Emanuele
Ludovico

RGENZE

Gio
mat

Convergenze

a cura di

G. Anzellotti, L. Giacardi, B. Lazzari

Emanuele Delucchi
Giovanni Gaiffi
Ludovico Pernazza

Giochi e percorsi matematici

Springer

Emanuele Delucchi
Dipartimento di Matematica
Università di Brema

Giovanni Gaiffi
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa

Ludovico Pernazza
Dipartimento di Matematica
Università di Pavia

ISBN 978-88-470-2615-5 ISBN 978-88-470-2616-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-88-470-2616-2

Springer Milan Dordrecht Heidelberg London New York

Immagine di copertina: disegno di Chiara Noci
Layout copertina: Valentina Greco, Milano
Progetto grafico e impaginazione: CompoMat S.r.l., Configni (RI)
Stampa: GECA Industrie Grafiche, Cesano Boscone (MI)

Springer-Verlag Italia S.r.l., Via Decembrio 28, I-20137 Milano
Springer fa parte di Springer Science + Business Media (www.springer.com)

Prefazione

Questo volume è dedicato a tutti gli appassionati di matematica, e nasce da un'esperienza concreta. Da vari anni presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa viene organizzata, a cura di Rosetta Zan e Pietro Di Martino, la 'Settimana Matematica'. Si tratta di una iniziativa all'interno del Progetto Lauree Scientifiche, rivolta agli studenti degli ultimi anni delle scuole superiori. Uno degli ingredienti principali di questa iniziativa sono i 'laboratori', pensati per mettere gli studenti a diretto contatto con l'attività matematica, accompagnandoli nello studio di problemi che chiamano in causa le loro conoscenze, ponendole però sotto prospettive nuove.

Abbiamo organizzato più volte il laboratorio dedicato ai giochi e quello dedicato alla topologia nell'ambito della Settimana Matematica. L'esperienza fatta a Pisa ci ha poi incoraggiato a proporre i nostri laboratori anche in altre occasioni – in Italia, in Europa e negli Stati Uniti. In tutte queste situazioni abbiamo potuto osservare che i giochi costituiscono uno strumento didattico molto efficace. L'interesse degli studenti viene subito attirato dal meccanismo del gioco, e tutti si sentono coinvolti già dalle prime 'partitelle' che servono per capire le regole. Poi, piano piano, l'esigenza agonistica di capire 'come funziona', 'cosa fare per vincere', interpella i ragazzi: è qui che inizia il percorso matematico.

L'insegnante si trova in una situazione favorevole per tre importanti motivi: l'interesse degli studenti è molto alto fin dall'inizio; l'approccio matematico allo studio dei giochi è convincente perché offre risultati concreti e... agonisticamente utili; infine, gli argomenti matematici che 'si nascondono' nel meccanismo di certi giochi (che vanno opportunamente scelti) sono molto significativi. Pensiamo al processo di astrazione che porta alla definizione chiara di cosa vuol dire 'possedere una strategia vincente fin dall'inizio' e alla scoperta che, nei giochi considerati, uno dei due giocatori effettivamente la possiede o alla costruzione di algoritmi che permettono di risolvere un rompicapo e contemporaneamente portano ad approfondire la conoscenza delle permutazioni e dei gruppi. Oppure alla osservazione che un gioco con scacchiera e pedine nasconde nel suo meccanismo un importante teorema sulle funzioni continue; o ancora alla possibilità di giungere a svelare, attraverso una sfida in cui si collegano crocette nel piano con tratti di penna, la formula di Eulero per i grafi planari e i poliedri.

Il presente volume offre agli insegnanti un supporto per intraprendere questo percorso didattico che parte dai giochi e si inoltra nella matematica, mettendo a loro disposizione strumenti per introdurre o approfondire con gli studenti questioni di base (le tecniche di dimostrazione, per esempio, come l'induzione o la dimostrazione per assurdo) ma anche per rompere di tanto in tanto gli schemi dei programmi scolastici e aprire prospettive nuove. I giochi, infatti, per loro natura, pongono spesso problemi 'non standard'. Ci sarà dunque occasione di incontrare i coefficienti binomiali, i grafi, le permutazioni, i gruppi, le funzioni di più variabili reali, il teorema di punto fisso di Brouwer, gli omeomorfismi, le curve nel piano, i lavori di Eulero e i primi concetti della topologia.

Ma questo volume non è rivolto solo agli insegnanti: confidiamo infatti che anche gli studenti e tutti gli appassionati di matematica troveranno la lettura utile e piacevole. Abbiamo impostato la trattazione degli argomenti in modo che sia possibile seguire diversi piani di lettura, dedicando spazio alla descrizione degli esempi più semplici oltre che alle dimostrazioni dei teoremi che entrano in scena.

Il libro è suddiviso in quattro parti, ognuna delle quali è legata ad un gioco o a una famiglia di giochi. Nella prima parte vengono descritti il Chomp, il Nim, il gioco dei divisori, il Chomp sui grafi e tutta una serie di giochi a due giocatori in cui i concorrenti, al loro turno, 'mangiano' qualcosa. La seconda parte è dedicata al gioco del 15 e ad altri giochi con blocchetti mobili da far scorrere dentro una scatola o lungo un grafo. Nella terza parte viene presentato l'Hex, un gioco con pedine da posizionare su una scacchiera inventato da Piet Hein e John Nash. Nella quarta parte si discutono giochi con carta e penna (Germogli, Cavoletti di Bruxelles, eccetera): in questi giochi due giocatori devono collegare con dei tratti di penna alcuni punti fissati, rispettando certi vincoli. Le quattro parti del libro condividono la stessa struttura, articolata in sei capitoli.

- Il primo capitolo si apre con la descrizione delle regole del gioco principale, illustrate con qualche semplice esempio. In un secondo momento si studia il gioco cercando di capire come funziona e come fare per vincere. A questo punto si osserva che le domande naturali (ossia se esista una strategia vincente disponibile già dall'inizio per uno dei giocatori, quale sia il giocatore che può vincere, quale sia esattamente questa strategia) suscitano varie riflessioni matematiche. Si enunciano dunque con precisione queste domande.
- Nel secondo capitolo si danno risposte alle domande, coinvolgendo i concetti matematici che erano nascosti nel meccanismo del gioco. Si offrono dimostrazioni rigorose mantenendo però il linguaggio ad un livello facilmente accessibile, rimanendo nello spirito del 'gioco'.
- Nel terzo capitolo, dal titolo 'Variazioni sul tema', si presentano alcuni giochi affini a quello principale. Chi si avvicina a questo libro anche per giocare troverà interessanti varianti con cui cimentarsi, mentre chi è interessato al percorso matematico noterà che a volte basta cambiare piccoli dettagli nelle regole o nella situazione iniziale per dare spunto a domande nuove.
- Il quarto e il quinto capitolo, il cui titolo comincia con 'In primo piano: ...' sono dedicati ad un approfondimento dei temi e contenuti matematici che sono al cuore dei ragionamenti utilizzati per rispondere alle domande nate dal gioco. Il linguaggio diviene più formale, senza scollegarsi però completamente dagli esempi dei giochi. L'insegnante potrà utilizzare questi approfondimenti per accompagnare gli studenti nel percorso che porta gradualmente dall'intuizione all'esigenza di cercare conferme attraverso delle dimostrazioni, dallo studio di un problema particolare alla scoperta di teoremi e tecniche generali, dando una 'prima introduzione' a concetti matematici di grande importanza.
- L'ultimo capitolo offre una lista di esercizi che insistono sugli argomenti presentati nei 'primi piani'. Gli esercizi si aggiungono a quelli che, intercalati nel te-

sto dei capitoli precedenti, riproducono le domande poste agli studenti durante le lezioni. Talvolta abbiamo incluso dei suggerimenti per lo svolgimento.

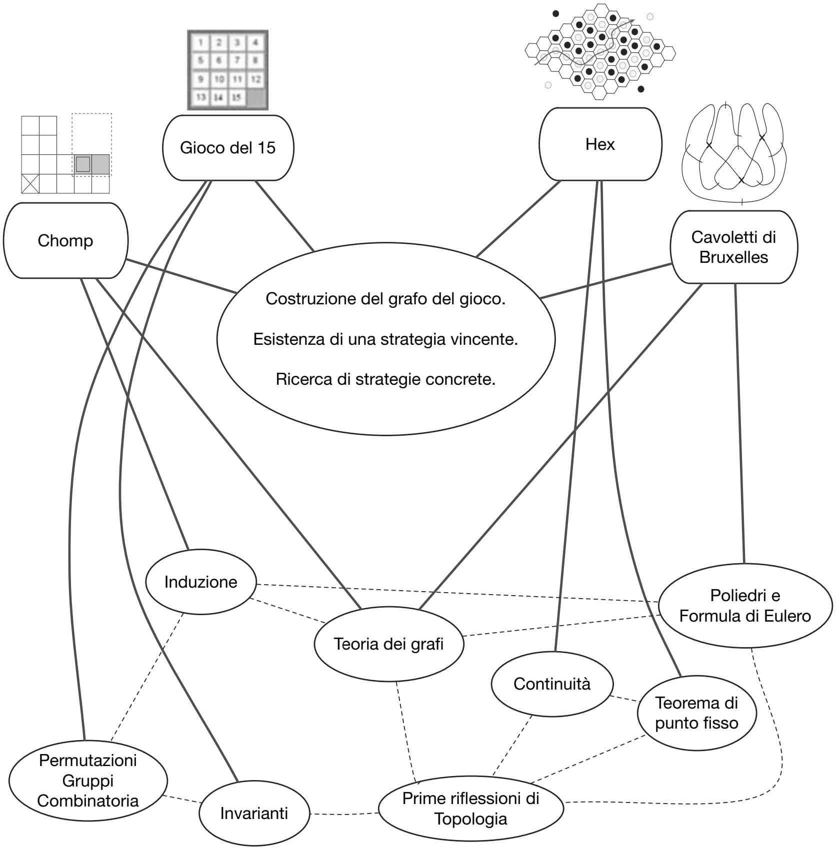
Completano il libro un'appendice che contiene informazioni sulle esperienze didattiche e sui laboratori che abbiamo organizzato (e rimanda alla pagina web `http://www.maestran.ch/giochi/index.html` in cui si possono trovare maggiori dettagli e dati aggiornati) e una seconda appendice con le soluzioni di alcuni esercizi proposti nel testo.

Il legame fra i giochi e i principali argomenti matematici discussi nel libro viene rappresentato nello schema riassuntivo che conclude questa prefazione. Le linee continue collegano gli argomenti trattati nei 'primi piani' ai rispettivi giochi. Le linee tratteggiate indicano quali legami fra i vari argomenti vengono messi in luce nel nostro 'racconto'.

Desideriamo ringraziare gli organizzatori della Settimana Matematica, Rosetta Zan e Pietro Di Martino, per averci incoraggiato con il loro entusiasmo e fornito preziose indicazioni rileggendo le versioni preliminari del lavoro, e Fabrizio Broglia che ci ha dato l'idea di questo percorso didattico sui giochi. Ringraziamo anche anche Alberto Abbondandolo, Francesca Acquistapace, Alessandro Berarducci, Mauro Di Nasso e Pietro Majer, per i consigli sulle lezioni e le conversazioni sui giochi, Maurice Froidcoeur per l'attenta lettura della versione preliminare di alcuni capitoli. Un ringraziamento speciale va infine a Marco Golla e Giulio Tiozzo, che hanno condiviso con noi questa esperienza nei primi laboratori.

Pisa, gennaio 2012

Emanuele Delucchi
Giovanni Gaiffi
Ludovico Pernazza


Gioco del 15
Hex
Chomp
Cavoletti di Bruxelles
Costruzione del grafo del gioco.
Esistenza di una strategia vincente.
Ricerca di strategie concrete.
Induzione
Poliedri e Formula di Eulero
Teoria dei grafi
Continuità
Teorema di punto fisso
Permutazioni Gruppi Combinatoria
Invarianti
Prime riflessioni di Topologia

Indice

Parte II Quindici

Parte III Hex

Parte I

Chomp

Capitolo 1
Il Chomp: presentazione e prime domande

Tutto comincia da una tavoletta di cioccolata con 4×5 quadratini. L'ultimo in basso a sinistra è contrassegnato: si tratta di un quadratino avvelenato.

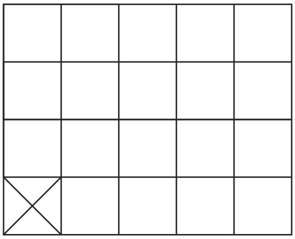


Figura 1.1 Una tavoletta 4×5 'pronta' per una partita a Chomp

Il gioco chiamato Chomp (il nome è stato inventato da Martin Gardner, vedi [26]) è la sfida tra due contendenti che devono, ad ogni mossa, mangiare almeno un quadratino di cioccolato. Naturalmente chi mangia il quadratino avvelenato perde; vince quindi chi obbliga l'avversario a mangiare il veleno. La regola è che i giocatori hanno una bocca rettangolare: volendo mangiare un certo quadratino il giocatore mangerà anche tutti quelli che si trovano più a destra o più in alto di esso (compresi quelli che si trovano più a destra *e* più in alto di esso).

Per chiarire bene come funziona, proviamo a seguire una partita di Chomp.

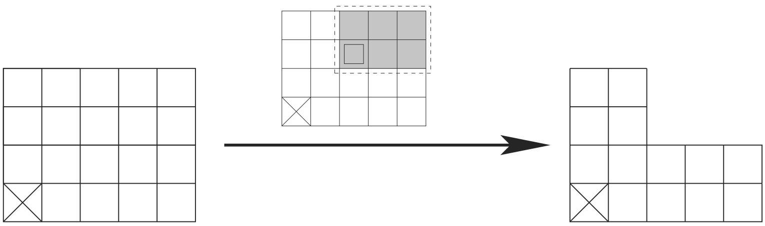


Figura 1.2

Il primo giocatore sceglie il quadratino che si trova nella terza colonna da destra e nella seconda riga dall'alto e mangia tutti e 6 i quadratini del rettangolo da esso individuato.

Il secondo giocatore risponde con una mossa in cui mangia due soli quadratini (Fig. 1.3): infatti sceglie il quadratino nella seconda riga dal basso e nella seconda colonna da destra. Questo morso ha l'effetto di togliere i due quadratini marcati in grigio.

Delucchi E., Gaiffi G., Pernazza L.: Giochi e percorsi matematici
DOI 10.1007/978-88-470-2616-2_1, © Springer-Verlag Italia 2012

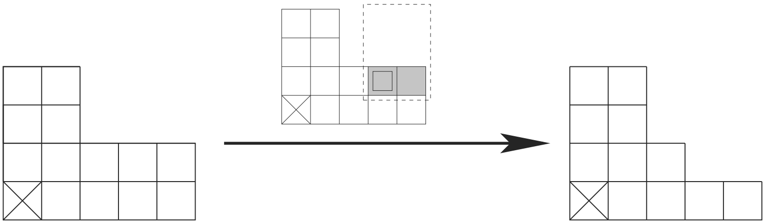


Figura 1.3

Non riuscendo ad indovinare la strategia dell'avversario, il giocatore che aveva cominciato la partita opta ora per una mossa drastica: sceglie il quadratino appena sopra quello avvelenato e fa una scorpacciata di ben 7 quadratini!

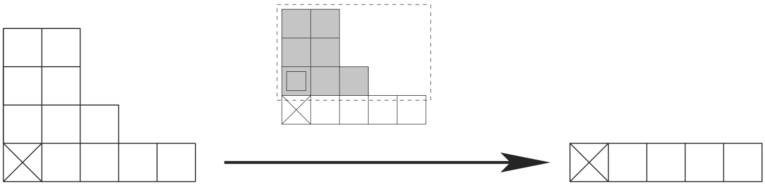


Figura 1.4

Ma ahimè! La golosità è spesso cattiva consigliera: non appena la sua ingordigia si è placata, egli si accorge di avere in pratica regalato la vittoria all'avversario. E infatti,

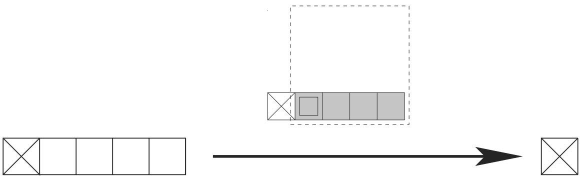


Figura 1.5

mangiando tutta la cioccolata 'sana' dell'ultima riga, il secondo giocatore ha gioco facile nel costringere l'avversario ad affrontare la dura realtà, e a pentirsi di non aver riflettuto più attentamente per cercare le mosse che lo avrebbero magari condotto alla vittoria.

Per non rischiare di finire anche noi un giorno nella sua stessa situazione, sarà meglio studiare il gioco.

Un buon metodo per capire come funziona il Chomp potrebbe essere quello di studiare una lista di tutte le mosse possibili: si potrebbero cioè scrivere *tutte* le situazioni di gioco possibili, collegandole con delle frecce che indicano da quale situazione a quale altra si può passare con una mossa valida. Seguiremo questa idea, ma con quale spirito? Ci rendiamo conto che raccogliere informazioni solo per il caso della tavoletta 4×5 non ci soddisferebbe. Chiaramente il Chomp si può giocare con una tavoletta di qualsiasi dimensione: ci piacerebbe dunque utilizzare gli esempi come spunto per cercare, se possibile, di individuare qualche idea più generale.

Chiamiamo *configurazione* del gioco ognuna delle forme che la tavoletta di cioccolata può assumere durante il gioco. Siccome il nostro piano prevede di disegnare tutte le configurazioni possibili, è naturale chiedersi:

Domanda 1.1 Quante sono le configurazioni possibili di un Chomp con $n \times m$ quadratini?

Anche prima di rispondere con precisione a questa domanda, intuiamo che per dei Chomp su tavolette 'grandi' il numero di configurazioni da disegnare sarà molto alto. Dunque pur avendo, come si diceva, l'intenzione di trovare qualche regola generale, ci conviene iniziare da un esempio piccolo: proviamo a disegnare tale schema (detto *grafo del gioco* [1]) per il caso del Chomp 2×3 (vedi Fig. 1.6). Ci sono 10 configurazioni possibili: una di esse è quella finale, che non disegniamo, dove tutta la tavoletta è stata mangiata – e dunque uno dei due concorrenti, ahimè...

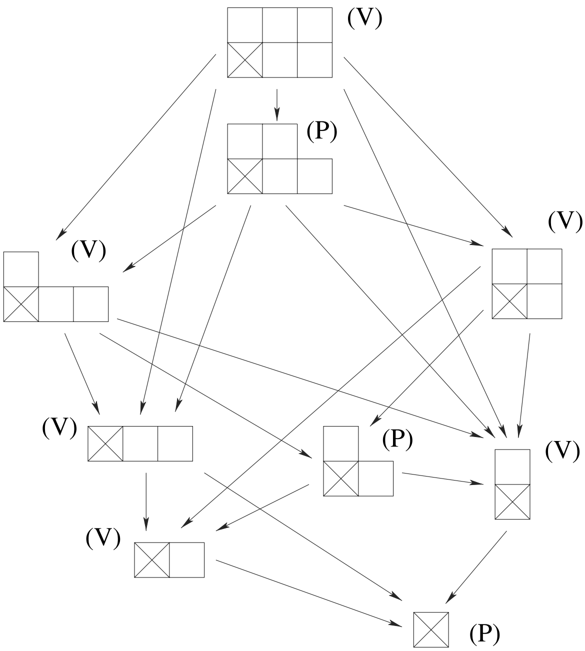


Figura 1.6 Il grafo del Chomp 2×3 (abbiamo omesso la configurazione finale)

Partendo dal basso, nella Fig. 1.6 abbiamo contrassegnato una configurazione come *vincente* (V) o *perdente* (P) se chi trova il gioco in quella configurazione e deve muovere ha una strategia per vincere il gioco o no.

[1] Più avanti, al Capitolo 5, introdurremo i grafi in maniera più approfondita e precisa.

Più precisamente:

- abbiamo contrassegnato con una P la configurazione in basso con solo il quadratino avvelenato: chi se la trova davanti ha perso;
- abbiamo contrassegnato con una V una configurazione se da essa, nel grafo, parte almeno una freccia che porta ad una configurazione già contrassegnata da una P;
- abbiamo contrassegnato con una P una configurazione se, nel grafo, tutte le frecce che partono da essa terminano in configurazioni già contrassegnate con una V.

In questo esempio è stato possibile contrassegnare ogni configurazione: questo fa nascere un sospetto, visto che in linea di principio il grafo del gioco si può scrivere per ogni Chomp.

Domanda 1.2 È vero che, nel grafo del gioco di un Chomp $n \times m$, le configurazioni si possono sempre tutte contrassegnare come perdenti o vincenti a partire dal basso, come abbiamo fatto nell'esempio?

Se così fosse, in ogni Chomp uno dei due contendenti avrebbe a disposizione una strategia vincente. Infatti se la configurazione iniziale avesse una V, vorrebbe dire che il primo giocatore, se gioca bene, vince, se invece avesse una P, vorrebbe dire che vince il secondo (sempre se gioca bene). Dunque, rispondendo a questa domanda, si risponde anche alla seguente domanda, molto naturale per un gioco.

Domanda 1.3 Il gioco è già segnato in partenza? Ovvero: c'è uno dei due giocatori di cui si sa fin dall'inizio che, se gioca in maniera sufficientemente astuta, vince?

Visto che abbiamo un sospetto, non molliamo la presa. Se fosse vero che il gioco è segnato in partenza... potremmo riuscire a capire quale dei due giocatori ha una strategia sicuramente vincente? Osserviamo che il primo giocatore ha a disposizione una mossa 'speciale': mangiare il quadratino in alto a destra. Qualsiasi mossa il secondo riesca a fare partendo da lì, avrebbe potuto esser eseguita già all'inizio dal primo giocatore: se il secondo giocatore avesse una buona mossa, il primo potrebbe precederlo facendola prima di lui. Questa intuizione porta alla prossima domanda.

Domanda 1.4 È vero che la configurazione iniziale di un Chomp $n \times m$ viene sempre contrassegnata con una V nel grafo del gioco? Ossia che il primo giocatore, se gioca in modo sufficientemente scaltro, riesce sempre a vincere?

Osserviamo che tutte le domande precedenti sono suscitate da una curiosità di carattere astratto, vorremmo dire strategico, non tattico. Stiamo cercando di capire un meccanismo generale del gioco, un fatto di fondo riguardante l'esistenza di una strategia vincente. C'è la possibilità che si arrivi a scoprire che il primo giocatore può sempre vincere, ma senza spiegare con quali mosse può farlo. Per alcuni questo può essere già appagante di per sé, tanto da far cadere in secondo piano le domande sulle 'tattiche' di gioco concrete. Altri invece sentiranno il bisogno di chiedere:

Domanda 1.5 Quali sono le tattiche concrete che permettono ad un giocatore di vincere a Chomp? Dipendono dal formato $n \times m$ della tavoletta? Ci sono dei formati per cui si possono descrivere dettagliatamente?

Capitolo 2
Risposte: giochi combinatori finiti e la 'mossa rubata'

Per rispondere alle Domande 1.2 e 1.3 sulla esistenza di una strategia vincente per il Chomp, la cosa migliore da fare è 'allargare l'orizzonte' e studiare una famiglia di giochi più vasta, a cui il Chomp appartiene.

2.1 I giochi combinatori finiti

Osserviamo infatti che il Chomp ha le seguenti caratteristiche:

- è deterministico, nel senso che non ci sono mosse influenzate da fattori casuali (dadi, sorteggi, eccetera) e ogni mossa è univocamente determinata dalla configurazione iniziale e finale;
- c'è solo un numero finito di configurazioni possibili[1];
- non è consentita la mossa nulla ('passo');
- non è possibile che la stessa configurazione sia ottenuta più di una volta durante una partita[2];
- c'è 'informazione perfetta', ossia il risultato di ogni mossa di un giocatore è completamente noto all'altro giocatore (non ci sono dati di cui è a conoscenza uno solo dei giocatori);
- non può terminare in 'patta'[3].

Chiameremo *gioco combinatorio finito* un gioco che ha le caratteristiche elencate sopra.

Esercizio 2.1 Dimostrare che un gioco combinatorio finito termina in un numero finito di mosse.

Ci poniamo l'obiettivo ambizioso di rispondere alle Domande 1.2 e 1.3, suscitate dal Chomp, per tutti i giochi combinatori finiti.

Pur non avendo ancora a disposizione il linguaggio della teoria dei grafi (vedi per questo il Capitolo 5), ci conviene tornare a considerare l'idea del grafo di un gioco.

Il *grafo di un gioco* è lo schema che nasce scrivendo tutte le configurazioni possibili del gioco dato e collegandole con delle frecce che indichino da quale configurazione a quale altra si può passare con una mossa valida.

Osserviamo che il grafo di un gioco combinatorio finito non possiede percorsi 'ciclici' orientati, ovvero in tale grafo non è possibile, percorrendo le frecce

---

[1] Infatti la tavoletta durante il gioco può assumere solo un numero finito di forme.

[2] Infatti ad ogni mossa almeno un quadratino della tavoletta viene mangiato.

[3] Infatti uno dei due giocatori dovrà mangiare l'ultimo quadratino.

Delucchi E., Gaiffi G., Pernazza L.: Giochi e percorsi matematici
DOI 10.1007/978-88-470-2616-2_2, © Springer-Verlag Italia 2012

nella direzione naturale, tornare ad una configurazione precedentemente visitata. In sintesi, il grafo di un gioco combinatorio finito ha un numero finito di configurazioni e non ha cicli.

Viceversa, ogni volta che ci capiterà di considerare un gioco deterministico a informazione perfetta, senza patte e mosse nulle, e osserveremo che il suo grafo ha un numero finito di configurazioni e non ha cicli, potremo concludere che si tratta di un gioco combinatorio finito.

Ora vogliamo dimostrare che in un gioco combinatorio finito si possono, in linea di principio, seguire tutte le possibili evoluzioni di ogni configurazione e di conseguenza etichettarla come 'vincente' o 'perdente'. In altre parole risponderemo affermativamente alla Domanda 1.2 (e quindi alla 1.3) per tutti i giochi combinatori finiti.

Teorema 2.2 *In un gioco combinatorio finito ogni configurazione è vincente o perdente.*

Dimostrazione. Nel grafo di un gioco combinatorio finito ci devono essere delle configurazioni 'finali', ossia da cui non è più possibile fare alcuna mossa (altrimenti i giocatori potrebbero non smettere mai di giocare e fare per esempio più mosse di quante sono le configurazioni del grafo, ma questo vorrebbe dire che c'è un ciclo...). Chiamiamo dunque F l'insieme, non vuoto, delle configurazioni finali. Ognuna di esse, in base alle regole del gioco, sarà V-incente o P-erdente per il giocatore che deve muovere (visto che le 'patte' non sono ammesse).

Esercizio 2.3 Nel Chomp c'è un'unica configurazione finale, quale?

Adesso consideriamo le altre configurazioni del gioco, e classifichiamole così: chiamiamo $S(1)$ l'insieme di tutte le configurazioni dalle quali, comunque si muova, in una mossa si arriva ad una configurazione di F. Poi chiamiamo $S(2)$ l'insieme di tutte le configurazioni tali che esiste almeno un percorso di due mosse che le porta ad una configurazione in F e non esistono percorsi più lunghi. E così via... chiameremo $S(d)$ l'insieme di tutte le configurazioni tali che esiste almeno un percorso di d mosse che le porta ad una configurazione in F e ogni altro percorso che le porta ad una configurazione in F richiede un numero di mosse minore o uguale a d. Visto che il grafo è finito, giunti ad un certo $S(n)$ ci accorgeremo che ogni configurazione non finale del gioco appartiene ad uno degli insiemi $S(1), S(2), \ldots, S(n)$, che sono a due a due disgiunti.

Esercizio 2.4 Supponiamo che nel grafo del nostro gioco non ci siano solo configurazioni finali. Dimostrare che l'insieme $S(1)$ non è vuoto.

Studiamo ora una configurazione $\mathcal{S}$ in $S(1)$: se muovendo da essa si può arrivare ad almeno una configurazione finale P-erdente (per il giocatore successivo), possiamo etichettarla con una V (è vincente per il giocatore che deve muovere). Altrimenti, significa che muovendo da essa si arriva solo a configurazioni finali V-incenti, e la etichettiamo con una P. Con questa regola possiamo dare una etichetta a tutte le configurazioni in $S(1)$.

Consideriamo poi una configurazione $\mathcal{T}$ in $S(2)$: per come è stato definito $S(2)$, qualsiasi mossa che parte da $\mathcal{T}$ conduce ad una configurazione di $S(1)$ o di F – in ogni caso, configurazioni che hanno già una etichetta. Se fra queste