier* $p \geqslant 0$, *on a* $w_p \in \mathrm{P}_p$.

c) *Pour tout entier* $n \geqslant 1$, *il existe un entier* $p(n)$ *tel que tout élément de* P_p *soit de longueur* $> n$ *pour tout* $p \geqslant p(n)$.

d) *Pour tout entier* $p \geqslant 0$, *l'ensemble* P_{p+1} *se compose des éléments de la forme* $w_p^i w$ *avec* $i \geqslant 0$, $w \in \mathrm{P}_p$ *et* $w \neq w_p$.

Comme X est fini, chacun des ensembles $\mathrm{M}^n(\mathrm{X})$ est fini. Posons $\mathrm{H}_n = \mathrm{H} \cap \mathrm{M}^n(\mathrm{X})$ pour tout $n \geqslant 1$. Le cor. de la prop. 12 montre que l'ensemble fini H_n est non vide. Soit u_n le cardinal de H_n; posons $v_0 = 0$ et $v_n = u_1 + \cdots + u_n$ pour $n \geqslant 1$. Comme H_n est un ensemble fini totalement ordonné, il existe une bijection strictement croissante $p \mapsto w_p$ de l'intervalle $[v_{n-1}, v_n - 1]$ de $\mathbf{N}$ sur H_n. Il est immédiat que $p \mapsto w_p$ est une bijection strictement croissante de $\mathbf{N}$ sur H.

Posons $\mathrm{P}_0 = \mathrm{X}$ et pour tout entier $p \geqslant 1$, soit P_p l'ensemble des éléments w de H tels que $w \geqslant w_p$ et que l'on ait, ou bien $w \in \mathrm{X}$, ou bien $\alpha(w) < w_p$ (remarquons que si w est de longueur $\geqslant 2$, la relation $w \in \mathrm{H}$ entraîne $\alpha(w) \in \mathrm{H}$ d'après la condition (C) de la déf. 2). On a $w_p \in \mathrm{P}_p$; cela est clair si $w_p \in \mathrm{X}$ et cela résulte de l'inégalité $l(\alpha(w_p)) < l(w_p)$ et de la condition (A) de la déf. 2 lorsque $w_p \notin \mathrm{X}$.

Les conditions *a*) et *b*) sont donc satisfaites.

Soit n un entier $\geqslant 1$ et soit $p \geqslant v_n$. Pour tout $w \in \mathrm{P}_p$, on a $l(w) \geqslant l(w_p) > n$ d'après la définition même de l'application $p \mapsto w_p$. Ceci établit *c*).

Montrons que tout élément de la forme $u = w_p^i w$ avec $i \geqslant 0$, $w \in \mathrm{P}_p$ et $w \neq w_p$ appartient à P_{p+1}. Si $i \neq 0$, on a $l(u) > l(w_p)$ d'où $u > w_p$ et $u \geqslant w_{p+1}$; on a $u \notin \mathrm{X}$ et $\alpha(u) = w_p < w_{p+1}$, d'où $u \in \mathrm{P}_{p+1}$. Si $i = 0$, on a $u \in \mathrm{P}_p$ et $u \neq w_p$; on a donc $u > w_p$, d'où $u \geqslant w_{p+1}$; si u n'appartient pas à X, on a $\alpha(w) < w_p$ d'où $\alpha(w) < w_{p+1}$; on a encore $u \in \mathrm{P}_{p+1}$.

Réciproquement, soit $u \in \mathrm{P}_{p+1}$. Distinguons deux cas:

α) Il n'existe aucun élément v de M(X) tel que $u = w_p v$. Par définition de P_{p+1}, on a $u > w_p$. De plus, si $u \notin \mathrm{X}$, on a $\alpha(u) \neq w_p$ par l'hypothèse faite, et l'on a $\alpha(u) < w_{p+1}$ puisque $u \in \mathrm{P}_{p+1}$; donc $\alpha(u) < w_p$. Donc on a $u \in \mathrm{P}_p$ et $u \neq w_p$.

β) Il existe v dans M(X) tel que $u = w_p v$. D'après la déf. 2, on a nécessairement, soit $w_p \in \mathrm{X}$, $v \in \mathrm{X}$ et $w_p < v$, soit $v \notin \mathrm{X}$ et $\alpha(v) \leqslant w_p < v$. Dans les deux éventualités, on a $v \in \mathrm{P}_{p+1}$.

Ceci posé, il existe un entier $i \geqslant 0$ et un élément w de M(X) tels que $u = w_p^i w$, et ou bien $w \in X$, ou bien $w \notin X$ et $\alpha(w) \neq w_p$. Si $i = 0$, on est dans le cas α) ci-dessus, d'oú $w \in P_p$ et $w \neq w_p$. Si $i > 0$, la démonstration de β) ci-dessus établit, par récurrence sur i, les relations $w \in P_{p+1}$ et $w \neq w_p$. Supposons $w \notin X$; de $w \in P_{p+1}$ on déduit $\alpha(w) \leqslant w_p$ et comme on a $\alpha(w) \neq w_p$, on conclut que $w \in P_p$. Ceci achève de prouver d).

Exemple. — Supposons que X ait deux éléments x, y; ordonnons X de telle sorte que l'on ait $x < y$. La construction donnée dans la démonstration de la prop. 11 fournit un ensemble H qui a 14 éléments de longueur $\leqslant 5$ donnés dans le tableau suivant:

H_1	$w_1 = x$	$w_2 = y$	
H_2	$w_3 = (xy)$		
H_3	$w_4 = (x(xy))$	$w_5 = (y(xy))$	
H_4	$w_6 = (x(x(xy)))$	$w_7 = (y(x(xy)))$	$w_8 = (y(y(xy)))$
H_5	$w_9 = (x(x(x(xy))))$	$w_{10} = (y(x(x(xy))))$	$w_{11} = (y(y(x(xy))))$
	$w_{12} = (y(y(y(xy))))$	$w_{13} = ((xy)(x(xy)))$	$w_{14} = ((xy)(y(xy)))$.

(On a numéroté les éléments de H suivant les relations d'ordre total choisies dans chaque H_n.)

11. Bases de Hall d'une algèbre de Lie libre

On conserve les notations du n° précédent.

THÉORÈME 1. — *Soient* H *un ensemble de Hall relatif à* X *et* Ψ *l'application canonique de* M(X) *dans l'algèbre de Lie libre* L(X). *La restriction de* Ψ *à* H *est une base du module* L(X).

Pour tout élément w de H, on pose $\bar{w} = \Psi(w)$.

A) *Cas où* X *est fini.*

Si X est vide, il en est de même de M(X) et donc de H, et L(X) est réduit à 0. Si X a un seul élément x, $H \cap M^n(X)$ est vide pour $n \geqslant 2$ (prop. 12 a)). Par suite, on a $H = \{x\}$; on sait aussi (n° 2, *Remarque*) que le module L(X) est libre de base $\{\bar{x}\}$. Le théorème est donc vrai lorsque X a au plus un élément.

Supposons désormais que X ait au moins deux éléments; choisissons des suites (w_p) et (P_p) ayant les propriétés énoncées dans la prop. 13. Pour tout entier $p \geqslant 0$, on note L_p le sous-module de L(X) engendré par les éléments $\bar{w}_i$ pour $0 \leqslant i < p$ et $\mathfrak{g}_p$ la sous-algèbre de Lie de L(X) engendrée par la famille $(\bar{u})_{u \in P_p}$.

Lemme 2. — *Pour tout entier* $p \geqslant 0$, *le module* L_p *admet la famille* $(\bar{w}_i)_{0 \leqslant i < p}$ *pour base, l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}_p$ *admet* $(\bar{u})_{u \in P_p}$ *pour famille basique, et le module* L(X) *est somme directe de* L_p *et* $\mathfrak{g}_p$.

On a $L_0 = \{0\}$ et $\mathfrak{g}_0 = L(X)$, et le lemme est vrai pour $p = 0$. Raisonnons par récurrence sur p. Supposons donc que le lemme soit vrai pour un entier $p \geqslant 0$. Posons $u_{i,w} = (\text{ad}\, \bar{w}_p)^i . \bar{w} = \Psi(w_p^i w)$ pour $i \geqslant 0$, $w \in P_p$, $w \neq w_p$. D'après le cor.

de la prop. 10 du n° 9, l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{g}_p$ est somme directe du module T_p de base $\{\overline{w}_p\}$ et d'une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}_p$ admettant $\mathscr{F} = (u_{i,w})_{i \geqslant 0, w \in P_p, w \neq w_p}$ pour famille basique. D'après la prop. 13*d*), la famille $(\overline{u})_{u \in P_{p+1}}$ est égale à $\mathscr{F}$, donc est une famille basique de $\mathfrak{h}_p = \mathfrak{g}_{p+1}$. On a donc $L(X) = L_p \oplus T_p \oplus \mathfrak{g}_{p+1}$ et comme $L_{p+1} = L_p + T_p$, on a $L(X) = L_{p+1} \oplus \mathfrak{g}_{p+1}$ et $(\overline{w}_0, \overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_{p-1}, \overline{w}_p)$ est une base du module L_{p+1}.

C.Q.F.D.

Soit n un entier positif. D'après la prop. 13*c*), il existe un entier $p(n)$ tel que P_p n'ait que des éléments de longueur $> n$ pour $p \geqslant p(n)$. Pour $p \geqslant p(n)$, la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_p$ de $L(X)$ est engendrée par des éléments de degré $> n$, donc $L^n(X) \cap \mathfrak{g}_p = \{0\}$. Par ailleurs, les éléments $\overline{w}_i$ de $L(X)$ sont homogènes et la famille $(\overline{w}_i)_{0 \leqslant i < p}$ est une base d'un module supplémentaire de $\mathfrak{g}_p$. Il en résulte immédiatement que la famille des éléments $\overline{w}_i$ de degré n est une base du module $L^n(X)$, et que la suite $(\overline{w}_i)_{i \geqslant 0}$ est une base du module $L(X)$.

B) *Cas général.*

Si S est une partie de X, rappelons que $M(S)$ est identifié au sous-magma de $M(X)$ engendré par S et $L(S)$ est identifiée à la sous-algèbre de Lie de $L(X)$ engendrée par S; on a vu que si $w \in M(S)$ est de longueur $\geqslant 2$, on a $\alpha(w) \in M(S)$ et $\beta(w) \in M(S)$. Il en résulte immédiatement que $H \cap M(S)$ est un ensemble de Hall relatif à S.

Pour toute partie finie Φ de H, il existe une partie finie S de X telle que $\Phi \subset M(S)$. Le cas A) montre alors que les éléments $\overline{w}$ pour $w \in \Phi$ sont linéairement indépendants dans $L(S)$, donc dans $L(X)$. Par suite, la famille $(\overline{w})_{w \in H}$ est libre.

Pour tout élément a de $L(X)$, il existe une partie finie S de X telle que $a \in L(S)$. D'après le cas A), la partie $\Psi(H \cap M(S))$ de $\Psi(H)$ engendre le module $L(S)$, donc a est combinaison linéaire d'éléments de $\Psi(H)$. Donc $\Psi(H)$ engendre le module $L(X)$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *Le module* $L(X)$ *est libre, ainsi que chacun des sous-modules* $L^\alpha(X)$ *pour* $\alpha \in \mathbf{N}^{(X)}$ *et* $L^n(X)$ *pour* $n \in \mathbf{N}$. *Les modules* $L^\alpha(X)$ *sont de rang fini, et il en est de même des modules* $L^n(X)$ *si* X *est fini.*

Il existe un ensemble de Hall H relatif à X (prop. 11). Pour tout $w \in H$, l'élément $\Psi(w)$ de $L(X)$ appartient à l'un des modules $L^\alpha(X)$ (avec $\alpha \in \mathbf{N}^{(X)}$), et le module $L(X)$ est somme des sous-modules $L^\alpha(X)$. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^{(X)}$, l'ensemble des éléments de $M(X)$ dont l'image canonique dans $\mathbf{N}^{(X)}$ est égale à α est fini; ceci montre que chacun des modules $L^\alpha(X)$ est libre de rang fini, et que $L(X)$ est libre. On a $L^n(X) = \sum_{|\alpha| = n} L^\alpha(X)$, donc $L^n(X)$ est libre; lorsque X est fini, l'ensemble des $\alpha \in \mathbf{N}^{(X)}$ tels que $|\alpha| = n$ est fini, donc $L^n(X)$ est alors de rang fini.

DÉFINITION 3. — *On appelle base de Hall d'une algèbre de Lie libre* L(X) *toute base de* L(X) *qui est l'image canonique d'un ensemble de Hall relatif à* X.

Remarque. — Supposons que X se compose de deux éléments distincts x et y et soit $L^{(\cdot,1)}$ le sous-module de L(X) somme des $L^{\alpha}(X)$ pour $\alpha \in \mathbf{N}^{X}$, avec $\alpha(y) = 1$. On déduit aussitôt du th. 1 et de la prop. 12 du n° 10 que les éléments $(\operatorname{ad} x)^{n}.y$ pour n entier $\geqslant 0$ forment une *base* du sous-module $L^{(\cdot,1)}$. Il en résulte que *la restriction à* $L^{(\cdot,1)}$ *de l'application* ad x *est injective.*

§ 3. Algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie libre

Dans ce paragraphe, on note $A(X) = A_{K}(X)$ *l'algèbre associative libre* Libas(X) *de l'ensemble* X *sur l'anneau* K (A, III, p. 21, déf. 2). *On identifie* X *à son image canonique dans* A(X); *rappelons que le* K*-module* A(X) *admet pour base le monoïde libre* Mo(X) *déduit de* X; *on note* $A^{+}(X)$ *le sous-module de* A(X) *engendré par les mots non vides.*

1. Algèbre enveloppante de L(X)

THÉORÈME 1. — *Soit* $\alpha\colon L(X) \to A(X)$ *l'unique homomorphisme d'algèbres de Lie prolongeant l'injection canonique de* X *dans* A(X) (§ 2, n° 2, prop. 1). *Soit* $\sigma\colon L(X) \to U(L(X))$ *l'application canonique de* L(X) *dans son algèbre enveloppante et soit* $\beta\colon U(L(X)) \to A(X)$ *l'unique homomorphisme d'algèbres unifères tel que* $\beta \circ \sigma = \alpha$ (chap. I, § 2, n° 1, prop. 1). *Alors*:

a) α *est injectif, et* $\alpha(L(X))$ *est un sous-module facteur direct de* A(X).

b) β *est bijectif.*

Soient B une K-algèbre unifère et φ une application de X dans B; d'après la prop. 1 du § 2, n° 2, il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie $\psi\colon L(X) \to B$ tel que $\psi \mid X = \varphi$; d'après la prop. 1 du chap. I, § 2, n° 1, il existe un homomorphisme d'algèbres unifères $\theta\colon U(L(X)) \to B$ tel que $\theta \circ \sigma = \psi$, donc tel que $(\theta \circ \sigma) \mid X = \varphi$. Comme $\sigma(X)$ engendre l'algèbre unifère U(L(X)), l'homomorphisme θ est l'unique homomorphisme d'algèbres unifères satisfaisant à cette dernière condition. Ceci montre que le couple $(U(L(X)), \sigma \mid X)$ est une solution du même problème universel que A(X); prenant pour φ l'injection canonique de X dans A(X), on en déduit que β est un isomorphisme, ce qui démontre *b*).

Enfin, comme L(X) est un K-module libre (§ 2, n° 11, cor. du th. 1), σ est injectif et $\sigma(L(X))$ est un sous-module facteur direct de U(L(X)) (chap. I, § 2, n° 7, cor. 3 du th. 1). D'après *b*), cela démontre *a*).

COROLLAIRE 1. — *Il existe sur l'algèbre* A(X) *un unique coproduit faisant de* A(X) *une bigèbre et tel que les éléments de* X *soient primitifs. De plus,* β *est un isomorphisme de la bigèbre* U(L(X)) *sur* A(X) *munie de cette structure de bigèbre.*

Cela résulte de l'assertion *b*) du théorème et du fait que X engendre l'algèbre unifère A(X).

Dorénavant, on munit A(X) de cette structure de bigèbre et *on identifie* L(X) à son image par α, c'est-à-dire *à la sous-algèbre de Lie de* A(X) *engendrée par* X.

COROLLAIRE 2. — *Si* K *est un corps de caractéristique* 0, L(X) *est l'algèbre de Lie des éléments primitifs de* A(X).

Cela résulte du cor. 1 et du cor. de la prop. 9 du § 1, n° 5.

Remarques. — 1) Soit K′ un anneau commutatif contenant K. Si on identifie A(X), L(X) et $L_{K'}(X)$ à des parties de $A_{K'}(X)$, il résulte de la partie *a*) du th. 1 la relation

$$L(X) = L_{K'}(X) \cap A(X). \tag{1}$$

2) Le cor. 2 du th. 1 reste valable si on suppose seulement que le groupe additif de l'anneau K est sans torsion. En effet, supposons d'abord K = **Z**; tout élément primitif de A(X) est un élément primitif de $A_{\mathbf{Q}}(X)$, donc est dans $L_{\mathbf{Q}}(X) \cap A(X) = L(X)$ (cor. 2 et formule (1)). Dans le cas général, K est plat sur **Z** et on applique la *Remarque* 2 du § 1, n° 2 et la prop. 3 du § 2, n° 5.

3) Soient Δ un monoïde commutatif, φ_0 une application de X dans Δ, $\varphi \colon \mathrm{Mo}(X) \to \Delta$ l'homomorphisme de monoïde associé; si on munit A(X) de la graduation $(A^\delta(X))_{\delta\in\Delta}$ définie en A, III, p. 31, *Exemple* 3 et L(X) de la graduation $(L^\delta(X))_{\delta\in\Delta}$ définie au § 2, n° 6, on a aussitôt, pour $\delta \in \Delta$, $L^\delta(X) \subset L(X) \cap A^\delta(X)$. Comme L est la somme des $L^\delta(X)$ pour $\delta \in \Delta$, et que la somme des $L(X) \cap A^\delta(X)$ pour $\delta \in \Delta$ est directe, cela entraîne

$$L^\delta(X) = L(X) \cap A^\delta(X). \tag{2}$$

4) Soit A une algèbre associative unifère, et soit $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} L(I) \arrow[rr, "f_t"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\ & A(I) \arrow[ur, "g_t"'] & \end{tikzcd}$$

où i est l'injection canonique, f_t est l'homomorphisme d'algèbre de Lie défini par $\boldsymbol{t}$ et g_t l'homomorphisme d'algèbre unifère tel que $g_t(i) = t_i$ pour $i \in I$. Le diagramme est commutatif car $g_t \circ i$ et f_t coïncident dans I. Il en résulte que, si $P \in L(I)$, l'élément $P((t_i)_{i\in I})$ défini au § 2, n° 4, coïncide avec l'élément $P((t_i)_{i\in I})$ défini en A, III, p. 24, *Exemple* 2.