N. BOURBAKI

# ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE
MATHÉMATIQUE

# GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

Chapitres 7 et 8

Springer

Réimpression inchangée de l'édition originale de 1975


ISBN-10 3-540-33939-6 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-33939-7 Springer Berlin Heidelberg New York



Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: *design & production*, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

# SOUS-ALGÈBRES DE CARTAN
# ÉLÉMENTS RÉGULIERS

*Dans ce chapitre, $k$ désigne un corps commutatif. Par « espace vectoriel », on entend « espace vectoriel sur $k$ »; de même pour « algèbre de Lie », etc. Toutes les algèbres de Lie sont supposées de dimension finie.*

## § 1. Décomposition primaire des représentations linéaires

### 1. Décomposition d'une famille d'endomorphismes

Soient V un espace vectoriel, S un ensemble, et $r$ une application de S dans End(V). Notons P l'ensemble des applications de S dans $k$. Si $\lambda \in \mathrm{P}$, on note $\mathrm{V}_\lambda(\mathrm{S})$ (resp. $\mathrm{V}^\lambda(\mathrm{S})$) l'ensemble des $v \in \mathrm{V}$ tels que, pour tout $s \in \mathrm{S}$, on ait $r(s)v = \lambda(s)v$ (resp. $(r(s) - \lambda(s))^n v = 0$ pour $n$ assez grand). Les ensembles $\mathrm{V}_\lambda(\mathrm{S})$ et $\mathrm{V}^\lambda(\mathrm{S})$ sont des sous-espaces vectoriels de V, et l'on a $\mathrm{V}_\lambda(\mathrm{S}) \subset \mathrm{V}^\lambda(\mathrm{S})$. On dit que $\mathrm{V}_\lambda(\mathrm{S})$ est le *sous-espace propre* de V relatif à $\lambda$ (et à $r$), que $\mathrm{V}^\lambda(\mathrm{S})$ est le *sous-espace primaire* de V relatif à $\lambda$ (et à $r$), que $\mathrm{V}^0(\mathrm{S})$ est le *nilespace* de V (relatif à $r$). On dit que $\lambda$ est un *poids* de S dans V si $\mathrm{V}^\lambda(\mathrm{S}) \neq 0$.

En particulier, quand S est réduit à un seul élément $s$, P s'identifie à $k$; on emploie les notations $\mathrm{V}_{\lambda(s)}(s)$ et $\mathrm{V}^{\lambda(s)}(s)$, ou $\mathrm{V}_{\lambda(s)}(r(s))$ et $\mathrm{V}^{\lambda(s)}(r(s))$, au lieu des notations $\mathrm{V}_\lambda(\{s\})$, $\mathrm{V}^\lambda(\{s\})$; on parle des sous-espaces propres, des sous-espaces primaires, du nilespace de $r(s)$; un élément $v$ de $\mathrm{V}_{\lambda(s)}(s)$ est appelé un *vecteur propre* de $r(s)$, et, si $v \neq 0$, $\lambda(s)$ est appelé la *valeur propre* correspondante (cf. A, VII, § 5).

On a aussitôt, pour tout $\lambda \in \mathrm{P}$, les relations

$$\mathrm{V}^\lambda(\mathrm{S}) = \bigcap_{s \in \mathrm{P}} \mathrm{V}^{\lambda(s)}(s), \tag{1}$$

$$\mathrm{V}_\lambda(\mathrm{S}) = \bigcap_{s \in \mathrm{P}} \mathrm{V}_{\lambda(s)}(s). \tag{2}$$

Soit $k'$ une extension de $k$. L'application canonique de End(V) dans $\mathrm{End}(\mathrm{V} \otimes_k k')$, donne par composition avec $r$, une application $r' : \mathrm{S} \to \mathrm{End}(\mathrm{V} \otimes_k k')$. De même, toute application $\lambda$ de S dans $k$ définit canoniquement une application, notée encore $\lambda$, de S dans $k'$. Avec ces notations, on a la proposition suivante:

PROPOSITION 1. — *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{P}$, *on a*

$$(\mathrm{V} \otimes_k k')^\lambda(\mathrm{S}) = \mathrm{V}^\lambda(\mathrm{S}) \otimes_k k' \quad \textit{et} \quad (\mathrm{V} \otimes_k k')_\lambda(\mathrm{S}) = \mathrm{V}_\lambda(\mathrm{S}) \otimes_k k'.$$

Soit $(a_i)$ une base du $k$-espace vectoriel $k'$. Si $v \in V \otimes_k k'$, $v$ se met de manière unique sous la forme $\sum v_i \otimes a_i$, où $(v_i)$ est une famille à support fini d'éléments de V. On a, pour tout $s \in S$,

$$(r'(s) - \lambda(s))^n(v) = \sum (r(s) - \lambda(s))^n v_i \otimes a_i.$$

Il s'ensuit que

$$v \in (V \otimes_k k')^\lambda(S) \Leftrightarrow v_i \in V^\lambda(S) \qquad \text{pour tout } i,$$
$$v \in (V \otimes_k k')_\lambda(S) \Leftrightarrow v_i \in V_\lambda(S) \qquad \text{pour tout } i,$$

ce qui entraîne la proposition.

Proposition 2. — *Soient* V, V', W *des espaces vectoriels. Soient* $r: S \to \mathrm{End}(V)$, $r': S \to \mathrm{End}(V')$ *et* $q: S \to \mathrm{End}(W)$ *des applications.*

(i) *Soit* $f: V \to W$ *une application linéaire telle que* $q(s)f(v) = f(r(s)v)$ *pour* $s \in S$ *et* $v \in V$. *Alors, pour tout* $\lambda \in P$, $f$ *applique* $V^\lambda(S)$ (resp. $V_\lambda(S)$) *dans* $W^\lambda(S)$ (resp. $W_\lambda(S)$).

(ii) *Soit* $B: V \times V' \to W$ *une application bilinéaire telle que*

$$q(s)B(v, v') = B(r(s)v, v') + B(v, r'(s)v')$$

*pour* $s \in S$, $v \in V$, $v' \in V'$. *Alors, pour tous* $\lambda$, $\mu \in P$, B *applique* $V^\lambda(S) \times V'^\mu(S)$ (resp. $V_\lambda(S) \times V'_\mu(S)$) *dans* $W^{\lambda+\mu}(S)$ (resp. $W_{\lambda+\mu}(S)$).

(iii) *Soit* $B: V \times V' \to W$ *une application bilinéaire telle que*

$$q(s)B(v, v') = B(r(s)v, r'(s)v')$$

*pour* $s \in S$, $v \in V$, $v' \in V'$. *Alors, pour tous* $\lambda$, $\mu \in P$, B *applique* $V^\lambda(S) \times V'^\mu(S)$ (resp. $V_\lambda(S) \times V'_\mu(S)$) *dans* $W^{\lambda\mu}(S)$ (resp. $W_{\lambda\mu}(S)$).

Dans le cas (i), on a $(q(s) - \lambda(s))^n f(v) = f((r(s) - \lambda(s))^n v)$ pour $s \in S$ et $v \in V$, et l'on conclut aussitôt. Dans le cas (ii), on a

$$(q(s) - \lambda(s) - \mu(s))B(v, v') = B((r(s) - \lambda(s))v, v') + B(v, (r'(s) - \mu(s))v')$$

pour $s \in S$, $v \in V$, $v' \in V'$, d'où par récurrence sur $n$

$$(q(s) - \lambda(s) - \mu(s))^n B(v, v') = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} B((r(s) - \lambda(s))^i v, (r'(s) - \mu(s))^j v').$$

On en déduit immédiatement les assertions de (ii). Dans le cas (iii), on a

$$(q(s) - \lambda(s)\mu(s))B(v, v') = B((r(s) - \lambda(s))v, r'(s)v') + B(\lambda(s)v, (r'(s) - \mu(s))v')$$

pour $s \in S$, $v \in V$, $v' \in V'$, d'où par récurrence sur $n$

$$(q(s) - \lambda(s)\mu(s))^n B(v, v') = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} B(\lambda(s)^j (r(s) - \lambda(s))^i v, r'(s)^i (r'(s) - \mu(s))^j v').$$

On en déduit immédiatement les assertions de (iii).

PROPOSITION 3. — *La somme* $\sum_{\lambda \in P} V^{\lambda}(S)$ *est directe. La somme* $\sum_{\lambda \in P} V_{\lambda}(S)$ *est directe.*

La seconde assertion est conséquence de la première; il suffit de prouver celle-ci. Distinguons plusieurs cas.

*a*) S *est vide*. L'assertion est triviale.

*b*) S *est réduit à un élément s*. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments distincts de $k$. Pour $i = 0, 1, \ldots, n$, soit $v_i \in V^{\lambda_i}(s)$ et supposons que $v_0 = v_1 + \cdots + v_n$. Il s'agit de prouver que $v_0 = 0$. Pour $i = 0, \ldots, n$, il existe un entier $q_i > 0$ tel que $(r(s) - \lambda_i)^{q_i} v_i = 0$. Considérons les polynômes $P(X) = \prod_{i \geqslant 1} (X - \lambda_i)^{q_i}$ et $Q(X) = (X - \lambda_0)^{q_0}$. On a $Q(r(s))v_0 = 0$, et $P(r(s))v_0 = \sum_{i=1}^{n} P(r(s))v_i = 0$. Comme P et Q sont premiers entre eux, l'identité de Bezout prouve que $v_0 = 0$.

*c*) S *est fini non vide*. Raisonnons par récurrence sur le cardinal de S. Soient $s \in S$ et $S' = S - \{s\}$. Soit $(v_\lambda)_{\lambda \in P}$ une famille à support fini d'éléments de V tels que $\sum_{\lambda \in P} v_\lambda = 0$ et $v_\lambda \in V^{\lambda}(S)$. Soit $\lambda_0 \in P$. Notons P′ l'ensemble des $\lambda \in P$ tels que $\lambda | S' = \lambda_0 | S'$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à S′, on a $\sum_{\lambda \in P'} v_\lambda = 0$. Si $\lambda$, $\mu$ sont des éléments distincts de P′, on a $\lambda(s) \neq \mu(s)$. Comme la somme $\sum_{\alpha \in k} V^{\alpha}(s)$ est directe d'après *b*), et que $v_\lambda \in V^{\lambda(s)}(s)$, on a $v_\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in P'$, et en particulier $v_{\lambda_0} = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

*d*) *Cas général*. Soit $(v_\lambda)_{\lambda \in P}$ une famille à support fini d'éléments de V telle que $\sum_{\lambda \in P} v_\lambda = 0$ et $v_\lambda \in V^{\lambda}(S)$. Soit P′ l'ensemble fini des $\lambda \in P$ tels que $v_\lambda \neq 0$, et soit S′ une partie finie de S telle que les conditions $\lambda \in P'$, $\mu \in P'$, $\lambda | S' = \mu | S'$ entraînent $\lambda = \mu$. On a $v_\lambda \in V^{\lambda | S'}(S')$ ; appliquant *c*), on voit que $v_\lambda = 0$ pour $\lambda \in P'$, ce qui achève la démonstration.

Rappelons que, si $x \in \mathrm{End}(V)$, on note ad $x$ l'application $y \mapsto xy - yx = [x, y]$ de End(V) dans lui-même.

*Lemme* 1. — *Soient* $x, y \in \mathrm{End}(V)$.

(i) *Supposons* V *de dimension finie. Pour que x soit trigonalisable, il faut et il suffit que* $V = \sum_{a \in k} V^{a}(x)$.

(ii) *S'il existe un entier n tel que* $(\mathrm{ad}\, x)^n y = 0$, *chaque* $V^{a}(x)$ *est stable par y*.

(iii) *Supposons* V *de dimension finie. Si* $V = \sum_{a \in k} V^{a}(x)$ *et si chaque* $V^{a}(x)$ *est stable par y, il existe un entier n tel que* $(\mathrm{ad}\, x)^n y = 0$.

La partie (i) résulte de A, VII, § 5, n° 2, prop. 3.

Soit $E = \mathrm{End}(V)$. Soit B l'application bilinéaire $(u, v) \mapsto u(v)$ de $E \times V$ dans V. Par définition de ad $x$, on a

$$x(B(u, v)) = B(u, x(v)) + B((\mathrm{ad}\, x)(u), v)$$

pour $x \in \mathrm{E}$, $u \in \mathrm{E}$, $v \in \mathrm{V}$. Faisons opérer $x$ sur E par ad $x$. D'après la prop. 2 (ii), on a $\mathrm{B}(\mathrm{E}^0(x), \mathrm{V}^a(x)) \subset \mathrm{V}^a(x)$ pour tout $a \in k$. Si $(\mathrm{ad}\, x)^n y = 0$, alors $y \in \mathrm{E}^0(x)$, donc $y(\mathrm{V}^a(x)) \subset \mathrm{V}^a(x)$, ce qui prouve (ii).

Pour prouver (iii), on peut remplacer V par $\mathrm{V}^a(x)$, $x$ (resp. $y$) par sa restriction à $\mathrm{V}^a(x)$. Quitte à remplacer $x$ par $x - a$, on peut donc supposer $x$ nilpotent. Alors $(\mathrm{ad}\, x)^{2\dim \mathrm{V} - 1} = 0$ (I, § 4, n° 2), ce qui prouve (iii).

*Remarque.* — La démonstration prouve que, si V est de dimension finie et s'il existe un entier $n$ tel que $(\mathrm{ad}\, x)^n y = 0$, alors $(\mathrm{ad}\, x)^{2\dim \mathrm{V} - 1} y = 0$.

Dans la suite, nous dirons que l'application $r\colon \mathrm{S} \to \mathrm{End}(\mathrm{V})$ satisfait à la condition (PC) (de « presque commutativité ») si l'on a:
(PC) *Pour tout couple* $(s, s')$ *d'éléments de* S, *il existe un entier* $n$ *tel que*

$$(\mathrm{ad}\, r(s))^n r(s') = 0.$$

THÉORÈME 1. — *Supposons* V *de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La condition* (PC) *est vérifiée et, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, $r(s)$ *est trigonalisable.*

(ii) *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{P}$, $\mathrm{V}^\lambda(\mathrm{S})$ *est stable par* $r(\mathrm{S})$, *et l'on a* $\mathrm{V} = \sum_{\lambda \in \mathrm{P}} \mathrm{V}^\lambda(\mathrm{S})$.

Si $\mathrm{V} = \sum_{\lambda \in \mathrm{P}} \mathrm{V}^\lambda(\mathrm{S})$, on a $\mathrm{V} = \sum_{a \in k} \mathrm{V}^a(s)$ pour tout $s \in \mathrm{S}$, et il résulte du lemme 1 que (ii) entraîne (i). Supposons la condition (i) vérifiée. Le lemme 1 et la formule (1) entraînent que chaque $\mathrm{V}^\lambda(\mathrm{S})$ est stable par $r(\mathrm{S})$. Reste à prouver que $\mathrm{V} = \sum_{\lambda \in \mathrm{P}} \mathrm{V}^\lambda(\mathrm{S})$. Nous raisonnerons par récurrence sur dim V. Distinguons deux cas.

*a*) Pour tout $s \in \mathrm{S}$, $r(s)$ admet une seule valeur propre $\lambda(s)$. Alors $\mathrm{V} = \mathrm{V}^\lambda(\mathrm{S})$.

*b*) Il existe $s \in \mathrm{S}$ tel que $r(s)$ admette au moins deux valeurs propres distinctes. Alors V est somme directe des $\mathrm{V}^a(s)$ pour $a \in k$, et $\dim \mathrm{V}^a(s) < \dim \mathrm{V}$ pour tout $a$. Chaque $\mathrm{V}^a(s)$ est stable par $r(\mathrm{S})$, et il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

COROLLAIRE 1. — *Supposons* V *de dimension finie et la condition* (PC) *vérifiée. Soit* $k'$ *une extension de* $k$. *On suppose que, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *l'endomorphisme* $r(s) \otimes 1$ *de* $\mathrm{V} \otimes_k k'$ *est trigonalisable. Soit* P' *l'ensemble des applications de* S *dans* $k'$. *Alors* $\mathrm{V} \otimes_k k' = \sum_{\lambda' \in \mathrm{P}'} (\mathrm{V} \otimes_k k')^{\lambda'}(\mathrm{S})$.

Soit $r'\colon \mathrm{S} \to \mathrm{End}(\mathrm{V} \otimes_k k')$ l'application définie par $r$. Si $s_1, s_2 \in \mathrm{S}$, il existe un entier $n$ tel que $(\mathrm{ad}\, r(s_1))^n r(s_2) = 0$, d'où $(\mathrm{ad}\, r'(s_1))^n r'(s_2) = 0$. Il suffit alors d'appliquer le th. 1.

COROLLAIRE 2. — *Supposons* V *de dimension finie et la condition* (PC) *vérifiée. Notons* $\mathrm{V}^+(\mathrm{S})$ *le sous-espace vectoriel* $\sum_{s \in \mathrm{S}} \left(\bigcap_{i \geqslant 1} r(s)^i \mathrm{V}\right)$. *Alors :*

(i) $\mathrm{V}^0(\mathrm{S})$ *et* $\mathrm{V}^+(\mathrm{S})$ *sont stables par* $r(\mathrm{S})$ ;

(ii) $V = V^0(S) \oplus V^+(S)$;

(iii) *tout sous-espace vectoriel* W *de* V, *stable par* $r(S)$ *et tel que* $W^0(S) = 0$, *est contenu dans* $V^+(S)$;

(iv) *on a* $\sum_{s \in S} r(s)V^+(S) = V^+(S)$.

*En outre,* $V^+(S)$ *est le seul sous-espace vectoriel de* V *possédant les propriétés* (i) *et* (ii). *Pour toute extension* $k'$ *de* $k$, *on a* $(V \otimes_k k')^+(S) = V^+(S) \otimes_k k'$.

La dernière assertion est immédiate. Pour prouver les autres, on peut alors, compte tenu de la prop. 1, supposer $k$ algébriquement clos. On a, d'après le th. 1, $V = \sum_{\lambda \in P} V^\lambda(S)$, et les $V^\lambda(S)$ sont stables par $r(S)$. Si $s \in S$, le polynôme caractéristique de $r(s) | V^\lambda(S)$ est $(X - \lambda(s))^{\dim V^\lambda(S)}$; il s'ensuit que $\bigcap_{i \geqslant 1} r(s)^i V^\lambda(s)$ est nul si $\lambda(s) = 0$ et égal à $V^\lambda(S)$ si $\lambda(s) \neq 0$; par conséquent

$$V^+(S) = \sum_{\lambda \in P, \lambda \neq 0} V^\lambda(S), \tag{3}$$

ce qui prouve (i), (ii) et (iv). Si W est un sous-espace vectoriel de V stable par $r(S)$, on a $W = \sum_{\lambda \in P} W^\lambda(S)$ et $W^\lambda(S) = W \cap V^\lambda(S)$. Si $W^0(S) = 0$, on voit que $W \subset V^+(S)$, ce qui prouve (iii).

Soit $V'$ un sous-espace vectoriel de V stable par $r(S)$ et tel que $V' \cap V^0(S) = 0$. On a $V'^0(S) = 0$, donc $V' \subset V^+(S)$ d'après (iii). Si de plus $V = V^0(S) + V'$, on voit que $V' = V^+(S)$. C.Q.F.D.

On dit parfois que $(V^0(S), V^+(S))$ est la *décomposition de Fitting* de V, ou de l'application $r : S \rightarrow \mathrm{End}(V)$. Si S est réduit à un seul élément $s$, on écrit $V^+(s)$ ou $V^+(r(s))$ au lieu de $V^+(\{s\})$. On a $V = V^0(s) \oplus V^+(s)$, $V^0(s)$ et $V^+(s)$ sont stables par $r(s)$, $r(s) | V^0(s)$ est nilpotent et $r(s) | V^+(s)$ est bijectif.

Corollaire 3. — *Soient* V *et* $V'$ *des espaces vectoriels de dimension finie,* $r : S \rightarrow \mathrm{End}(V)$ *et* $r' : S \rightarrow \mathrm{End}(V')$ *des applications vérifiant la condition* (PC). *Soit* $f : V \rightarrow V'$ *une application linéaire surjective telle que* $f(r(s)v) = r'(s)f(v)$ *pour* $s \in S$ *et* $v \in V$. *Alors* $f(V^\lambda(S)) = V'^\lambda(S)$ *pour tout* $\lambda \in P$.

Grâce à la prop. 1, on se ramène au cas où $k$ est algébriquement clos. On a $V = \bigoplus_{\lambda \in P} V^\lambda(S)$, $V' = \bigoplus_{\lambda \in P} V'^\lambda(S)$ d'après le th. 1, et $V' = f(V) = \sum_{\lambda \in P} f(V^\lambda(S))$. Enfin, $f(V^\lambda(S)) \subset V'^\lambda(S)$ d'après la prop. 2 (i), d'où le corollaire.

Proposition 4. — *Supposons* $k$ *parfait. Soient* V *un espace vectoriel de dimension finie,* $u$ *un élément de* End(V), $u_s$, $u_n$ *les composantes semi-simple et nilpotente de* $u$ (A, VII, § 5, n° 8).

(i) *Pour tout* $\lambda \in k$, *on a* $V^\lambda(u) = V^\lambda(u_s) = V_\lambda(u_s)$.

(ii) *Si* V *est muni d'une structure d'algèbre et si* $u$ *est une dérivation de* V, $u_s$ *et* $u_n$ *sont des dérivations de* V.

(iii) *Si* V *est muni d'une structure d'algèbre et si* $u$ *est un automorphisme de* V, *alors* $u_s$ *et* $1 + u_s^{-1}u_n$ *sont des automorphismes de* V.

Grâce à la prop. 1, on peut supposer $k$ algébriquement clos, d'où

$$V = \sum_{\lambda \in k} V^{\lambda}(u).$$

La composante semi-simple de $u|V^{\lambda}(u)$ est l'homothétie de rapport $\lambda$ dans $V^{\lambda}(u)$. Cela prouve (i).

Supposons désormais V muni d'une structure d'algèbre. Soient $x \in V^{\lambda}(u)$, $y \in V^{\mu}(u)$.

Si $u$ est une dérivation de V, on a $xy \in V^{\lambda+\mu}(u)$ (prop. 2 (ii)), donc

$$u_s(xy) = (\lambda + \mu)(xy) = (\lambda x)y + x(\mu y) = (u_s x)y + x(u_s y).$$

Cela prouve que $u_s$ est une dérivation de V. Alors $u_n = u - u_s$ est aussi une dérivation de V.

Si $u$ est un automorphisme de V, on a $\operatorname{Ker}(u_s) = V^0(u) = 0$, donc $u_s$ est bijectif. D'autre part, $xy \in V^{\lambda\mu}(u)$ (prop. 2 (iii)), donc

$$u_s(xy) = (\lambda\mu)(xy) = (\lambda x)(\mu y) = u_s(x).u_s(y).$$

Cela prouve que $u_s$ est un automorphisme de V; il en est de même de

$$1 + u_s^{-1}u_n = u_s^{-1}u.$$

## 2. Cas d'une famille linéaire d'endomorphismes

Nous supposons maintenant que S est muni d'une structure d'*espace vectoriel*, que l'application $r\colon S \to \operatorname{End}(V)$ est *linéaire*, et que V et S sont de *dimension finie*.

PROPOSITION 5. — *Supposons la condition* (PC) *vérifiée, et soit* $\lambda\colon S \to k$ *tel que* $V^{\lambda}(S) \neq 0$. *Si* $k$ *est de caractéristique* 0, *l'application* $\lambda$ *est linéaire. Si* $k$ *est de caractéristique* $p \neq 0$, *il existe une puissance* $q$ *de* $p$ *divisant* $\dim V^{\lambda}(S)$, *et une fonction polynomiale homogène* $P\colon S \to k$ *de degré* $q$, *telles que* $\lambda(s)^q = P(s)$ *pour tout* $s \in S$.

Comme $V^{\lambda}(S)$ est stable par $r(S)$ (lemme 1 et formule (1) du nº 1), on peut supposer que $V = V^{\lambda}(S)$. Soit $n = \dim V$. Pour $s \in S$, on a alors

$$\det(X - r(s)) = (X - \lambda(s))^n.$$

D'autre part, le développement du déterminant prouve que

$$\det(X - r(s)) = X^n + a_1(s)X^{n-1} + \cdots + a_i(s)X^{n-i} + \cdots$$

où $a_i\colon S \to k$ est une fonction polynomiale homogène de degré $i$. Ecrivons $n = qm$ où $q$ est une puissance de l'exposant caractéristique de $k$ et où $(q, m) = 1$. On a alors $(X - \lambda(s))^n = (X^q - \lambda(s)^q)^m$; d'où $-m\lambda(s)^q = a_q(s)$, ce qui entraîne le résultat.

PROPOSITION 6. — *Supposons $k$ infini et la condition* (PC) *vérifiée. Soit $k'$ une extension de $k$. Posons* $V' = V \otimes_k k'$, $S' = S \otimes_k k'$. *Soit* $r' : S' \to \mathrm{End}(V')$ *l'application déduite de $r$ par extension des scalaires. Alors*

$$V^0(S) \otimes_k k' = V'^0(S) = V'^0(S').$$

La première égalité résulte de la prop. 1. Pour prouver la deuxième, on peut supposer $V = V^0(S)$ d'où $V' = V'^0(S)$. Soient $(s_1, \ldots, s_m)$ une base de S et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V. Il existe des polynômes $P_{ij}(X_1, \ldots, X_m)$ tels que

$$r'(a_1 s_1 + \cdots + a_m s_m)^n e_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}(a_1, \ldots, a_m) e_i$$

pour $1 \leqslant j \leqslant n$ et $a'_1, \ldots, a'_m \in k'$. Par hypothèse, on a $r'(s)^n = 0$ pour tout $s \in S$, c'est-à-dire $P_{ij}(a_1, \ldots, a_m) = 0$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et $a_1, \ldots, a_m \in k$. Comme $k$ est infini, on a donc $P_{ij} = 0$. Par suite, tout élément de $r'(S')$ est nilpotent et $V' = V'^0(S')$.

PROPOSITION 7. — *Supposons $k$ infini et la condition* (PC) *vérifiée. Soit $\tilde{S}$ l'ensemble des $s \in S$ tels que* $V^0(s) = V^0(S)$. *Si $s \in S$, soit $P(s)$ le déterminant de l'endomorphisme de* $V/V^0(S)$ *défini par $r(s)$* (n° 1, cor. 2 (i) au th. 1).

(i) *La fonction $s \mapsto P(s)$ est polynomiale sur* S. *On a* $\tilde{S} = \{s \in S \mid P(s) \neq 0\}$; *c'est un ouvert de* S *pour la topologie de Zariski* (App. I).

(ii) $\tilde{S}$ *est non vide, et, pour tout $s \in \tilde{S}$, on a* $V^+(s) = V^+(S)$.

Le fait que $s \mapsto P(s)$ soit polynomiale résulte de la linéarité de $r$. Si $s \in S$, on a $V^0(s) \supset V^0(S)$, avec égalité si et seulement si $r(s)$ définit un automorphisme de $V/V^0(S)$, d'où (i).

Soit maintenant $k'$ une clôture algébrique de $k$, et introduisons $V'$, $S'$, $r'$ comme dans la prop. 6. Remarquons que $S'$ vérifie la condition (PC) par prolongement de l'identité polynomiale $\mathrm{ad}(r(s_1))^{2\dim V - 1} r(s_2) = 0$ valable pour $s_1, s_2 \in S$ (n° 1, remarque). Appliquant le th. 1, on en déduit une décomposition

$$V' = V'^0(S') \oplus \sum_{i=1}^{m} V'^{\lambda_i}(S')$$

avec $\lambda_i \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Pour $1 \leqslant i \leqslant m$, il existe une fonction polynomiale $P_i$ non nulle sur $S'$ et un entier $q_i$ tels que $\lambda_i^{q_i} = P_i$ (prop. 5). Puisque $k$ est infini, il existe $s \in S$ tel que $(P_1 \ldots P_m)(s) \neq 0$, cf. A, IV, § 2, n° 3, cor. 2 à la prop. 9. On a alors $\lambda_i(s) \neq 0$ pour tout $i$, d'où $V'^0(S') = V'^0(s)$ et par suite $V^0(S) = V^0(s)$ (prop. 6), ce qui montre que $\tilde{S} \neq \emptyset$. Si $s \in \tilde{S}$, le fait que $V^+(S)$ soit stable par $r(s)$ et supplémentaire de $V^0(s)$ dans V entraîne que $V^+(S) = V^+(s)$ (cor. 2 au th. 1).

### 3. Décomposition des représentations d'une algèbre de Lie nilpotente

Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie et M un $\mathfrak{h}$-module. Pour toute application $\lambda$ de $\mathfrak{h}$ dans $k$, on a défini au n° 1 les sous-espaces vectoriels $M^\lambda(\mathfrak{h})$ et $M_\lambda(\mathfrak{h})$ de M. En particulier, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie contenant $\mathfrak{h}$ comme sous-algèbre, et si $x \in \mathfrak{g}$, on emploiera souvent les notations $\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$ et $\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{h})$ $\mathfrak{g}^\alpha(x)$ et $\mathfrak{g}_\alpha(x)$ ; il sera alors sous-entendu qu'on fait opérer $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$.

Proposition 8. — *Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie, et* L, M, N *des $\mathfrak{h}$-modules. Notons* P *l'ensemble des applications de $\mathfrak{h}$ dans $k$.*

(i) *La somme* $\sum_{\lambda \in P} L^\lambda(\mathfrak{h})$ *est directe.*

(ii) *Si $f$*: L → M *est un homomorphisme de $\mathfrak{h}$-modules, on a* $f(L^\lambda(\mathfrak{h})) \subset M^\lambda(\mathfrak{h})$ *pour tout* $\lambda \in P$.

(iii) *Si $f$*: L × M → N *est une application bilinéaire $\mathfrak{h}$-invariante, on a*

$$f(L^\lambda(\mathfrak{h}) \times M^\mu(\mathfrak{h})) \subset N^{\lambda+\mu}(\mathfrak{h})$$

*quels que soient* $\lambda, \mu \in P$.

Cela résulte des prop. 2 et 3.

Proposition 9. — *Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie nilpotente et* M *un $\mathfrak{h}$-module de dimension finie. Notons* P *l'ensemble des applications de $\mathfrak{h}$ dans $k$.*

(i) *Chaque* $M^\lambda(\mathfrak{h})$ *est un sous-$\mathfrak{h}$-module de* M. *Si, pour tout* $x \in \mathfrak{h}$, $x_M$ *est trigonalisable, alors* $M = \sum_{\lambda \in P} M^\lambda(\mathfrak{h})$.

(ii) *Si $k$ est infini, il existe* $x \in \mathfrak{h}$ *tel que* $M^0(x) = M^0(\mathfrak{h})$.

(iii) *Si $k$ est de caractéristique* 0, *et si* $\lambda \in P$ *est tel que* $M^\lambda(\mathfrak{h}) \neq 0$, *alors* $\lambda$ *est une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ nulle sur* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$, *et* $M_\lambda(\mathfrak{h}) \neq 0$.

(iv) *Si $f$*: M → N *est un homomorphisme surjectif de $\mathfrak{h}$-modules de dimension finie, on a* $f(M^\lambda(\mathfrak{h})) = N^\lambda(\mathfrak{h})$ *pour tout* $\lambda \in P$.

(v) *Si* N *est un $\mathfrak{h}$-module de dimension finie, et* B *une forme bilinéaire sur* M × N *invariante par $\mathfrak{h}$, alors* $M^\lambda(\mathfrak{h})$ *et* $N^\mu(\mathfrak{h})$ *sont orthogonaux relativement à* B *si* $\lambda + \mu \neq 0$. *Si, en outre,* B *est non dégénérée, il en est de même de sa restriction à* $M^\lambda(\mathfrak{h}) \times N^{-\lambda}(\mathfrak{h})$ *pour tout* $\lambda \in P$.

La partie (i) résulte du n° 1, lemme 1 et th. 1. La partie (ii) résulte du n° 2, prop. 7. La partie (iv) résulte du n° 1, cor. 3 du th. 1. Prouvons (iii). On peut supposer que $M = M^\lambda(\mathfrak{h})$. Alors, pour tout $x \in \mathfrak{h}$, on a $\lambda(x) = (\dim V)^{-1} \operatorname{Tr}(x_M)$ ; cela prouve que $\lambda$ est linéaire (ce qui résulte aussi de la prop. 5) et que $\lambda$ s'annule sur $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Considérons l'application $\rho: \mathfrak{h} \to \mathrm{End}_k(M)$ définie par

$$\rho(x) = x_M - \lambda(x) 1_M;$$

en vertu de ce qui précède, c'est une représentation de $\mathfrak{h}$ dans M, et $\rho(x)$ est nilpotent pour tout $x \in \mathfrak{h}$. D'après le th. d'Engel (I, § 4, n° 2, th. 1), il existe $m \neq 0$ dans M tel que $\rho(x)m = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$, d'où $m \in M_\lambda(\mathfrak{h})$.

La première assertion de (v) résulte du n° 1, prop. 2, (ii). Pour prouver la deuxième, on peut supposer $k$ algébriquement clos, vu la prop. 1 du n° 1 ; elle résulte alors de la première et du fait que $M = \sum_\lambda M^\lambda(\mathfrak{h})$, $N = \sum_\mu N^\mu(\mathfrak{h})$, cf. (i).

*Remarque.* — Supposons $k$ parfait de caractéristique 2. Soient $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, k)$, et M le $\mathfrak{h}$-module $k^2$ (pour l'application identique de $\mathfrak{h}$). Si $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ est un élément quelconque de $\mathfrak{h}$, notons $\lambda(x)$ l'unique $\lambda \in k$ tel que $\lambda^2 = a^2 + bc$. Alors $\mathrm{M} = \mathrm{M}^{\lambda}(\mathfrak{h})$ comme le montre un calcul immédiat; en revanche, $\mathrm{M}_{\lambda}(\mathfrak{h}) = 0$ et $\lambda$ n'est ni linéaire, ni nulle sur $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$, bien que $\mathfrak{h}$ soit nilpotente.

COROLLAIRE. — *Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie nilpotente, et M un $\mathfrak{h}$-module de dimension finie tel que $\mathrm{M}^0(\mathfrak{h}) = 0$. Soit $f\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{M}$ une application linéaire telle que*

$$f([x, y]) = x.f(y) - y.f(x) \qquad \textit{pour} \quad x, y \in \mathfrak{h}.$$

*Il existe $a \in \mathrm{M}$ tel que $f(x) = x.a$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$.*

Soit $\mathrm{N} = \mathrm{M} \times k$. Faisons opérer $\mathfrak{h}$ sur N par la formule

$$x.(m, \lambda) = (xm - \lambda f(x), 0).$$

L'identité vérifiée par $f$ entraîne que N est un $\mathfrak{h}$-module (I, § 1, n° 8, exemple 2). L'application $(m, \lambda) \mapsto \lambda$ de N dans $k$ est un homomorphisme de N dans le $\mathfrak{h}$-module trivial $k$. D'après la prop. 9 (iv), il en résulte que $\mathrm{N}^0(\mathfrak{h})$ contient un élément de la forme $(a, 1)$ où $a \in \mathrm{M}$. Vu l'hypothèse faite sur M, on a

$$(\mathrm{M} \times 0) \cap \mathrm{N}^0(\mathfrak{h}) = 0,$$

donc $\mathrm{N}^0(\mathfrak{h})$ est de dimension 1 et par suite est annulé par $\mathfrak{h}$. Ainsi, on a $xa - f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$, ce qui prouve le corollaire.

PROPOSITION 10. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$. Notons P l'ensemble des applications de $\mathfrak{h}$ dans $k$.*

(i) *Pour $\lambda, \mu \in \mathrm{P}$, on a $[\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}), \mathfrak{g}^{\mu}(\mathfrak{h})] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}(\mathfrak{h})$; en particulier, $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$, et les $\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$ sont stables par* ad $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. *De plus, $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ est son propre normalisateur dans $\mathfrak{g}$.*

(ii) *Si M est un $\mathfrak{g}$-module, on a $\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})\mathrm{M}^{\mu}(\mathfrak{h}) \subset \mathrm{M}^{\lambda+\mu}(\mathfrak{h})$ pour $\lambda, \mu \in \mathrm{P}$; en particulier, chaque $\mathrm{M}^{\lambda}(\mathfrak{h})$ est un $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$-module.*

(iii) *Si B est une forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ invariante par $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$ et $\mathfrak{g}^{\mu}(\mathfrak{h})$ sont orthogonaux relativement à B pour $\lambda + \mu \neq 0$. Supposons B non dégénérée. Alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{P}$, la restriction de B à $\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})$ est non dégénérée; en particulier, la restriction de B à $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ est non dégénérée.*

(iv) *Supposons $k$ de caractéristique 0. Alors, si $x \in \mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$ avec $\lambda \neq 0$,* ad $x$ *est nilpotent.*

L'application $(x, y) \mapsto [x, y]$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{g}$-invariante d'après l'identité de Jacobi, donc $\mathfrak{h}$-invariante. La première partie de (i) résulte alors de la prop. 2 (ii). On démontre (ii) de manière analogue.

Si $x$ appartient au normalisateur de $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ dans $\mathfrak{g}$, on a, pour tout $y \in \mathfrak{h}$, $(\mathrm{ad}\, y).x = -[x, y] \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, donc $(\mathrm{ad}\, y)^n . x = 0$ pour $n$ assez grand. Cela prouve que $x \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. L'assertion (i) est ainsi entièrement établie.

L'assertion (iii) résulte de la prop. 9 (v).

Pour démontrer (iv), on peut supposer $k$ algébriquement clos. Soit $x \in \mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$, avec $\lambda \neq 0$. Pour tout $\mu \in \mathrm{P}$ et tout entier $n \geqslant 0$, on a $(\mathrm{ad}\, x)^n \mathfrak{g}^{\mu}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}^{\mu+n\lambda}(\mathfrak{h})$; soit $\mathrm{P}_1$ l'ensemble fini des $\mu \in \mathrm{P}$ tels que $\mathfrak{g}^{\mu}(\mathfrak{h}) \neq 0$; si $k$ est de caractéristique 0 et $\lambda \neq 0$, on a $(\mathrm{P}_1 + n\lambda) \cap \mathrm{P}_1 = \emptyset$ pour $n$ assez grand, d'où $(\mathrm{ad}\, x)^n = 0$.

*Lemme* 2. — *On suppose $k$ de caractéristique* 0. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple sur $k$,* B *la forme de Killing de* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{m}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$. *On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1) *la restriction de* B *à* $\mathfrak{m}$ *est non dégénérée ;*

2) *si* $x \in \mathfrak{m}$, *les composantes semi-simple et nilpotente*[1] *de* $x$ *dans* $\mathfrak{g}$ *appartiennent à* $\mathfrak{m}$.

*Alors* $\mathfrak{m}$ *est réductive dans* $\mathfrak{g}$ (I, § 6, n° 6).

D'après I, § 6, n° 4, prop. 5 *d*), $\mathfrak{m}$ est réductive. Soit $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{m}$. Si $x \in \mathfrak{c}$ est nilpotent, alors $x = 0$; en effet, pour tout $y \in \mathfrak{m}$, ad $x$ et ad $y$ commutent, leur composé $\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y$ est nilpotent, et $\mathrm{B}(x, y) = 0$, d'où $x = 0$. Soit maintenant $x$ un élément quelconque de $\mathfrak{c}$; soient $s$ et $n$ ses composantes semi-simple et nilpotente. On a $n \in \mathfrak{m}$. Comme ad $n$ est de la forme $\mathrm{P}(\mathrm{ad}\, x)$, où P est un polynôme sans terme constant, on a $(\mathrm{ad}\, n).\mathfrak{m} = 0$, donc $n \in \mathfrak{c}$, et alors $n = 0$ d'après ce qui précède. Donc ad $x$ est semi-simple. Par suite, la restriction à $\mathfrak{m}$ de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est semi-simple (I, § 6, n° 5, th. 4 *b*)).

PROPOSITION 11. — *On suppose $k$ de caractéristique* 0. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple,* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre nilpotente de* $\mathfrak{g}$. *L'algèbre* $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ *satisfait aux conditions* (1) *et* (2) *du lemme* 2 ; *elle est réductive dans* $\mathfrak{g}$.

Soient $x, x' \in \mathfrak{g}$, $s$ et $s'$ leurs composantes semi-simples, $n$ et $n'$ leurs composantes nilpotentes. On a

$$\begin{aligned} x' \in \mathfrak{g}^0(x) &\Leftrightarrow (\mathrm{ad}\, s)(x') = 0 && \text{(prop. 4)} \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{ad}\, x')(s) = 0 \\ &\Rightarrow (\mathrm{ad}\, s')(s) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{ad}\, s)(s') = 0 \\ &\Leftrightarrow s' \in \mathfrak{g}^0(x) && \text{(prop. 4)} \end{aligned}$$

donc $x' \in \mathfrak{g}^0(x) \Rightarrow n' \in \mathfrak{g}^0(x)$ et l'on a prouvé (2). La forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est non dégénérée, donc sa restriction à $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ est non dégénérée (prop. 10 (iii)). Le fait que $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ soit réductive dans $\mathfrak{g}$ résulte alors du lemme 2.

## 4. Décomposition d'une algèbre de Lie relativement à un automorphisme

PROPOSITION 12. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie, $a$ un automorphisme de* $\mathfrak{g}$.

(i) *Pour* $\lambda, \mu \in k$, *on a* $[\mathfrak{g}^{\lambda}(a), \mathfrak{g}^{\mu}(a)] \subset \mathfrak{g}^{\lambda\mu}(a)$ ; *en particulier,* $\mathfrak{g}^1(a)$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$.

[1] D'après I, § 6, n° 3, th. 3, tout $x \in \mathfrak{g}$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément semi-simple $s$ et d'un élément nilpotent $n$ commutant entre eux; l'élément $s$ (resp. $n$) s'appelle la *composante semi-simple* (resp. *nilpotente*) de $x$.

(ii) *Si* B *est une forme bilinéaire symétrique sur* $\mathfrak{g}$ *invariante par* $a$, $\mathfrak{g}^{\lambda}(a)$ *et* $\mathfrak{g}^{\mu}(a)$ *sont orthogonaux relativement à* B *pour* $\lambda\mu \neq 1$. *Supposons* B *non dégénérée. Alors, si* $\lambda \neq 0$, *la restriction de* B *à* $\mathfrak{g}^{\lambda}(a) \times \mathfrak{g}^{1/\lambda}(a)$ *est non dégénérée.*

L'assertion (i) et la première moitié de (ii) résultent de la prop. 2 (iii) appliquée à la loi de composition $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ et à la forme bilinéaire B. Pour démontrer la seconde moitié de (ii), on peut supposer $k$ algébriquement clos. On a alors $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\nu \in k} \mathfrak{g}^{\nu}(a)$. Vu ce qui précède, $\mathfrak{g}^{\lambda}(a)$ est orthogonal aux $\mathfrak{g}^{\nu}(a)$ si $\lambda\nu \neq 1$; comme B est non dégénérée, il en résulte que sa restriction à $\mathfrak{g}^{\lambda}(a) \times \mathfrak{g}^{1/\lambda}(a)$ l'est aussi.

Corollaire. — *Supposons* $k$ *de caractéristique zéro et* $\mathfrak{g}$ *semi-simple. Alors la sous-algèbre* $\mathfrak{g}^{1}(a)$ *satisfait aux conditions* (1) *et* (2) *du lemme* 2; *elle est réductive dans* $\mathfrak{g}$.

La condition (1) résulte de la partie (ii) de la prop. 12; la condition (2) résulte de la prop. 4 du n° 1.

## 5. Invariants d'une algèbre de Lie semi-simple relativement à une action semi-simple

*Dans ce n°, on suppose* $k$ *de caractéristique zéro.*

Proposition 13. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple,* $\mathfrak{a}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *réductive dans* $\mathfrak{g}$, *et* $\mathfrak{m}$ *le commutant de* $\mathfrak{a}$ *dans* $\mathfrak{g}$. *La sous-algèbre* $\mathfrak{m}$ *satisfait aux conditions* (1) *et* (2) *du lemme* 2 *du* n° 3; *elle est réductive dans* $\mathfrak{g}$.

D'après la prop. 6 de I, § 3, n° 5, appliquée au $\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{g}$, on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$. Soit B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, et soient $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{m}$, $z \in \mathfrak{g}$. On a

$$\mathrm{B}([z, x], y) = \mathrm{B}(z, [x, y]) = 0 \qquad \text{puisque} \quad [x, y] = 0,$$

ce qui montre que $\mathfrak{m}$ est orthogonal à $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ relativement à B. Comme B est non dégénérée, et que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$, cela entraîne que la restriction de B à $\mathfrak{m}$ est non dégénérée; la condition (1) du lemme 2 est donc vérifiée.

Soit maintenant $x \in \mathfrak{m}$ et soient $s$ et $n$ ses composantes semi-simple et nilpotente. La composante semi-simple de ad $x$ est ad $s$, cf. I, § 6, n° 3. Comme ad $x$ est nul sur $\mathfrak{a}$, il en est de même de ad $s$, d'après la prop. 4 (i). On a donc $s \in \mathfrak{m}$, d'où $n = x - s \in \mathfrak{m}$, et la condition 2 du lemme 2 est satisfaite.

*Remarque.* — Le commutant de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{g}$ n'est pas nécessairement réduit à $\mathfrak{a}$, cf. Exerc. 4.

Proposition 14. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple,* A *un groupe et* $r$ *un homomorphisme de* A *dans* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. *Soit* $\mathfrak{m}$ *la sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *formée des éléments invariants par* $r(\mathrm{A})$. *Supposons que la représentation linéaire* $r$ *soit semi-simple. Alors* $\mathfrak{m}$ *satisfait aux conditions* (1) *et* (2) *du lemme* 2 *du* n° 3; *elle est réductive dans* $\mathfrak{g}$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition précédente:

Soit $\mathfrak{g}^+$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ engendré par les $r(a)x - x$, $a \in A$, $x \in \mathfrak{g}$. L'espace vectoriel $\mathfrak{g}' = \mathfrak{m} + \mathfrak{g}^+$ est stable par $r(A)$. Soit $\mathfrak{n}$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$ stable par $r(A)$. Si $x \in \mathfrak{n}$, $a \in A$, on a $r(a)x - x \in \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}^+ = 0$, d'où $x \in \mathfrak{m}$ et $x = 0$ puisque $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} = 0$. Ainsi, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' = \mathfrak{m} + \mathfrak{g}^+$. Soit B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et soient $y \in \mathfrak{m}$, $a \in A$, $x \in \mathfrak{g}$. On a

$$\begin{aligned} B(y, r(a)x - x) &= B(y, r(a)x) - B(y, x) \\ &= B(r(a^{-1})y, x) - B(y, x) \\ &= B(y, x) - B(y, x) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{g}^+$ sont orthogonaux relativement à B. Il en résulte que la restriction de B à $\mathfrak{m}$ est non dégénérée; d'où la condition (1) du lemme 2. La condition (2) est immédiate par transport de structure.

## § 2. Sous-algèbres de Cartan et éléments réguliers d'une algèbre de Lie

*A partir du* n° 2, *le corps k est supposé infini.*

### 1. Sous-algèbres de Cartan

DÉFINITION 1. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie. On appelle sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *une sous-algèbre nilpotente de* $\mathfrak{g}$ *égale à son normalisateur.*

Nous obtiendrons plus loin les résultats suivants:

1) si $k$ est infini, $\mathfrak{g}$ possède des sous-algèbres de Cartan (n° 3, cor. 1 du th. 1);

2) si $k$ est de caractéristique 0, toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ ont même dimension (§ 3, n° 3, th. 2);

3) si $k$ est algébriquement clos de caractéristique 0, toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par le groupe des automorphismes élémentaires de $\mathfrak{g}$ (§ 3, n° 2, th. 1).

*Exemples.* — 1) Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, la seule sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{g}$ elle-même (I, § 4, n° 1, prop. 3).

2) Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, k)$, et $\mathfrak{h}$ l'ensemble des matrices diagonales appartenant à $\mathfrak{g}$. Montrons que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. D'abord $\mathfrak{h}$ est commutative, donc nilpotente. Soit $(E_{ij})$ la base canonique de $\mathfrak{gl}(n, k)$, et soit $x = \sum \mu_{ij}E_{ij}$ un élément du normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Si $i \neq j$, les formules (5) de I, § 1, n° 2 montrent que le coefficient de $E_{ij}$ dans $[E_{ii}, x]$ est $\mu_{ij}$. Puisque $E_{ii} \in \mathfrak{h}$, on a $[E_{ii}, x] \in \mathfrak{h}$, et le coefficient en question est nul. On a donc $\mu_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, d'où $x \in \mathfrak{h}$, ce qui montre bien que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

3) Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et soit $\mathfrak{g}_1$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$. Alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_1$; cela résulte aussitôt de la déf. 1.

PROPOSITION 1. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre nilpotente maximale de $\mathfrak{g}$.*

Soit $\mathfrak{h}'$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$. Alors $\mathfrak{h}$ est sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}'$ (exemple 3), donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$ (exemple 1).

Il existe des sous-algèbres nilpotentes maximales qui ne sont pas des sous-algèbres de Cartan (exerc. 2).

PROPOSITION 2. — *Soient $(\mathfrak{g})_{i\in I}$ une famille finie d'algèbres de Lie et $\mathfrak{g} = \prod_{i\in I} \mathfrak{g}_i$. Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont les sous-algèbres de la forme $\prod_{i\in I} \mathfrak{h}_i$ où $\mathfrak{h}_i$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_i$.*

Si $\mathfrak{h}_i$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_i$ de normalisateur $\mathfrak{n}_i$, alors $\prod \mathfrak{h}_i$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de normalisateur $\prod \mathfrak{n}_i$; si les $\mathfrak{h}_i$ sont nilpotentes, $\prod \mathfrak{h}_i$ est nilpotente; donc si, pour tout $i$, $\mathfrak{h}_i$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_i$, $\prod \mathfrak{h}_i$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Réciproquement, soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$; la projection $\mathfrak{h}_i$ de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{g}_i$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}_i$, et $\prod \mathfrak{h}_i$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$; on a donc $\mathfrak{h} = \prod \mathfrak{h}_i$ (prop. 1); pour tout $i$, $\mathfrak{h}_i$ est alors son propre normalisateur dans $\mathfrak{g}_i$, donc est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_i$.

*Exemple* 4. — Si $k$ est de caractéristique 0, $\mathfrak{gl}(n, k)$ est produit des idéaux $\mathfrak{sl}(n, k)$ et $k.1$. Il résulte de l'exemple 2 et de la prop. 2 que l'ensemble des matrices diagonales de trace 0 dans $\mathfrak{sl}(n, k)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}(n, k)$.

PROPOSITION 3. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, $k'$ une extension de $k$. Alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ si et seulement si $\mathfrak{h} \otimes_k k'$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g} \otimes_k k'$.*

En effet, $\mathfrak{h}$ est nilpotente si et seulement si $\mathfrak{h} \otimes_k k'$ l'est (I, § 4, n° 5). D'autre part, si $\mathfrak{n}$ est le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, le normalisateur de $\mathfrak{h} \otimes_k k'$ dans $\mathfrak{g} \otimes_k k'$ est $\mathfrak{n} \otimes_k k'$ (I, § 3, n° 8).

PROPOSITION 4. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$. Pour que $\mathfrak{h}$ soit sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.*

Si $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ est son propre normalisateur (§ 1, prop. 10 (i)), donc $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Supposons $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \neq \mathfrak{h}$. Considérons la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$ déduite par passage au quotient de la représentation adjointe. En lui appliquant le théorème d'Engel (I, § 4, n° 2, th. 1), on voit qu'il existe

$x \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ tel que $x \notin \mathfrak{h}$ et $[\mathfrak{h}, x] \subset \mathfrak{h}$; alors $x$ appartient au normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, de sorte que $\mathfrak{h}$ n'est pas une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

COROLLAIRE 1. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$. *Si $k$ est infini, il existe $x \in \mathfrak{h}$ tel que* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$.

En effet, on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, et on applique la prop. 9 (ii) du § 1.

COROLLAIRE 2. — *Soit $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie. Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $f(\mathfrak{h})$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}'$.*

En effet, $f(\mathfrak{h})$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}'$. D'autre part, considérons la représentation $x \mapsto \operatorname{ad} f(x)$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}'$. D'après la prop. 9 (iv) du § 1, n° 3, on a $f(\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})) = \mathfrak{g}'^0(\mathfrak{h})$. Or $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, et d'autre part, il est clair que $\mathfrak{g}'^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}'^0(f(\mathfrak{h}))$. Donc $f(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}'^0(f(\mathfrak{h}))$ et il suffit d'appliquer la prop. 4.

COROLLAIRE 3. — *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit $\mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ $(n \geqslant 1)$ un terme de la série centrale descendante de $\mathfrak{g}$* (I, § 1, n° 5, 2ème édition). *On a* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathscr{C}^n\mathfrak{g}$.

En effet, le corollaire 2 montre que l'image de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}/\mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}/\mathscr{C}^n\mathfrak{g}$, donc est égale à $\mathfrak{g}/\mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ puisque $\mathfrak{g}/\mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ est nilpotente (exemple 1).

COROLLAIRE 4. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$.*

(i) *$\mathfrak{a}$ est égale à son normalisateur dans $\mathfrak{g}$.*

(ii) *Supposons $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$; soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, A le sous-groupe intégral de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$. Alors A est un sous-groupe de Lie de G, et c'est la composante neutre du normalisateur de A dans G.*

Soit $\mathfrak{n}$ le normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{n}$ (exemple 3), $\{0\}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{n}/\mathfrak{a}$ (cor. 2), donc est égal à son normalisateur dans $\mathfrak{n}/\mathfrak{a}$; autrement dit, $\mathfrak{n} = \mathfrak{a}$. L'assertion (ii) résulte de (i) et de III, § 9, n°4, cor. de la prop. 11.

COROLLAIRE 5. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, E une partie de $\mathfrak{g}$. Faisons opérer E dans $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe. Pour que E soit une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, il faut et il suffit que* $\mathrm{E} = \mathfrak{g}^0(\mathrm{E})$.

La condition est nécessaire (prop. 4). Supposons maintenant que $\mathrm{E} = \mathfrak{g}^0(\mathrm{E})$. D'après la prop. 2 (ii) du § 1, n° 1, E est alors une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Si $x \in \mathrm{E}$, $\operatorname{ad}_{\mathrm{E}} x$ est nilpotent puisque $\mathrm{E} \subset \mathfrak{g}^0(\mathrm{E})$; donc l'algèbre E est nilpotente. Alors E est une sous-algèbre de Cartan d'après la prop. 4.

COROLLAIRE 6. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $k_0$ un sous-corps de $k$ tel que* $[k : k_0] < +\infty$, *$\mathfrak{g}_0$ l'algèbre de Lie déduite de $\mathfrak{g}$ par restriction à $k_0$ du corps des scalaires. Soit $\mathfrak{h}$ une partie de*

$\mathfrak{g}$. *Pour que* $\mathfrak{h}$ *soit une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{h}$ *soit une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}_0$.

Cela résulte du cor. 5, car la condition $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ ne fait pas intervenir le corps de base.

PROPOSITION 5. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* $\mathfrak{c}$ *son centre,* $\mathfrak{h}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{g}$. *Pour que* $\mathfrak{h}$ *soit une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{h}$ *contienne* $\mathfrak{c}$ *et que* $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ *soit une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$.

Supposons que $\mathfrak{h}$ soit une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Puisque $[\mathfrak{c}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, on a $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{h}$. D'autre part, $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ d'après le cor. 2 de la prop. 4.

Supposons que $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{c}$ et que $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ soit une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$. Soit $f$ le morphisme canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$. L'algèbre $\mathfrak{h}$, qui est extension centrale de $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$, est nilpotente. Soit $\mathfrak{n}$ le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Si $x \in \mathfrak{n}$, on a $[f(x), \mathfrak{h}/\mathfrak{c}] \subset \mathfrak{h}/\mathfrak{c}$, donc $f(x) \in \mathfrak{h}/\mathfrak{c}$, donc $x \in \mathfrak{h}$. Cela prouve que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

COROLLAIRE. — *Soit* $\mathscr{C}_\infty\mathfrak{g}$ *la réunion de la série centrale ascendante de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ (I, § 1, n° 6). *Les sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *sont les images réciproques des sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}/\mathscr{C}_\infty\mathfrak{g}$.

En effet, le centre de $\mathfrak{g}/\mathscr{C}_i\mathfrak{g}$ est $\mathscr{C}_{i+1}\mathfrak{g}/\mathscr{C}_i\mathfrak{g}$, et le corollaire se déduit de la prop. 5 par une récurrence immédiate.

*Remarque.* — $\mathscr{C}_\infty\mathfrak{g}$ est le plus petit idéal $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ tel que le centre de $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ soit nul; c'est un idéal caractéristique et nilpotent de $\mathfrak{g}$.

## 2. Eléments réguliers d'une algèbre de Lie

[Rappelons que désormais $k$ est supposé infini.]

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension $n$. Si $x \in \mathfrak{g}$, écrivons le polynôme caractéristique de ad $x$ sous la forme

$$\det(\mathrm{T} - \operatorname{ad} x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\mathrm{T}^i, \qquad \text{avec} \quad a_i(x) \in k.$$

On a $a_i(x) = (-1)^{n-i}\,\mathrm{Tr}\left(\bigwedge^{n-i} \operatorname{ad} x\right)$, cf. A, III, p. 107. Ceci montre que $x \mapsto a_i(x)$ est une application polynomiale homogène de degré $n - i$ de $\mathfrak{g}$ dans $k$ (A, IV, § 5, n° 9).

*Remarques.* — 1) Si $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, on a $a_0 = 0$ car $(\operatorname{ad} x)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

2) Soit $k'$ une extension de $k$. Ecrivons $\det(\mathrm{T} - \operatorname{ad} x') = \sum_{i=0}^{n} a'_i(x')\mathrm{T}^i$ pour $x' \in \mathfrak{g} \otimes_k k'$. Alors $a'_i | \mathfrak{g} = a_i$ pour tout $i$.

DÉFINITION 2. — *On appelle rang de* $\mathfrak{g}$ *et on note* $\mathrm{rg}(\mathfrak{g})$ *le plus petit entier* $l$ *tel que* $a_l \neq 0$. *Un élément* $x$ *de* $\mathfrak{g}$ *est dit régulier si* $a_l(x) \neq 0$.

Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on a donc $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) \leqslant \dim \mathfrak{g}^0(x)$, et l'égalité a lieu si et seulement si $x$ est régulier.

L'ensemble des éléments réguliers est ouvert et dense dans $\mathfrak{g}$ pour la topologie de Zariski (App. I).

*Exemples.* — 1) Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, on a $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$ et tous les éléments de $\mathfrak{g}$ sont réguliers.

2) Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$. Si $x = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$, un calcul facile donne

$$\det(\mathrm{T} - \mathrm{ad}\, x) = \mathrm{T}^3 - 4(\alpha\beta + \gamma^2)\mathrm{T}.$$

Si la caractéristique de $k$ est $\neq 2$, alors $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) = 1$ et les éléments réguliers sont les $x$ tels que $\alpha\beta + \gamma^2 \neq 0$.

3) Soient V un espace vectoriel de dimension finie $n$, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\mathrm{V})$. Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de $k$. Soient $x \in \mathfrak{g}$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines dans $\bar{k}$ du polynôme caractéristique de $x$ (chaque racine étant écrite un nombre de fois égal à sa multiplicité). L'isomorphisme canonique de $\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V}$ sur $\mathfrak{g}$ est compatible avec les structures de $\mathfrak{g}$-module de ces deux espaces, autrement dit transforme $1 \otimes x - {}^t x \otimes 1$ en $\mathrm{ad}\, x$ (I, § 3, n° 3, prop. 4). Compte tenu du § 1, prop. 4 (i), on en déduit que les racines du polynôme caractéristique de $\mathrm{ad}\, x$ sont les $\lambda_i - \lambda_j$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ (chaque racine étant écrite un nombre de fois égal à sa multiplicité). Le rang de $\mathfrak{g}$ est donc $n$ et, pour que $x$ soit régulier, il faut et il suffit que chaque $\lambda_i$ soit racine simple du polynôme caractéristique de $x$.

PROPOSITION 6. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* $k'$ *une extension de* $k$, *et* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k k'$.

(i) *Pour qu'un élément* $x$ *de* $\mathfrak{g}$ *soit régulier dans* $\mathfrak{g}$, *il faut et il suffit que* $x \otimes 1$ *soit régulier dans* $\mathfrak{g}'$.

(ii) *On a* $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}')$.

Cela résulte de la remarque 2.

PROPOSITION 7. — *Soient* $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille finie d'algèbres de Lie, et* $\mathfrak{g} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{g}_i$.

(i) *Pour qu'un élément* $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *de* $\mathfrak{g}$ *soit régulier dans* $\mathfrak{g}$, *il faut et il suffit que, pour tout* $i \in \mathrm{I}$, $x_i$ *soit régulier dans* $\mathfrak{g}_i$.

(ii) *On a* $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{rg}(\mathfrak{g}_i)$.

En effet, pour tout $x = (x_i)_{i \in \mathrm{I}} \in \mathfrak{g}$, le polynôme caractéristique de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ est le produit des polynômes caractéristiques des $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_i}\, x_i$.

PROPOSITION 8. — *Soit* $f \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie.*

(i) *Si* $x$ *est un élément régulier de* $\mathfrak{g}$, $f(x)$ *est régulier dans* $\mathfrak{g}'$. *La réciproque est vraie si* $\mathrm{Ker} f$ *est contenu dans le centre de* $\mathfrak{g}$.

(ii) *On a* $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) \geqslant \mathrm{rg}(\mathfrak{g}')$.

Posons $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) = r$, $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}') = r'$. Soit $x \in \mathfrak{g}$. Les polynômes caractéristiques de $\mathrm{ad}\, x$, $\mathrm{ad} f(x)$ et $\mathrm{ad}\, x | \mathrm{Ker} f$ sont de la forme

$$\begin{aligned} P(T) &= T^n + a_{n-1}(x)T^{n-1} + \cdots + a_r(x)T^r, \\ Q(T) &= T^{n'} + b_{n'-1}(x)T^{n'-1} + \cdots + b_{r'}(x)T^{r'}, \\ R(T) &= T^{n''} + c_{n''-1}(x)T^{n''-1} + \cdots + c_{r''}(x)T^{r''}, \end{aligned}$$

où les $a_i$, $b_i$, $c_i$ sont des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$, avec $a_r \neq 0$, $b_{r'} \neq 0$, $c_{r''} \neq 0$. On a $P = QR$, donc $r = r' + r''$ et $a_r(x) = b_{r'}(x)c_{r''}(x)$, ce qui prouve (ii) et la première assertion de (i). Si $\mathrm{Ker} f$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$, on a $R(T) = T^{n''}$, donc $a_r(x) = b_{r'}(x)$, d'où la deuxième assertion de (i).

COROLLAIRE. — *Soit* $\mathscr{C}_n\mathfrak{g}$ $(n \geqslant 0)$ *un terme de la série centrale ascendante de* $\mathfrak{g}$ (I, § 1, n° 6). *Les éléments réguliers de* $\mathfrak{g}$ *sont ceux dont l'image dans* $\mathfrak{g}/\mathscr{C}_n\mathfrak{g}$ *est régulière.*

PROPOSITION 9. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* $\mathfrak{g}'$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$. *Tout élément de* $\mathfrak{g}'$ *régulier dans* $\mathfrak{g}$ *est régulier dans* $\mathfrak{g}'$.

Pour $x \in \mathfrak{g}'$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ admet $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}\, x$ pour restriction à $\mathfrak{g}'$, et définit par passage au quotient un endomorphisme $u(x)$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$. Soit $d_0(x)$ (resp. $d_1(x)$) la dimension du nilespace de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}\, x$ (resp. de $u(x)$), et soit $c_0$ (resp. $c_1$) le minimum de $d_0(x)$ (resp. $d_1(x)$) quand $x$ parcourt $\mathfrak{g}'$. Il existe des applications polynomiales non nulles $p_0$, $p_1$ de $\mathfrak{g}'$ dans $k$ telles que

$$d_0(x) = c_0 \Leftrightarrow p_0(x) \neq 0, \qquad d_1(x) = c_1 \Leftrightarrow p_1(x) \neq 0.$$

Comme $k$ est infini, l'ensemble S des $x \in \mathfrak{g}'$ tels que $d_0(x) = c_0$ et $d_1(x) = c_1$ est non vide. Tout élément de S est régulier dans $\mathfrak{g}'$. D'autre part, S est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}'$ tels que le nilespace de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ soit de dimension minimum, et contient donc tout élément de $\mathfrak{g}'$ qui est régulier dans $\mathfrak{g}$.

*Remarque.* — 3) Il n'existe pas nécessairement d'élément de $\mathfrak{g}'$ régulier dans $\mathfrak{g}$. S'il en existe au moins un, l'ensemble de ces éléments n'est autre que l'ensemble noté S dans la démonstration ci-dessus.

### 3. Sous-algèbres de Cartan et éléments réguliers

THÉORÈME 1. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie.*

(i) *Si* $x$ *est un élément régulier de* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^0(x)$ *est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$.

(ii) *Si* $\mathfrak{h}$ *est une sous-algèbre nilpotente maximale de* $\mathfrak{g}$, *et si* $x \in \mathfrak{h}$ *est régulier dans* $\mathfrak{g}$, *alors* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$.

(iii) *Si* $\mathfrak{h}$ *est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$, *on a* $\dim(\mathfrak{h}) \geqslant \mathrm{rg}(\mathfrak{g})$.

(iv) *Les sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *de dimension* $\mathrm{rg}(\mathfrak{g})$ *sont les* $\mathfrak{g}^0(x)$ *où* $x$ *est un élément régulier.*

Soit $x$ un élément régulier de $\mathfrak{g}$ et soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$. On a évidemment $\mathfrak{h}^0(x) = \mathfrak{h}$. Comme $x$ est régulier dans $\mathfrak{h}$ (prop. 9), on a $\mathrm{rg}(\mathfrak{h}) = \dim(\mathfrak{h})$, de sorte que $\mathfrak{h}$ est nilpotente. D'autre part, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x) \supset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \supset \mathfrak{h}$, donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ (prop. 4). Cela prouve (i).

Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre nilpotente maximale de $\mathfrak{g}$, et si $x \in \mathfrak{h}$ est régulier dans $\mathfrak{g}$, on a $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(x)$, et $\mathfrak{g}^0(x)$ est nilpotente d'après (i), donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$, ce qui établit (ii).

Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, il existe $x \in \mathfrak{h}$ tel que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$ (cor. 1 de la prop. 4), d'où $\dim(\mathfrak{h}) \geqslant \mathrm{rg}(\mathfrak{g})$, ce qui prouve (iii). Si en outre $\dim(\mathfrak{h}) = \mathrm{rg}(\mathfrak{g})$, $x$ est régulier. Enfin, si $x'$ est régulier dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^0(x')$ est une sous-algèbre de Cartan d'après (i), évidemment de dimension $\mathrm{rg}(\mathfrak{g})$. Cela prouve (iv).

Nous verrons au § 3, th. 2, que, lorsque $k$ est de caractéristique zéro, toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ ont pour dimension $\mathrm{rg}(\mathfrak{g})$.

COROLLAIRE 1. — *Toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède des sous-algèbres de Cartan, et le rang de $\mathfrak{g}$ est la dimension minimum des sous-algèbres de Cartan.*

COROLLAIRE 2. — *Soit $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie. Si $\mathfrak{h}'$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}'$, il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{h}' = f(\mathfrak{h})$.*

Soit $\mathfrak{a} = f^{-1}(\mathfrak{h}')$. D'après le cor. 1, $\mathfrak{a}$ possède une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$. D'après le cor. 2 de la prop. 4, on a $f(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$. Montrons que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{n}$ le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Il s'agit de prouver que $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$. Si $x \in \mathfrak{n}$, $f(x)$ appartient au normalisateur de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{g}'$, donc $f(x) \in \mathfrak{h}'$ et $x \in \mathfrak{a}$; mais $\mathfrak{h}$ est son propre normalisateur dans $\mathfrak{a}$, donc $x \in \mathfrak{h}$.

COROLLAIRE 3. — *Toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est somme de ses sous-algèbres de Cartan.*

La somme $\mathfrak{s}$ des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ contient l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$ (th. 1 (i)). Comme cet ensemble est dense dans $\mathfrak{g}$ pour la topologie de Zariski, on a $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$.

PROPOSITION 10. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{c}$ le commutant de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. On suppose que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ est semi-simple pour tout $x \in \mathfrak{a}$. Alors les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{c}$ sont les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{a}$.*

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{c}$. Comme $\mathfrak{a}$ est contenue dans le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{c}$, on a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z} \subset \mathfrak{h}$ (prop. 5). Soit $\mathfrak{n}$ le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. On a

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{h}.$$

Comme les $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$, $x \in \mathfrak{a}$, sont semi-simples et commutent entre eux, il résulte de A, VIII, § 5, n° 1, qu'il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{n}$ stable par $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{a}$ et tel que $\mathfrak{n} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{d}$. On a $[\mathfrak{a}, \mathfrak{d}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{d} = 0$, donc $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{c}$. Ainsi, $\mathfrak{n}$ est le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{c}$, et par suite $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$, de sorte que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{a}$.

Inversement, soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{a}$. On a $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{a})$, et par hypothèse $\mathfrak{g}_0(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}$. D'où $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{c}$ et $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{c}$ (car égale à son normalisateur dans $\mathfrak{g}$, donc *a fortiori* dans $\mathfrak{c}$).

PROPOSITION 11. — *Soit $\mathfrak{n}$ une sous-algèbre nilpotente d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il existe une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{n})$.*

Posons $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{n})$. On a $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{a}$ puisque $\mathfrak{n}$ est nilpotente. Si $x \in \mathfrak{a}$, soit $P(x)$ le déterminant de l'endomorphisme de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ défini par ad $x$. Notons $\mathfrak{a}'$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{a}$ tels que $P(x) \neq 0$, c'est un ouvert de $\mathfrak{a}$ pour la topologie de Zariski; les relations $x \in \mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{g}^0(x) \subset \mathfrak{a}$ sont équivalentes. D'après la prop. 7 (ii) du § 1, n° 2, il existe $y \in \mathfrak{n}$ tel que $\mathfrak{g}^0(y) = \mathfrak{a}$, et l'on a $y \in \mathfrak{a}'$, ce qui montre que $\mathfrak{a}'$ est non vide. Comme $\mathfrak{a}'$ est ouvert, son intersection avec l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{a}$ est non vide. Soit $x$ un élément de cette intersection. On a $\mathfrak{g}^0(x) \subset \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}^0(x)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{a}$, donc est nilpotente. D'autre part, la prop. 10 (i) du § 1, n° 3, montre que $\mathfrak{g}^0(x)$ est son propre normalisateur dans $\mathfrak{g}$; c'est donc une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, ce qui achève la démonstration.

## 4. Sous-algèbres de Cartan des algèbres de Lie semi-simples

THÉORÈME 2. — *Supposons $k$ de caractéristique 0. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{h}$ est commutative, et tous ses éléments sont semi-simples dans* $\mathfrak{g}$ (I, § 6, n° 3, déf. 3).

Comme $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{h}$ est réductive (§ 1, prop. 11), donc commutative puisque nilpotente. D'autre part, la restriction à $\mathfrak{h}$ de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est semi-simple (*loc. cit.*), donc les éléments de $\mathfrak{h}$ sont semi-simples dans $\mathfrak{g}$ (A, VIII, § 5, n° 1).

COROLLAIRE 1. — *Si $x \in \mathfrak{h}$ et $y \in \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$, on a* $[x, y] = \lambda(x)y$.

En effet, puisque ad $x$ est semi-simple, on a $\mathfrak{g}^{\lambda(x)}(x) = \mathfrak{g}_{\lambda(x)}(x)$.

COROLLAIRE 2. — *Tout élément régulier de $\mathfrak{g}$ est semi-simple.*

En effet, un tel élément appartient à une sous-algèbre de Cartan (n° 3, th. 1 (i)).

COROLLAIRE 3. — *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}$.*

*a) $\mathfrak{h}$ est commutative.*

*b) Si $\rho$ est une représentation semi-simple de dimension finie de $\mathfrak{g}$, les éléments de $\rho(\mathfrak{h})$ sont semi-simples.*

Soient $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{s}$ son algèbre dérivée. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, d'où $\mathfrak{h} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{h}'$, où $\mathfrak{h}'$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}$ (prop. 2). Vu le th. 2, $\mathfrak{h}'$ est commutative, et il en est de même de $\mathfrak{h}$. De plus, $\rho(\mathfrak{h}')$ est formée d'éléments semi-simples et il en est de même de $\rho(\mathfrak{c})$ (I, § 6, n° 5, th. 4); l'assertion (*b*) en résulte.

## § 3. Théorèmes de conjugaison

*Dans ce paragraphe, le corps de base k est de caractéristique* 0.

### 1. Automorphismes élémentaires

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Nous noterons $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ le groupe de ses automorphismes. Si $x \in \mathfrak{g}$ et si $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent, on a $e^{\mathrm{ad}\, x} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (I, § 6, n° 8).

DÉFINITION 1. — *On appelle automorphisme élémentaire de $\mathfrak{g}$ tout produit fini d'automorphismes de $\mathfrak{g}$ de la forme $e^{\mathrm{ad}\, x}$ avec* ad $x$ *nilpotent. On note* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ *le groupe des automorphismes élémentaires de $\mathfrak{g}$.*

Si $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, on a $ue^{\mathrm{ad}\, x}u^{-1} = e^{\mathrm{ad}\, u(x)}$. Il en résulte que $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Si $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ est contenu dans le groupe $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$ (III, § 6, n° 2, déf. 2).

* Dans le cas général, $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ est contenu dans la composante neutre du groupe algébrique $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.*

*Lemme* 1. — *Soient* V *un espace vectoriel de dimension finie,* $\mathfrak{n}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{a} = \mathfrak{gl}(\mathrm{V})$ *formée d'éléments nilpotents.*

(i) *L'application* $x \mapsto \exp x$ *est une bijection de* $\mathfrak{n}$ *sur un sous-groupe* N *de* $\mathbf{GL}(\mathrm{V})$ *formé d'éléments unipotents* (II, § 6, n° 1, remarque 4). *On a* $\mathfrak{n} = \log(\exp \mathfrak{n})$. *L'application* $f \mapsto f \circ \log$ *est un isomorphisme de l'algèbre des fonctions polynomiales sur* $\mathfrak{n}$ *sur l'algèbre des restrictions à* N *des fonctions polynomiales sur* End(V).

(ii) *Si* $x \in \mathfrak{n}$ *et* $a \in \mathfrak{a}$, *on a*

$$(\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, x).a = (\exp x)a(\exp(-x)).$$

(iii) *Soient* V′ *un espace vectoriel de dimension finie,* $\mathfrak{n}'$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{gl}(\mathrm{V}')$ *formée d'éléments nilpotents,* $\rho$ *un homomorphisme de* $\mathfrak{n}$ *dans* $\mathfrak{n}'$. *Soit* $\pi$ *l'application* $\exp x \mapsto \exp \rho(x)$ *de* $\exp \mathfrak{n}$ *dans* $\exp \mathfrak{n}'$. *Alors* $\pi$ *est un homomorphisme de groupes.*

D'après le th. d'Engel, on peut identifier V à $k^n$ de telle sorte que $\mathfrak{n}$ soit une sous-algèbre de $\mathfrak{n}(n, k)$ (sous-algèbre de Lie de $\mathbf{M}_n(k)$ formée des matrices triangulaires inférieures de diagonale nulle). Pour $s \geqslant 0$, soit $\mathfrak{n}_s(n, k)$ l'ensemble des $(x_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(k)$ telles que $x_{ij} = 0$ pour $i - j < s$. Alors

$$[\mathfrak{n}_s(n, k), \mathfrak{n}_{s'}(n, k)] \subset \mathfrak{n}_{s+s'}(n, k)$$

(II, § 4, n° 6, remarque), et la série de Hausdorff définit une application polynomiale $(a, b) \mapsto \mathrm{H}(a, b)$ de $\mathfrak{n}(n, k) \times \mathfrak{n}(n, k)$ dans $\mathfrak{n}(n, k)$ (II, § 6, n° 5, remarque 3); muni de cette application, $\mathfrak{n}(n, k)$ est un groupe (II, § 6, n° 5, prop. 4). D'après II, § 6, n° 1, remarque 4, les applications $x \mapsto \exp x$ de $\mathfrak{n}(n, k)$ dans $1 + \mathfrak{n}(n, k)$ et $y \mapsto \log y$ de $1 + \mathfrak{n}(n, k)$ dans $\mathfrak{n}(n, k)$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre et sont polynomiales; d'après II, § 6, n° 5, prop. 3, ces bijections sont des isomorphismes de groupes si l'on munit $\mathfrak{n}(n, k)$ de la loi $(a, b) \mapsto \mathrm{H}(a, b)$ et si l'on considère $1 + \mathfrak{n}(n, k)$ comme sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(k)$. Les assertions (i) et (iii) du lemme résultent de là. Soit $x \in \mathfrak{n}$. Notons $\mathrm{L}_x$, $\mathrm{R}_x$ les applications $u \mapsto xu$, $u \mapsto ux$ de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}$, qui sont permutables et nilpotentes. On a $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, x = \mathrm{L}_x - \mathrm{R}_x$, donc, pour tout $a \in \mathfrak{a}$,

$$(1) \qquad (\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, x)a = (\exp(\mathrm{L}_x - \mathrm{R}_x))a = (\exp \mathrm{L}_x)(\exp \mathrm{R}_{-x})a$$
$$= \sum_{i,j \geqslant 0} \frac{\mathrm{L}_x^i}{i!} \frac{\mathrm{R}_{-x}^j}{j!} a = (\exp x)a(\exp(-x)).$$

Avec les notations du lemme 1, on dit que $\pi$ est la représentation linéaire de $\exp \mathfrak{n}$ *compatible* avec la représentation donnée $\rho$ de $\mathfrak{n}$ dans V'. Lorsque $k$ est **R**, **C**, ou un corps ultramétrique complet non discret, on a $\rho = \mathrm{L}(\pi)$ d'après les propriétés des applications exponentielles (III, § 4, n° 4, cor. 2 à la prop. 8).

Proposition 1. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* $\mathfrak{n}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *telle que* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ *soit nilpotent pour tout* $x \in \mathfrak{n}$. *Alors* $e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}}$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

Cela résulte aussitôt du lemme 1 (i).

En particulier, si on prend pour $\mathfrak{n}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$, $e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}}$ est le groupe des *automorphismes spéciaux* de $\mathfrak{g}$ (I, § 6, n° 8, déf. 6).

*Remarques.* — 1) Soient V un espace vectoriel de dimension finie, $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{a} = \mathfrak{gl}(\mathrm{V})$, $x$ un élément de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ soit nilpotent. Alors il existe un élément nilpotent $n$ de $\mathfrak{a}$ tel que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, n$ prolonge $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$. En effet, soient $s$, $n$ les composantes semi-simple et nilpotente de $x$; alors $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, s$ et $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, n$ sont les composantes semi-simple et nilpotente de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, x$ (I, § 5, n° 4, lemme 2), donc $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, s$ et $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, n$ laissent stables $\mathfrak{g}$, et $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, s \,|\, \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, n \,|\, \mathfrak{g}$ sont les composantes semi-simple et nilpotente de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$; par suite, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, n \,|\, \mathfrak{g}$, ce qui prouve notre assertion. Compte tenu du lemme 1 (ii), on voit que tout automorphisme élémentaire de $\mathfrak{g}$ se prolonge en un automorphisme de $\mathfrak{a}$ de la forme $u \mapsto mum^{-1}$ où $m \in \mathbf{GL}(\mathrm{V})$.

2) Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Pour tout $g \in \mathbf{SL}(\mathrm{V})$, notons $\varphi(g)$ l'automorphisme $x \mapsto gxg^{-1}$ de $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$. On a

$$\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{gl}(\mathrm{V})) = \varphi(\mathbf{SL}(\mathrm{V})).$$

En effet, d'après (1), $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{gl}(\mathrm{V}))$ est contenu dans $\varphi(\mathbf{SL}(\mathrm{V}))$, et l'inclusion opposée résulte de A, III, p. 104, prop. 17 et de (1). Un argument analogue montre que $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{sl}(V))$ est l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{sl}(V)$ des éléments de $\varphi(\mathbf{SL}(V))$.

## 2. Conjugaison des sous-algèbres de Cartan

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$ et R l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, autrement dit l'ensemble des formes linéaires $\lambda \neq 0$ sur $\mathfrak{h}$ telles que $\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \neq 0$, cf. § 1, n° 3, prop. 9 (iii). Supposons que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \oplus \sum_{\lambda \in R} \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}),$$

ce qui est le cas si $k$ est algébriquement clos (§ 1, n° 3, prop. 9 (i)). Pour $\lambda \in R$ et $x \in \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$, ad $x$ est nilpotent (§ 1, n° 3, prop. 10 (iv)). On note $E(\mathfrak{h})$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ engendré par les $e^{\mathrm{ad}\, x}$ où $x$ est de la forme précédente. Si $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, on a aussitôt $uE(\mathfrak{h})u^{-1} = E(u(\mathfrak{h}))$.

*Lemme* 2. — (i) *Soit* $\mathfrak{h}_r$ *l'ensemble des* $x \in \mathfrak{h}$ *tels que* $\mathfrak{g}^0(x) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$; *c'est l'ensemble des* $x \in \mathfrak{h}$ *tels que* $\lambda(x) \neq 0$ *pour tout* $\lambda \in R$, *et* $\mathfrak{h}_r$ *est ouvert dense dans* $\mathfrak{h}$ *pour la topologie de Zariski.*

(ii) *Posons* $R = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ *où les* $\lambda_i$ *sont deux à deux distincts. Soit* F *l'application de* $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h}) \times \cdots \times \mathfrak{g}^{\lambda_p}(\mathfrak{h})$ *dans* $\mathfrak{g}$ *définie par la formule*

$$F(h, x_1, \ldots, x_p) = e^{\mathrm{ad}\, x_1} \ldots e^{\mathrm{ad}\, x_p} h.$$

*Alors* F *est une application polynomiale dominante* (App. I).

L'assertion (i) est évidente. Prouvons (ii). Soit $n = \dim \mathfrak{g}$. Si $\lambda \in R$ et $x \in \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$, on a $(\mathrm{ad}\, x)^n = 0$. Il en résulte que $(y, x) \mapsto e^{\mathrm{ad}\, x} y$ est une application polynomiale de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$ dans $\mathfrak{g}$; on en déduit par récurrence que F est polynomiale. Soit $h_0 \in \mathfrak{h}_r$ et soit DF l'application linéaire tangente à F en $(h_0, 0, \ldots, 0)$; montrons que DF est surjective. Pour $h \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, on a $F(h_0 + h, 0, \ldots, 0) = h_0 + h$, donc $(\mathrm{DF})\ (h, 0, \ldots, 0) = h$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{DF}) \supset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. D'autre part, pour $x \in \mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h})$, on a

$$F(h_0, x, 0, \ldots, 0) = e^{\mathrm{ad}\, x} h_0 = h_0 + (\mathrm{ad}\, x).h_0 + \frac{(\mathrm{ad}\, x)^2}{2!} h_0 + \cdots$$

donc $(\mathrm{DF})\ (0, x, 0, \ldots, 0) = (\mathrm{ad}\, x).h_0 = -(\mathrm{ad}\, h_0)x$; comme ad $h_0$ induit un automorphisme de $\mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h})$, on a $\mathrm{Im}(\mathrm{DF}) \supset \mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h})$. On voit de même que

$$\mathrm{Im}(\mathrm{DF}) \supset \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h})$$

pour tout $i$, d'où la surjectivité de DF. La prop. 4 de l'App. I montre alors que F est dominante.

PROPOSITION 2. — *Supposons* $k$ *algébriquement clos. Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{h}'$ *des sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$. *Il existe* $u \in E(\mathfrak{h})$ *et* $u' \in E(\mathfrak{h}')$ *tels que* $u(\mathfrak{h}) = u'(\mathfrak{h}')$.

Conservons les notations du lemme 2. Du fait que $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ sont des sous-algèbres de Cartan, on a $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$. D'après le lemme 2 et la prop. 3 de l'App. I, $E(\mathfrak{h})\mathfrak{h}_r$ et $E(\mathfrak{h}')\mathfrak{h}'_r$ contiennent des parties de $\mathfrak{g}$ qui sont ouvertes et denses pour la topologie de Zariski. On a donc $E(\mathfrak{h})\mathfrak{h}_r \cap E(\mathfrak{h}')\mathfrak{h}'_r \neq \emptyset$. Autrement dit, il existe $u \in E(\mathfrak{h})$, $u' \in E(\mathfrak{h}')$, $h \in \mathfrak{h}_r$, $h' \in \mathfrak{h}'_r$ tels que $u(h) = u'(h')$ ; on a alors

$$u(\mathfrak{h}) = u(\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})) = \mathfrak{g}^0(u(h)) = \mathfrak{g}^0(u'(h')) = u'(\mathfrak{h}').$$

Corollaire. — *On a* $E(\mathfrak{h}) = E(\mathfrak{h}')$.

Soient $u, u'$ comme dans la prop. 2. On a

$$E(\mathfrak{h}) = uE(\mathfrak{h})u^{-1} = E(u(\mathfrak{h})) = E(u'(\mathfrak{h}')) = u'E(\mathfrak{h}')u'^{-1} = E(\mathfrak{h}'),$$

d'où le corollaire.

En raison de ce résultat, si $k$ est algébriquement clos, nous noterons simplement E le groupe $E(\mathfrak{h})$, où $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

En général, $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \neq E$ (par exemple, si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, E est réduit à l'élément neutre, tandis qu'il existe des automorphismes élémentaires non triviaux pourvu que $\mathfrak{g}$ soit non commutative). On peut montrer cependant (VIII, § 10, exerc. 5) que $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) = E$ pour $\mathfrak{g}$ semi-simple.

Théorème 1. — *Supposons $k$ algébriquement clos. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Le groupe* E *est distingué dans* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *et opère transitivement sur l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$.

Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, et $v \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. On a

$$vE(\mathfrak{h})v^{-1} = E(v(\mathfrak{h})) = E(\mathfrak{h}),$$

donc $E(\mathfrak{h}) = E$ est distingué dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Si $\mathfrak{h}'$ est une autre sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, on a, avec les notations de la prop. 2, $u'^{-1}u(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$, et $u'^{-1}u \in E$.

## 3. Applications de la conjugaison

Théorème 2. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.*

(i) *Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ ont même dimension, à savoir* $\mathrm{rg}(\mathfrak{g})$, *et même classe de nilpotence.*

(ii) *Pour qu'un élément $x \in \mathfrak{g}$ soit régulier, il faut et il suffit que $\mathfrak{g}^0(x)$ soit une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ ; toute sous-algèbre de Cartan s'obtient de cette façon.*

Pour démontrer (i), on peut supposer $k$ algébriquement clos (cf. § 2, prop. 3 et prop. 6), auquel cas cela résulte du th. 1 du n° 2. L'assertion (ii) résulte de (i) et du § 2, th. 1, (i) et (iv).

Proposition 3. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}'$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathfrak{g}'$ contient un élément régulier de $\mathfrak{g}$, et* $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}')$ ;

(ii) *$\mathfrak{g}'$ contient une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$;*

(iii) *toute sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}'$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

(i) $\Rightarrow$ (ii): Supposons que $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}')$, et qu'il existe $x \in \mathfrak{g}'$ régulier dans $\mathfrak{g}$. Posons $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}'^0(x) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$. On a

$$\mathrm{rg}(\mathfrak{g}') \leqslant \dim \mathfrak{h}' \leqslant \dim \mathfrak{h} = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}) = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}')$$

donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$. Cela prouve (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Supposons que $\mathfrak{g}'$ contienne une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, et soit $\mathfrak{h}_1$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}'$. Pour prouver que $\mathfrak{h}_1$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, on peut supposer $k$ algébriquement clos. Soient alors $\mathrm{E}(\mathfrak{h})$ et $\mathrm{E}'(\mathfrak{h})$ les groupes d'automorphismes de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ associés à $\mathfrak{h}$ (n° 2). D'après le th. 1, il existe $f \in \mathrm{E}'(\mathfrak{h})$ tel que $f(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_1$. Or tout élément de $\mathrm{E}'(\mathfrak{h})$ est induit par un élément de $\mathrm{E}(\mathfrak{h})$; en effet, il suffit de le vérifier pour $e^{\mathrm{ad}\, x}$, avec $x \in \mathfrak{g}'^{\lambda}(\mathfrak{h})$, $\lambda \neq 0$, auquel cas cela résulte de l'inclusion $\mathfrak{g}'^{\lambda}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$. Donc $\mathfrak{h}_1$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Supposons la condition (iii) vérifiée. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}'$. Comme c'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, elle contient un élément régulier de $\mathfrak{g}$ (th. 2 (ii)), et d'autre part $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{h}) = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}')$.

COROLLAIRE. — *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$. La sous-algèbre $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ possède les propriétés* (i), (ii), (iii) *de la prop.* 3.

En effet, la prop. 11 du § 2, n° 3, montre que $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ possède la propriété (ii).

PROPOSITION 4. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $l$ le rang de $\mathfrak{g}$, $c$ la classe de nilpotence des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$, et $x \in \mathfrak{g}$. Il existe une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de dimension $l$, dont la classe de nilpotence est $\leqslant c$, et qui contient $x$.*

Soit T une indéterminée. Soient $k' = k(\mathrm{T})$ et $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k k'$. Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} \otimes_k k'$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}'$, donc le rang de $\mathfrak{g}'$ est $l$ et la classe de nilpotence de toute sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}'$ est $c$.

Choisissons un élément régulier $y$ de $\mathfrak{g}$. Avec les notations du § 2, n° 2, on a $a_l(y) \neq 0$. Notons encore $a_l$ la fonction polynomiale sur $\mathfrak{g}'$ qui prolonge $a_l$. Alors l'élément $a_l(x + \mathrm{T}y)$ de $k[\mathrm{T}]$ admet $a_l(y)$ pour coefficient dominant. En particulier, $x + \mathrm{T}y$ est régulier dans $\mathfrak{g}'$. Soit $\mathfrak{h}'$ le nilespace de $\mathrm{ad}(x + \mathrm{T}y)$ dans $\mathfrak{g}'$. Alors $\dim \mathfrak{h}' = l$ et la classe de nilpotence de $\mathfrak{h}'$ est $c$. Posons $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}' \cap (\mathfrak{g} \otimes_k k[\mathrm{T}])$; on a $\mathfrak{k} \otimes_{k[\mathrm{T}]} k(\mathrm{T}) = \mathfrak{h}'$.

Soit $\varphi$ l'homomorphisme de $k[\mathrm{T}]$ sur $k$ tel que $\varphi(\mathrm{T}) = 0$, et soit $\psi$ l'homomorphisme $1 \otimes \varphi$ de $\mathfrak{g} \otimes_k k[\mathrm{T}]$ sur $\mathfrak{g}$. Alors $\psi(\mathfrak{k})$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, dont la classe de nilpotence est $\leqslant c$, et qui contient $\psi(x + \mathrm{T}y) = x$.

Dans le $k[\mathrm{T}]$-module libre $\mathfrak{g} \otimes_k k[\mathrm{T}]$, $\mathfrak{k}$ est un sous-module de rang $l$, et $(\mathfrak{g} \otimes_k k[\mathrm{T}])/\mathfrak{k}$ est sans torsion, de sorte que $\mathfrak{k}$ est un sous-module facteur direct dans $\mathfrak{g} \otimes_k k[\mathrm{T}]$ (A, VII, § 4, n° 2, th. 1). Donc $\dim_k \psi(\mathfrak{k}) = l$, ce qui achève la démonstration.