N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

INTÉGRATION

Chapitres 7 et 8

Springer

Réimpression inchangée de l'édition originale de 1963
© Hermann, Paris, 1963
© N. Bourbaki, 1981

© N. Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007

ISBN-10 3-540-35324-0 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-35324-9 Springer Berlin Heidelberg New York

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.
La loi du 11 mars 1957 interdit les copies ou les reproductions destinées à une utilisation collective.
Toute représentation, reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: WMXDesign GmbH, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

INTÉGRATION

CHAPITRE VII

MESURE DE HAAR

Dans ce chapitre et le suivant, lorsque nous parlerons d'une fonction (resp. d'une mesure), il s'agira indifféremment d'une fonction (resp. d'une mesure) réelle ou complexe ; si T *est un espace localement compact, la notation* $\mathscr{K}(\mathrm{T})$ *désignera indifféremment l'espace* $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\mathrm{T})$ *ou l'espace* $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(\mathrm{T})$; *de même pour les notations* $\overline{\mathscr{K}(\mathrm{T})}$, $\mathscr{C}(\mathrm{T})$, $\mathrm{L}^p(\mathrm{T}, \mu)$, $\mathscr{M}(\mathrm{T})$, *etc. Il est naturellement sous-entendu que dans une question où interviennent plusieurs fonctions, mesures ou espaces vectoriels, les résultats obtenus sont valables lorsque ces fonctions, mesures ou espaces vectoriels sont tous réels ou tous complexes. L'espace* $\overline{\mathscr{K}(\mathrm{T})}$ *sera toujours supposé muni de la topologie de la convergence uniforme, l'espace* $\mathscr{C}(\mathrm{T})$ *de la topologie de la convergence compacte, et l'espace* $\mathscr{K}(\mathrm{T})$ *de la topologie limite inductive dont la définition est rappelée en tête du chapitre* VI. *La notation* $\mathscr{K}_+(\mathrm{T})$ *désignera l'ensemble des fonctions* $\geqslant 0$ *de* $\mathscr{K}(\mathrm{T})$. *Si* $\mathrm{A} \subset \mathrm{T}$, *on notera toujours* φ_{A} *la fonction caractéristique de* A. *Si* $t \in \mathrm{T}$, ε_t *désignera la mesure positive définie par la masse* $+1$ *au point* t.

Tous les espaces localement convexes seront supposés séparés.

On notera e *les éléments neutres de tous les groupes considérés, sauf mention expresse du contraire.*

§ 1. **Construction d'une mesure de Haar.**

1. *Définitions et notations.*

Soit G un groupe topologique opérant continûment à gauche (*Top. gén.*, chap. III, 3ᵉ éd., § 2, nᵒ 4) dans un espace localement compact X ; pour $s \in G$ et $x \in X$, soit sx le transformé de x par s. On notera $\gamma_X(s)$, ou $\gamma(s)$, l'homéomorphisme de X sur X défini par

$$\gamma(s)x = sx. \tag{1}$$

On a

$$\gamma(st) = \gamma(s)\gamma(t). \tag{2}$$

Si f est une fonction définie sur X, $\gamma(s)f$ sera définie par transport de structure, c'est-à-dire par la formule $(\gamma(s)f)(\gamma(s)x) = f(x)$; autrement dit :

$$(\gamma(s)f)(x) = f(s^{-1}x). \tag{3}$$

Si μ est une mesure définie sur X, $\gamma(s)\mu$ sera aussi définie par transport de structure, ce qui conduit à

$$\langle f, \gamma(s)\mu\rangle = \langle\gamma(s^{-1})f, \mu\rangle \quad \text{pour } f \in \mathscr{K}(X). \tag{4}$$

Autrement dit

$$\int_X f(x)d(\gamma(s)\mu)(x) = \int_X f(sx)d\mu(x). \tag{5}$$

Si A est un ensemble $(\gamma(s)\mu)$-intégrable, $s^{-1}A$ est μ-intégrable, et

$$(\gamma(s)\mu)(A) = \mu(s^{-1}A). \tag{6}$$

La mesure $\gamma(s)\mu$ peut aussi être définie comme *l'image* de μ par $\gamma(s)$.

Au lieu d'écrire $d(\gamma(s)\mu)(x)$, il est parfois commode d'écrire $d\mu(s^{-1}x)$; alors, (5) prend la forme suivante :

$$\int_X f(x)d\mu(s^{-1}x) = \int_X f(sx)d\mu(x) ;$$

le membre de droite se déduit de celui de gauche « en changeant x en sx ».

DÉFINITION 1. — *Soit* μ *une mesure sur* X.

a) *On dit que* μ *est invariante par* G *si* $\gamma(s)\mu = \mu$ *pour tout* $s \in G$.

b) *On dit que* μ *est relativement invariante par* G *si* $\gamma(s)\mu$ *est proportionnelle à* μ *pour tout* $s \in G$.

c) *On dit que* μ *est quasi-invariante par* G *si* $\gamma(s)\mu$ *est équivalente à* μ *pour tout* $s \in G$.

Remarques. — 1) Supposons μ invariante. Alors $|\mu|$, $\mathscr{R}\mu$, $\mathscr{I}\mu$ sont invariantes. Si μ est réelle, μ^+ et μ^- sont invariantes.

2) Supposons μ relativement invariante et non nulle. Il existe, pour tout $s \in G$, un nombre complexe $\chi(s)$ unique tel que

$$(7) \qquad \gamma(s)\mu = \chi(s)^{-1}\mu$$

et la fonction χ sur G est une représentation de G dans $\mathbf{C}^*$ appelée *multiplicateur* de μ. La formule (5) donne alors

$$(8) \qquad \int_X f(sx)d\mu(x) = \chi(s)^{-1}\int_X f(x)d\mu(x)$$

et la formule (6) donne

$$(9) \qquad \mu(sA) = \chi(s)\mu(A).$$

Avec les conventions faites plus haut, (7) peut aussi s'écrire

$$(10) \qquad d\mu(sx) = \chi(s)d\mu(x).$$

3) Comme $|\gamma(s)\mu| = \gamma(s)(|\mu|)$, dire que μ est quasi-invariante revient à dire que $|\mu|$ est quasi-invariante.

Si μ est quasi-invariante et si μ' est une autre mesure sur X équivalente à μ, $\gamma(s)\mu'$ est équivalente à $\gamma(s)\mu$, donc à μ, donc à μ', de sorte que μ' est quasi-invariante. Dire que μ est quasi-invariante par G signifie donc que la *classe* de μ est invariante par G.

Pour que μ soit quasi-invariante, il faut et il suffit que l'ensemble des parties localement μ-négligeables de X soit invariant par G (chap. V, § 5, n° 5, th. 2), ou encore que, pour toute partie compacte μ-négligeable K de X et tout $s \in G$, sK soit μ-négligeable *(loc. cit., Remarque).*

Si μ est quasi-invariante, le support de μ est invariant par G. En particulier, si G est *transitif* dans X, ce support est ou bien vide (si $\mu = 0$) ou bien égal à X (si $\mu \neq 0$).

Lemme 1. — *Soient* X, Y, Z *trois espaces topologiques,* Y *étant localement compact. Soit* $(x, y) \rightarrow xy$ *une application continue de* $X \times Y$ *dans* Z, *qui définit une application* $x \rightarrow u_x$ *de* X *dans* $\mathscr{F}(Y\,;Z)$ *par la relation* $u_x(y) = xy$. *Soient* $\mathbf{f}$ *une fonction continue dans* Z, *à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *ou dans un espace de Banach,* S *le support de* $\mathbf{f}$, *et* μ *une mesure sur* Y. *On suppose que, pour tout* $x_0 \in X$, *il existe un voisinage* V *de* x_0 *dans* X *tel que* $\bigcup_{x \in V} u_x^{-1}(S)$ *soit relativement compact dans* Y. *Alors :*

a) *pour tout* $x \in X$, $\mathbf{f} \circ u_x$ *est continue dans* Y *et à support compact ;*

b) *l'application* $x \rightarrow \int_Y \mathbf{f}(xy)d\mu(y)$, *qui est définie d'après* a), *est continue dans* X.

L'assertion a) est évidente. Prouvons b). Comme la continuité est une propriété locale, on se ramène au cas où $\bigcup_{x \in X} u_x^{-1}(S)$ est contenu dans une partie compacte Y′ de Y. Comme la fonction $(x, y) \rightarrow \mathbf{f}(xy)$ est continue dans $X \times Y$, $\mathbf{f} \circ u_x$ tend uniformément dans Y′ vers $\mathbf{f} \circ u_{x_0}$ quand x tend vers x_0 (*Top. Gén.*, chap. X, 2e éd., § 3, no 4, th. 3), donc $\mu(\mathbf{f} \circ u_x)$ tend vers $\mu(\mathbf{f} \circ u_{x_0})$. D'où le lemme.

Revenons maintenant aux notations antérieures.

Proposition 1. — *Supposons* G *localement compact. Soit* μ *une mesure relativement invariante non nulle sur* X. *Alors son multiplicateur* χ *est une fonction continue dans* G.

En effet, soient $f \in \mathscr{K}(X)$, S le support de f, s_0 un point de G, et V un voisinage compact de s_0 dans G ; alors

$$\bigcup_{s \in V} \gamma(s)^{-1}(S) = V^{-1}S$$

est compact dans X ; d'après le lemme 1 et la formule (8), $\chi(s)^{-1}\langle\mu, f\rangle$ dépend continûment de s ; si on a choisi f telle que $\langle\mu, f\rangle \neq 0$, on voit que χ est continu.

Soit maintenant G un groupe topologique opérant continûment à droite dans un espace localement compact X ; pour $s \in G$ et $x \in X$, soit xs le transformé de x par s. On notera $\delta_X(s)$, ou $\delta(s)$, l'homéomorphisme de X défini par

(1') $$\delta(s)x = xs^{-1}.$$

On a

(2') $$\delta(st) = \delta(s)\delta(t).$$

Par transport de structure, on définit l'action de $\delta(s)$ sur les fonctions et les mesures sur X :

(3') $$(\delta(s)f)(x) = f(xs)$$

(4') $$\langle f, \delta(s)\mu\rangle = \langle\delta(s^{-1})f, \mu\rangle$$

(5') $$\int_X f(x)d(\delta(s)\mu)(x) = \int_X f(xs^{-1})d\mu(x)$$

(6') $$(\delta(s)\mu)(A) = \mu(As).$$

On convient d'écrire $d\mu(xs)$ au lieu de $d(\delta(s)\mu)(x)$, et (5') prend la forme

$$\int_X f(x)d\mu(xs) = \int_X f(xs^{-1})d\mu(x).$$

On définit de manière analogue les mesures invariantes, relativement invariantes et quasi-invariantes par G sur X. Si μ est relativement invariante, on définit son multiplicateur χ par les formules

(7') $$\delta(s)\mu = \chi(s)\mu$$

(8') $$\int_X f(xs)d\mu(x) = \chi(s)^{-1}\int_X f(x)d\mu(x)$$

(9′) $$\mu(\mathrm{A}s) = \chi(s)\mu(\mathrm{A}).$$

(10′) $$d\mu(xs) = \chi(s)d\mu(x).$$

Si on considère le groupe opposé G^o à G comme opérant dans X par $(x, s) \rightarrow xs$, μ est relativement invariante par G^o de même multiplicateur χ.

Soit enfin G un groupe localement compact. Il opère sur lui-même par translations à gauche et à droite, suivant les formules $\boldsymbol{\gamma}(s)x = sx$, $\boldsymbol{\delta}(s)x = xs^{-1}$. On a

(11) $$\boldsymbol{\gamma}(s)\boldsymbol{\delta}(t) = \boldsymbol{\delta}(t)\boldsymbol{\gamma}(s).$$

Tout ce qui précède est applicable, et on a donc, sur G, les notions de mesures *invariantes à gauche, invariantes à droite, relativement invariantes à gauche, relativement invariantes à droite, quasi-invariantes à gauche, quasi-invariantes à droite* (cf., toutefois, les nos 8 et 9).

L'application $x \rightarrow x^{-1}$ est un homéomorphisme de G sur G. Pour toute fonction f sur G, on définira la fonction $\check{f}$ sur G par

(12) $$\check{f}(x) = f(x^{-1}).$$

Pour toute mesure μ sur G, on définira la mesure $\check{\mu}$ par

(13) $$\check{\mu}(f) = \mu(\check{f}) \quad \text{pour } f \in \mathscr{K}(\mathrm{G}).$$

Autrement dit

(14) $$\int_{\mathrm{G}} f(x)d\check{\mu}(x) = \int_{\mathrm{G}} f(x^{-1})d\mu(x).$$

Si A est un ensemble $\check{\mu}$-intégrable, A^{-1} est μ-intégrable, et

(15) $$\check{\mu}(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A}^{-1}).$$

On convient d'écrire $d\mu(x^{-1})$ au lieu de $d\check{\mu}(x)$, et (14) prend la forme

$$\int_{\mathrm{G}} f(x)d\mu(x^{-1}) = \int_{\mathrm{G}} f(x^{-1})d\mu(x).$$

2. *Le théorème d'existence et d'unicité.*

DÉFINITION 2. — *Soit* G *un groupe localement compact. On appelle mesure de Haar à gauche* (resp. *à droite*) *sur* G *une mesure positive non nulle sur* G, *invariante à gauche* (resp. *à droite*).

THÉORÈME 1. — *Sur tout groupe localement compact, il existe une mesure de Haar à gauche* (resp. *à droite*), *et, à un facteur constant près, il n'en existe qu'une.*

A) *Existence.* — Posons $\mathscr{K}(G) = \mathscr{K}$, $\mathscr{K}_+(G) = \mathscr{K}_+$,

$$\mathscr{K}_+^* = \mathscr{K}_+ - \{0\}.$$

Si C est une partie compacte de G, on notera $\mathscr{K}_+^*(C)$ l'ensemble des $f \in \mathscr{K}_+^*$ à support dans C. Pour $f \in \mathscr{K}$ et $g \in \mathscr{K}_+^*$, il existe des nombres $c_1, \ldots, c_n \geqslant 0$ et des éléments $s_1, \ldots, s_n$ de G tels que $f \leqq \sum_{i=1}^{n} c_i\gamma(s_i)g$: en effet, il existe une partie ouverte non vide U de G telle que $\inf_{s \in U} g(s) > 0$, et le support de f peut être recouvert par un nombre fini de translatés à gauche de U. Soit alors $(f : g)$ la borne inférieure des nombres $\sum_{i=1}^{n} c_i$ pour tous les systèmes $(c_1, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n)$ de nombres $\geqslant 0$ et d'éléments de G tels que $f \leqq \sum_{i=1}^{n} c_i\gamma(s_i)g$. On a :

(i) $(\gamma(s)f : g) = (f : g)$ pour $f \in \mathscr{K}$, $g \in \mathscr{K}_+^*$, $s \in G$;

(ii) $(\lambda f : g) = \lambda(f : g)$ pour $f \in \mathscr{K}$, $g \in \mathscr{K}_+^*$, $\lambda \geqslant 0$;

(iii) $((f + f') : g) \leqq (f : g) + (f' : g)$ pour $f \in \mathscr{K}$, $f' \in \mathscr{K}$, $g \in \mathscr{K}_+^*$;

(iv) $(f : g) \geqslant (\sup f)/(\sup g)$ pour $f \in \mathscr{K}$, $g \in \mathscr{K}_+^*$;

(v) $(f : h) \leqq (f : g)(g : h)$ pour $f \in \mathscr{K}$, $g \in \mathscr{K}_+^*$, $h \in \mathscr{K}_+^*$;

(vi) $0 < \dfrac{1}{(f_0 : f)} \leqq \dfrac{(f : g)}{(f_0 : g)} \leqq (f : f_0)$ pour f, f_0, g dans $\mathscr{K}_+^*$;

(vii) soient f, f', h dans $\mathscr{K}_+$ avec $h(s) \geqslant 1$ dans le support de $f + f'$, et soit $\varepsilon > 0$; il existe un voisinage compact V de e tel que, pour toute $g \in \mathscr{K}_+^*(V)$, on ait

$$(f : g) + (f' : g) \leqq ((f + f') : g) + \varepsilon(h : g).$$

Les propriétés (i), (ii), (iii) sont évidentes. Soient $f \in \mathcal{K}$, $g \in \mathcal{K}_+^*$; si $f \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i\gamma(s_i)g$ avec des $c_i \geqslant 0$, on a

$$\sup f \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i g(s_i^{-1}s)$$

pour un $s \in \mathrm{G}$, donc $\sup f \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right) \sup g$, d'où (iv). Prouvons (v) ; soient $f \in \mathcal{K}$, g, h dans $\mathcal{K}_+^*$; si $f \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i\gamma(s_i)g$ et $g \leqslant \sum_{j=1}^{p} d_j\gamma(t_j)h$ ($c_i \geqslant 0$, $d_j \geqslant 0$, s_i, t_j dans G), on a $f \leqslant \sum_{i,j} c_i d_j \gamma(s_i t_j)h$, donc $(f : h) \leqslant \sum_{i,j} c_i d_j = \left(\sum_i c_i\right)\left(\sum_j d_j\right)$; donc $(f : h) \leqslant (f : g)(g : h)$. Si on applique (v) à f_0, f, g d'une part et à f, f_0, g d'autre part, on obtient (vi). Enfin, soient f, f', h dans $\mathcal{K}_+$ avec $h(s) \geqslant 1$ dans le support de $f + f'$, et soit $\varepsilon > 0$. Posons $\mathrm{F} = f + f' + \frac{1}{2}\varepsilon h$; les fonctions φ, φ', qui coïncident respectivement avec f/F et f'/F dans le support de $f + f'$ et qui sont nulles en dehors de celui-ci, appartiennent à $\mathcal{K}_+$; pour tout $\eta > 0$, il existe un voisinage compact V de e tel que $|\varphi(s) - \varphi(t)| \leqslant \eta$ et $|\varphi'(s) - \varphi'(t)| \leqslant \eta$ pour $s^{-1}t \in \mathrm{V}$. Soit alors $g \in \mathcal{K}_+^*(\mathrm{V})$; pour tout $s \in \mathrm{G}$, on a $\varphi . \gamma(s)g \leqslant (\varphi(s) + \eta) . \gamma(s)g$: en effet, c'est évident aux points où $\gamma(s)g$ s'annule, donc hors de $s\mathrm{V}$; et, dans $s\mathrm{V}$, on a $\varphi \leqslant \varphi(s) + \eta$; de même,

$$\varphi' . \gamma(s)g \leqslant (\varphi'(s) + \eta) . \gamma(s)g.$$

Ceci posé, soient $c_1, \ldots, c_n$ des nombres $\geqslant 0$ et $s_1, \ldots, s_n$ des éléments de G tels que $\mathrm{F} \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i\gamma(s_i)g$; on a

$$f = \varphi\mathrm{F} \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi . \gamma(s_i)g \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i(\varphi(s_i) + \eta) . \gamma(s_i)g$$

et de même pour f' ; par suite

$$(f : g) + (f' : g) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i(\varphi(s_i) + \varphi'(s_i) + 2\eta) \leqslant (1 + 2\eta) \sum_{i=1}^{n} c_i$$

puisque $\varphi + \varphi' \leq 1$. En appliquant la définition de F, puis (ii), (iii), et (v), on en conclut

$$(f : g) + (f' : g) \leq (1 + 2\eta)(\mathrm{F} : g) \leq$$
$$(1 + 2\eta)[((f + f') : g) + \frac{1}{2}\varepsilon(h : g)] \leq ((f + f') : g) + \frac{1}{2}\varepsilon(h : g)$$
$$+ 2\eta((f + f') : h)(h : g) + \varepsilon\eta(h : g)$$

et, si l'on a choisi η tel que $\eta[2((f + f') : h) + \varepsilon] \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, on obtient (vii).

Quand V parcourt l'ensemble des voisinages compacts de e, les $\mathscr{K}_+^*(\mathrm{V})$ forment une base d'un filtre $\mathfrak{B}$ sur $\mathscr{K}_+^*$. Soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre sur $\mathscr{K}_+^*$ plus fin que $\mathfrak{B}$. D'autre part, fixons $f_0 \in \mathscr{K}_+^*$ et posons, pour $f \in \mathscr{K}_+^*$ et $g \in \mathscr{K}_+^*$

$$\mathrm{I}_g(f) = \frac{(f : g)}{(f_0 : g)}.$$

D'après (vi), $\lim_{g, \mathfrak{F}} \mathrm{I}_g(f) = \mathrm{I}(f)$ existe dans l'espace compact $[1/(f_0 : f), (f : f_0)]$. D'après (iii), on a $\mathrm{I}(f + f') \leq \mathrm{I}(f) + \mathrm{I}(f')$. D'après (vii), on a $\mathrm{I}(f) + \mathrm{I}(f') \leq \mathrm{I}(f + f') + \varepsilon\mathrm{I}(h)$ quel que soit $\varepsilon > 0$ si h est $\geqslant 1$ dans le support de $f + f'$; il s'ensuit que $\mathrm{I}(f + f') = \mathrm{I}(f) + \mathrm{I}(f')$. D'après le chap. II, § 2, n° 1, prop. 2, I se prolonge en une forme linéaire sur $\mathscr{K}$; cette forme linéaire est une mesure positive non nulle sur G, invariante à gauche d'après (i) ; c'est la mesure de Haar à gauche cherchée. Passant au groupe opposé, on en déduit l'existence d'une mesure de Haar à droite.

B) *Unicité.* — Soient μ une mesure de Haar à gauche, ν une mesure de Haar à droite. Alors $\check{\nu}$ est une mesure de Haar à gauche. On va montrer que μ et $\check{\nu}$ sont proportionnelles. Ceci prouvera bien que deux mesures de Haar à gauche sont proportionnelles.

Soit $f \in \mathscr{K}$ telle que $\mu(f) \neq 0$. D'après le lemme 1, la fonction D_f définie sur G par

$$\mathrm{D}_f(s) = \mu(f)^{-1}\int f(t^{-1}s)d\nu(t) \tag{16}$$

est continue dans G. Soit $g \in \mathcal{K}$. La fonction $(s, t) \to f(s)g(ts)$ est continue à support compact dans G $\times$ G. D'après le chap. III, § 5, n° 1, th. 2, on a

$$\mu(f)\nu(g) = \left(\int f(s)d\mu(s)\right)\left(\int g(t)d\nu(t)\right) \tag{17}$$

$$= \int d\mu(s)\int f(s)g(ts)d\nu(t) = \int d\nu(t)\int f(s)g(ts)d\mu(s)$$

$$= \int d\nu(t)\int f(t^{-1}s)g(s)d\mu(s)$$

$$= \int g(s)\left[\int f(t^{-1}s)d\nu(t)\right]d\mu(s) = \mu(g.\mu(f)\mathrm{D}_f)$$

d'où

$$\nu(g) = \mu(\mathrm{D}_f.g). \tag{18}$$

Ceci prouve d'abord que D_f ne dépend pas de f. Car, si $f' \in \mathcal{K}$ est telle que $\mu(f') \neq 0$, on a $\mathrm{D}_f.\mu = \mathrm{D}_{f'}.\mu$, donc $\mathrm{D}_f = \mathrm{D}_{f'}$ localement presque partout pour μ, donc partout puisque D_f et $\mathrm{D}_{f'}$ sont continues et que le support de μ est G. Posons donc $\mathrm{D}_f = \mathrm{D}$. La formule (16) donne

$$\mu(f)\mathrm{D}(e) = \check{\nu}(f). \tag{19}$$

La formule (19) s'étend par linéarité aux fonctions $f \in \mathcal{K}$ telles que $\mu(f) = 0$. On a $\mathrm{D}(e) \neq 0$ puisque $\check{\nu} \neq 0$. Ceci établit bien la proportionnalité de μ et $\check{\nu}$.

Corollaire. — *Toute mesure invariante à gauche* (resp. *à droite*) *sur* G *est proportionnelle à une mesure de Haar à gauche* (resp. *à droite*).

Exemples. — 1) Sur le groupe additif **R**, la mesure de Lebesgue dx est une mesure de Haar (Chap. III, § 2, n° 2, *Exemple*).

2) Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R}_+^*)$, on a (*Fonct. var. réelle*, chap. II, § 1, formule (13))

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(tx)}{tx}\,tdx = \int_0^{+\infty} \frac{f(tx)}{x}\,dx$$

quel que soit $t > 0$; la mesure $x^{-1}dx$ est donc une mesure de Haar sur le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$.

3) Prenons pour G le tore $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Soit φ l'application canonique de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{T}$. Pour $f \in \mathcal{K}(\mathbf{T})$, la fonction $f \circ \varphi$ est continue et périodique de période 1 sur $\mathbf{R}$, et l'intégrale

$$\mathrm{I}(f) = \int_a^{a+1} f(\varphi(x))dx$$

est indépendante du choix de $a \in \mathbf{R}$; il est immédiat qu'elle est invariante par translation ; elle définit donc une mesure de Haar sur $\mathbf{T}$. Par transport de structure, on en déduit que $\mathrm{I}(f) = \int_a^{a+1} f(e^{2\pi i t})dt$ est une mesure de Haar sur le groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ des nombres complexes de valeur absolue 1 (*Top. gén.*, chap. VIII, § 2, n° 1).

PROPOSITION 2. — *Soient* G *un groupe localement compact,* μ *une mesure de Haar à gauche ou à droite sur* G. *Pour que* G *soit discret, il faut et il suffit que* $\mu(\{e\}) > 0$. *Pour que* G *soit compact, il faut et il suffit que* $\mu^*(\mathrm{G}) < +\infty$.

Les conditions sont évidemment nécessaires. Montrons leur suffisance. Soit V un voisinage compact de e. Si $\mu(\{e\}) > 0$, V est un ensemble fini puisque $\mu(\mathrm{V}) < +\infty$; comme G est séparé, il est donc discret. Supposons $\mu^*(\mathrm{G}) < +\infty$, et μ invariante à gauche par exemple. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des parties finies $\{s_1, \ldots, s_n\}$ de G telles que $s_i\mathrm{V} \cap s_j\mathrm{V} = \varnothing$ pour $i \neq j$; on a

$$n\mu(\mathrm{V}) = \mu(s_1\mathrm{V} \cup \ldots \cup s_n\mathrm{V}) \leq \mu^*(\mathrm{G}),$$

donc $n \leq \mu^*(\mathrm{G})/\mu(\mathrm{V})$. On peut donc choisir dans $\mathcal{E}$ un élément $\{s_1, \ldots, s_n\}$ maximal. Alors, pour tout $s \in \mathrm{G}$, il y a un i tel que $s\mathrm{V} \cap s_i\mathrm{V} \neq \varnothing$, donc tel que $s \in s_i\mathrm{V}\mathrm{V}^{-1}$. Donc G est réunion des ensembles compacts $s_i\mathrm{V}\mathrm{V}^{-1}$ et est par suite compact.

3. Module.

Soit μ une mesure de Haar à gauche sur G. Pour tout $s \in G$, $\delta(s)\mu$ est encore invariante à gauche (nº 1, formule (11)), donc (th. 1) il existe un nombre unique $\Delta_G(s) > 0$ tel que $\delta(s)\mu = \Delta_G(s)\mu$. En vertu du th. 1, le nombre $\Delta_G(s)$ est indépendant du choix de μ.

DÉFINITION 3. — *La fonction Δ_G sur G s'appelle le module de G. Si $\Delta_G = 1$, le groupe G est dit unimodulaire.*

On peut dire aussi que μ est relativement invariante à droite de multiplicateur Δ_G. Donc Δ_G est une *représentation continue de G dans $\mathbf{R}_+^*$* (nº 1, prop. 1).

Remarque. — Si φ est un isomorphisme de G sur un groupe localement compact G′, on a $\Delta_{G'} \circ \varphi = \Delta_G$. En particulier :

1) Comme $x \to x^{-1}$ est un isomorphisme de G sur le groupe opposé G^o, on a $\Delta_{G^o} = \Delta_G^{-1}$.

2) Si φ est un automorphisme de G, on a $\Delta_G \circ \varphi = \Delta_G$.

Soit $s \in G$. On a :

$$\delta(s)(\Delta_G^{-1}.\mu) = (\delta(s)\Delta_G^{-1}).(\delta(s)\mu) = (\Delta_G(s)^{-1}\Delta_G^{-1}).(\Delta_G(s)\mu) = \Delta_G^{-1}.\mu$$

donc $\Delta_G^{-1}.\mu = \mu'$ est une mesure de Haar à droite. On en déduit que $\gamma(s)\mu' = (\gamma(s)\Delta_G^{-1}).\mu = \Delta_G(s)(\Delta_G^{-1}.\mu) = \Delta_G(s)\mu'$, donc, pour toute mesure de Haar à droite ν, on a $\gamma(s)\nu = \Delta_G(s)\nu$. Puisque $\check{\mu}$ est une mesure de Haar à droite, on a $\check{\mu} = a\Delta_G^{-1}.\mu$ avec une constante $a > 0$; on en déduit

$$\mu = a(\Delta_G^{-1}.\mu)^{\vee} = a\Delta_G.\check{\mu} = a^2\mu,$$

donc $a = 1$ et finalement $\check{\mu} = \Delta_G^{-1}.\mu$. On voit de même que $\check{\nu} = \Delta_G.\nu$. On a donc les résultats suivants :

Formulaire. — Soient G un groupe localement compact, Δ son module, μ une mesure de Haar à gauche, ν une mesure de Haar à droite.

1) On a

$$\gamma(s)\mu = \mu \qquad \delta(s)\mu = \Delta(s)\mu \qquad \check{\mu} = \Delta^{-1}.\mu. \tag{20}$$

Si f est μ-intégrable sur G, les translatées à gauche et à droite de f sont μ-intégrables, et on a

$$\begin{aligned} \int f(sx)d\mu(x) &= \int f(x)d\mu(x) \\ \int f(xs)d\mu(x) &= \Delta(s)^{-1}\int f(x)d\mu(x). \end{aligned} \tag{21}$$

En outre, $\check{f}$ est intégrable pour $\Delta^{-1}.\mu$ et

$$\int f(x^{-1})\Delta(x)^{-1}d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x). \tag{22}$$

Si A est une partie μ-intégrable de G, sA et As sont μ-intégrables et

$$\mu(sA) = \mu(A) \qquad \mu(As) = \Delta(s)\mu(A). \tag{23}$$

2) On a

$$\delta(s)\nu = \nu \qquad \gamma(s)\nu = \Delta(s)\nu \qquad \check{\nu} = \Delta.\nu. \tag{24}$$

Si f est ν-intégrable sur G, les translatées à gauche et à droite de f sont ν-intégrables, et on a

$$\begin{aligned} \int f(xs)d\nu(x) &= \int f(x)d\nu(x) \\ \int f(sx)d\nu(x) &= \Delta(s)\int f(x)d\nu(x). \end{aligned} \tag{25}$$

En outre, $\check{f}$ est intégrable pour $\Delta.\nu$ et

$$\int f(x^{-1})\Delta(x)d\nu(x) = \int f(x)d\nu(x). \tag{26}$$

Si A est une partie ν-intégrable de G, sA et As sont ν-intégrables et

$$\nu(As) = \nu(A) \qquad \nu(sA) = \Delta(s)^{-1}\nu(A). \tag{27}$$

3) ν est proportionnelle à $\Delta^{-1}.\mu$, μ est proportionnelle à $\Delta.\nu$.

4) Supposons G *unimodulaire*. Soit μ une mesure de Haar sur G. On a

$$\gamma(s)\mu = \delta(s)\mu = \check{\mu} = \mu. \tag{28}$$

Si f est μ-intégrable sur G, les translatées à gauche et à droite de f sont μ-intégrables ainsi que $\check{f}$, et l'on a

$$\int f(sx)d\mu(x) = \int f(xs)d\mu(x) = \int f(x^{-1})d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x). \tag{29}$$

Si A est une partie μ-intégrable de G, sA, As et A^{-1} sont μ-intégrables, et

$$\mu(sA) = \mu(As) = \mu(A^{-1}) = \mu(A). \tag{30}$$

On a des propriétés analogues pour l'intégrale essentielle.

Proposition 3. — *S'il existe dans* G *un voisinage compact* V *de e invariant par les automorphismes intérieurs, alors* G *est unimodulaire.*

En effet, soit μ une mesure de Haar à gauche sur G. On a, pour tout $s \in G$, $\mu(V) = \mu(s^{-1}Vs) = \Delta_G(s)\mu(V)$, d'où

$$\Delta_G(s) = 1$$

puisque $0 < \mu(V) < +\infty$.

On en déduit aussitôt :

Corollaire. — *Si* G *est discret, ou compact, ou commutatif,* G *est unimodulaire.*

Ceci est d'ailleurs trivial lorsque G est *commutatif*. Notons aussi que, si G est *discret*, la mesure sur G pour laquelle chaque point est de masse 1 est évidemment une mesure de Haar à gauche et à droite sur G, qu'on appelle mesure de Haar *normalisée* sur G. Si G est *compact*, il existe une mesure de Haar μ et une seule sur G telle que $\mu(G) = 1$; on l'appelle la mesure de Haar *normalisée* de G. Les deux conventions précédentes ne concordent pas lorsque G est à la fois discret et compact, c'est-à-dire fini ; quand on sera dans ce cas, on précisera toujours explicitement ce qu'on entend par mesure de Haar normalisée.

Un sous-groupe, un groupe quotient d'un groupe unimodulaire ne sont pas toujours unimodulaires (§ 2, exerc. 5). Cf., toutefois, le § 2, n° 7, prop. 10.

Nous verrons plus tard que les groupes de Lie connexes semi-simples ou nilpotents sont unimodulaires.

4. *Module d'un automorphisme.*

Soient G un groupe localement compact, φ un automorphisme de G, μ une mesure de Haar à gauche sur G. Il est clair que $\varphi^{-1}(\mu)$ est encore une mesure de Haar à gauche sur G. Il existe donc (n° 2, th. 1) un nombre $a > 0$ et un seul tel que $\varphi^{-1}(\mu) = a\mu$. D'après le n° 2, th. 1, ce nombre est indépendant du choix de μ. Remarquons que, si l'on partait d'une mesure de Haar à droite, par exemple $\Delta_G^{-1}.\mu$ (n° 3), on aboutirait au même scalaire a : car, comme φ^{-1} laisse Δ_G invariant (n° 3, *Remarque*), on a $\varphi^{-1}(\Delta_G^{-1}.\mu) = \Delta_G^{-1}.\varphi^{-1}(\mu) = a\Delta_G^{-1}.\mu$.

DÉFINITION 4. — *Le nombre $a > 0$ tel que $\varphi^{-1}(\mu) = a\mu$ s'appelle le module de l'automorphisme φ et se note* $\mathrm{mod}_G\varphi$ *ou simplement* $\mathrm{mod}\ \varphi$.

Si f est une fonction μ-intégrable sur G, on a

$$\int f(\varphi^{-1}(x))d\mu(x) = (\mathrm{mod}\ \varphi)\int f(x)d\mu(x). \tag{31}$$

Si A est une partie μ-intégrable de G, on a

$$\mu(\varphi(A)) = (\mathrm{mod}\ \varphi)\mu(A). \tag{32}$$

En particulier, pour $s \in G$, soit i_s l'automorphisme intérieur $x \to s^{-1}xs$. On a $i_s^{-1} = \boldsymbol{\delta}(s)\gamma(s)$, donc

$$i_s^{-1}(\mu) = \boldsymbol{\delta}(s)\mu = \Delta_G(s)\mu,$$

et par suite

(33) $$\mathrm{mod}\, i_s = \Delta_G(s).$$

Si G est soit discret, soit compact, sa mesure de Haar normalisée est transformée en elle-même par tout automorphisme φ de G, comme on le voit tout de suite par transport de structure. Donc *un automorphisme d'un groupe discret ou compact est de module* 1.

PROPOSITION 4. — *Soient* G *un groupe localement compact,* Γ *un groupe topologique, et* $\gamma \to u_\gamma$ *un homomorphisme de* Γ *dans le groupe* $\mathscr{G}$ *des automorphismes de* G, *tel que* $(\gamma, x) \to u_\gamma(x)$ *soit une application continue de* $\Gamma \times G$ *dans* G. *Alors l'application* $\gamma \to \mathrm{mod}(u_\gamma)$ *est une représentation continue de* Γ *dans* $\mathbf{R}_+^*$.

Cette application est évidemment une représentation (algébrique) de Γ dans $\mathbf{R}_+^*$; il suffit de prouver sa continuité. Soient $f \in \mathscr{K}(G)$ et S son support. Soient $\gamma_0 \in \Gamma$ et U un voisinage relativement compact de $u_{\gamma_0}^{-1}(S)$. L'application $\gamma \to u_\gamma$ est une application continue de Γ dans $\mathscr{G}$ muni de la topologie de la convergence compacte (*Top. Gén.*, chap. X, 2e éd., § 3, no 4, th. 3) ; donc $u_\gamma^{-1}(S) \subset U$ pour γ assez voisin de γ_0. Le lemme 1 du no 1 prouve alors que $\int f(u_\gamma(x))d\mu(x)$ (où μ désigne une mesure de Haar à gauche de G) dépend continûment de γ ; d'où la proposition.

5. *Mesure de Haar d'un produit.*

PROPOSITION 5. — *Soit* $(G_\iota)_{\iota \in I}$ *une famille de groupes localement compacts. Pour tout* $\iota \in I$, *soit* μ_ι *une mesure de Haar à gauche* (resp. *à droite*) *sur* G_ι. *On suppose qu'il existe une partie finie* J *de* I *telle que, pour tout* $\iota \in I - J$, G_ι *soit compact et* $\mu(G_\iota) = 1$. *Alors la mesure produit* $\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ *est une mesure de Haar à gauche* (resp. *à droite*) *sur* $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota$. *Si* $x = (x_\iota) \in G$, *on a*

$$\Delta_G(x) = \prod_{\iota \in I} \Delta_{G_\iota}(x_\iota).$$

Pour toute partie finie J de I, $\bigotimes_{\iota \in J} \mu_\iota$ est une mesure de Haar à gauche (resp. à droite) sur $\prod_{\iota \in J} G_\iota$, comme il résulte aussitôt des définitions. Donc $\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ est une mesure de Haar à gauche (resp. à droite) sur G (chap. III, § 5, n° 5, prop. 6). D'autre part, si les μ_ι sont des mesures de Haar à gauche, on a

$$\delta(x)(\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota) = \bigotimes_{\iota \in I} \delta(x_\iota)\mu_\iota = \bigotimes_{\iota \in I} (\Delta_{G_\iota}(x_\iota)\mu_\iota) = (\prod_{\iota \in I} \Delta_{G_\iota}(x_\iota)) \bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota,$$

d'où $\Delta_G(x) = \prod_{\iota \in I} \Delta_{G_\iota}(x_\iota)$.

Exemples. — 1) La mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ est une mesure de Haar du groupe additif $\mathbf{R}^n$.

2) L'application $(r, u) \to ru$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{U}$ sur $\mathbf{C}^*$ (*Top. gén.*, chap. VIII, § 1, n° 3). Si on identifie $\mathbf{C}^*$ à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{U}$ par cet isomorphisme, et si on note du une mesure de Haar de $\mathbf{U}$, $r^{-1}drdu$ est une mesure de Haar de $\mathbf{C}^*$ d'après l'exemple 2 du n° 2. D'autre part, la bijection $\theta \to e^{2i\pi\theta}$ de $[0, 1[$ sur $\mathbf{U}$ transforme la mesure de Lebesgue $d\theta$ de $[0, 1[$ en une mesure de Haar sur $\mathbf{U}$ d'après l'exemple 3 du n° 2. Il en résulte que, si $f \in \mathscr{K}(\mathbf{C}^*)$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \int_0^1 f(re^{2i\pi\theta}) r^{-1} dr d\theta$$

définit une mesure de Haar sur $\mathbf{C}^*$.

6. *Mesure de Haar d'une limite projective.*

Soit G un groupe localement compact (donc complet). Soit $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille filtrante décroissante de sous-groupes distingués compacts de G, d'intersection $\{e\}$ (de sorte que la base de filtre formée des K_α converge vers e). Posons $G_\alpha = G/K_\alpha$; soient $\varphi_\alpha : G \to G_\alpha$ et $\varphi_{\beta\alpha} : G_\alpha \to G_\beta$ ($\alpha \geqslant \beta$) les homomorphismes canoniques. Alors la limite projective du système projectif $(G_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ s'identifie à G et l'application canonique de cette limite projective dans G_α s'identifie à φ_α (*Top. Gén.*, chap. III, 3e éd., § 7, n° 3, prop. 2). Les applications φ_α et $\varphi_{\beta\alpha}$ sont propres (*loc. cit.*, § 4, n° 1, cor. 2 de la prop. 1). Ces données resteront fixées dans tout ce n°.

Lemme 2. — a) *Soient* $f \in \mathscr{K}_+(G)$, S *une partie compacte de* G *contenant* Supp f, U *un voisinage ouvert de* S *dans* G, *et* $\varepsilon > 0$. *Il existe un* $\alpha \in A$ *et une fonction* $g \in \mathscr{K}_+(G)$, *nulle hors de* U, *constante sur les classes suivant* K_α, *telle que* $|f - g| \leq \varepsilon$.

b) *Soient* μ *et* μ' *deux mesures sur* G *telles que* $\varphi_\alpha(\mu) = \varphi_\alpha(\mu')$ *pour tout* $\alpha \in A$. *Alors* $\mu = \mu'$.

Il existe un $\alpha_1 \in A$ tel que $K_{\alpha_1}S \cap K_{\alpha_1}(G - U) = \varnothing$ (*Top. Gén.*, chap. II, 3e éd., § 4, n° 3, prop. 4). En augmentant S et en diminuant U, on peut donc supposer que S et U sont des réunions de classes suivant K_{α_1}. Considérons les fonctions numériques continues h sur S qui possèdent la propriété suivante : il existe $\alpha \geqslant \alpha_1$ tel que h soit constante sur les classes suivant K_α. Ces fonctions forment une sous-algèbre de $\mathscr{K}(S)$ (parce que la famille (K_α) est filtrante décroissante) qui contient les constantes et qui sépare les points de S : en effet, soient x, y deux points distincts de S ; comme l'intersection des K_α est $\{e\}$, il existe $\alpha \geqslant \alpha_1$ tel que $\varphi_\alpha(x) \neq \varphi_\alpha(y)$, puis une fonction numérique u continue dans $\varphi_\alpha(S)$, telle que $u(\varphi_\alpha(x)) \neq u(\varphi_\alpha(y))$. D'après le th. de Weierstrass-Stone, il existe un $\alpha \geqslant \alpha_1$ et une fonction $h \geqslant 0$ continue dans S, constante sur les classes suivant K_α, et telle que $|f - h| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ dans S. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, posons $\delta(t) = \left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right)^+$, et posons $h' = \delta \circ h$. Alors h' est une fonction $\geqslant 0$, continue dans S, constante sur les classes suivant K_α, et l'on a $|h - h'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ dans S, donc $|f - h'| \leqslant \varepsilon$ dans S. D'autre part, on a $h'(x) = 0$ si x appartient à la frontière de S dans G, car alors $h(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Si on prolonge h' par 0 dans le complémentaire de S, on obtient une fonction g qui répond à la question, ce qui prouve a).

Soient maintenant μ, μ' deux mesures sur G telles que $\varphi_\alpha(\mu) = \varphi_\alpha(\mu')$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Soit $v \in \mathscr{K}(\mathrm{G})$ une fonction constante sur les classes suivant K_α pour un $\alpha \in \mathrm{A}$, de sorte qu'on peut écrire $v = w \circ \varphi_\alpha$ avec $w \in \mathscr{K}(\mathrm{G}_\alpha)$; on a alors $\mu(v) = (\varphi_\alpha(\mu))(w) = (\varphi_\alpha(\mu'))(w) = \mu'(v)$; on en conclut que $\mu = \mu'$ en vertu de *a*).

PROPOSITION 6. — *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{A}$, *soit* μ_α *une mesure positive sur* G_α. *On suppose que* $\varphi_{\beta\alpha}(\mu_\alpha) = \mu_\beta$ *pour* $\alpha \geqslant \beta$. *Il existe alors une mesure positive* μ *sur* G *et une seule telle que* $\varphi_\alpha(\mu) = \mu_\alpha$ *pour tout* $\alpha \in \mathrm{A}$.

L'unicité résulte aussitôt du lemme 2 b). Prouvons l'existence de μ. Soit V l'espace vectoriel des fonctions appartenant à $\mathscr{K}(\mathrm{G})$ et constantes sur les classes suivant un K_α. D'après le lemme 2 a), V est un sous-espace vectoriel positivement riche (chap. III, § 2, n° 5) de $\mathscr{K}(\mathrm{G})$. Soit $f \in \mathrm{V}$. Il existe un $\alpha \in \mathrm{A}$ tel que f soit constante sur les classes suivant K_α. Par passage au quotient, f définit une fonction $f_\alpha \in \mathscr{K}(\mathrm{G}_\alpha)$. Le nombre $\mu(f) = \mu_\alpha(f_\alpha)$ ne dépend pas du choix de α ; car soit β un indice tel que f soit constante sur les classes suivant K_β ; soit $\gamma \in \mathrm{A}$ tel que $\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant \beta$; alors f définit des fonctions $f_\beta \in \mathscr{K}(\mathrm{G}_\beta)$, $f_\gamma \in \mathscr{K}(\mathrm{G}_\gamma)$ telles que $f = f_\beta \circ \varphi_\beta = f_\gamma \circ \varphi_\gamma$; on a $f_\alpha \circ \varphi_{\alpha\gamma} = f_\gamma$, donc $\mu_\gamma(f_\gamma) = (\varphi_{\alpha\gamma}(\mu_\gamma))(f_\alpha) = \mu_\alpha(f_\alpha)$, et de même $\mu_\gamma(f_\gamma) = \mu_\beta(f_\beta)$, d'où notre assertion. Ceci posé, il est clair que μ est une forme linéaire sur V et que $\mu(f) \geqslant 0$ pour $f \geqslant 0$. D'après la prop. 2 du chap. III, § 2, n° 5, μ se prolonge en une mesure positive, que nous noterons encore μ, sur G. On a $\varphi_\alpha(\mu) = \mu_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$ par construction même de μ.

DÉFINITION 5. — *On dit que* μ *est la limite projective des* μ_α.

PROPOSITION 7. — *On conserve les notations de la prop.* 6. *Si chaque* μ_α *est une mesure de Haar à gauche* (resp. *à droite*) *sur* G_α, *alors* μ *est une mesure de Haar à gauche* (resp. *à droite*) *sur* G.

Supposons par exemple que les μ_α soient des mesures de Haar à gauche. Soit $s \in \mathrm{G}$. On a, pour tout $x \in \mathrm{G}$,