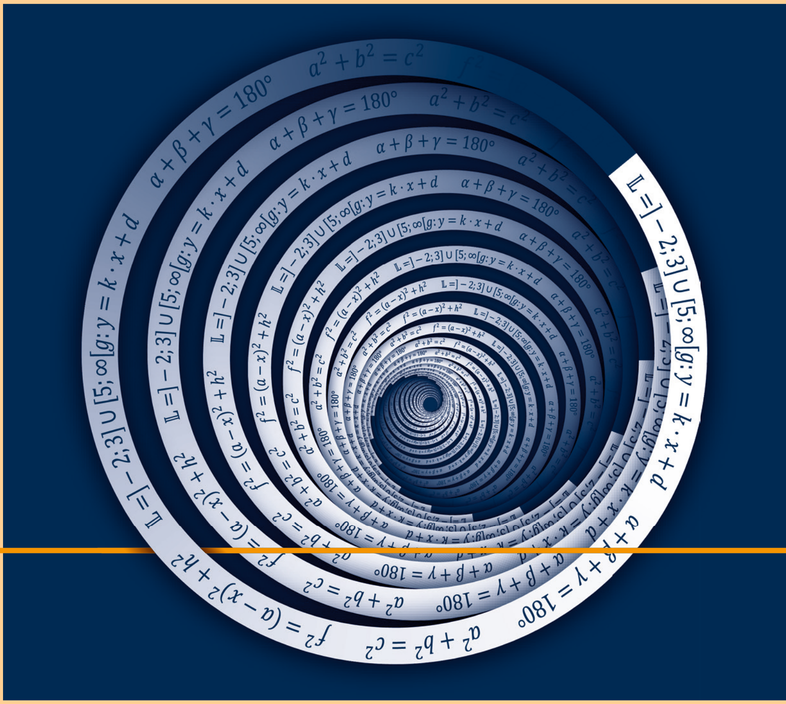
Nina Maderner

PLUS.HANSER-FACHBUCH.DE

# Angewandte Mathematik

## Lehrbuch für HTL – Band 1



HANSER

Maderner

# Angewandte Mathematik

**Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!**

Auf unserem Download-Portal finden Sie zu diesem Titel kostenloses Zusatzmaterial.

Geben Sie dazu einfach diesen Code ein:

`plus-la93a-tezuf`

*plus.hanser-fachbuch.de*

Nina Maderner

# Angewandte Mathematik

Lehrbuch für Höhere Technische Lehranstalten –
Band 1

HANSER

Über die Autorin:
Dr. Mag. Nina Maderner ist Mathematiklehrerin am tgm Wien.

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Print-ISBN: 978-3-446-48085-8
E-Book-ISBN: 978-3-446-48397-2



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.


Vilshofener Straße 10 | 81679 München | info@hanser.de
*www.hanser-fachbuch.de*
Lektorat: Frank Katzenmayer
Herstellung: Frauke Schafft
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, *www.rebranding.de*, München
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Titelmotiv: © Max Kostopoulos
Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Druck: CPI Books GmbH, Leck
Printed in Germany

# Vorwort

Dieses Buch ist in erster Linie für Schülerinnen und Schüler Höherer Technischer Lehranstalten im ersten Jahrgang geschrieben. Das mag im ersten Moment selbstverständlich scheinen, da ja der Titel dieses Buches genau das verspricht. Dennoch unterscheidet dies das vorliegende Buch von vielen anderen Lehrbüchern der angewandten Mathematik.

Ich richte mich durch die Art der Erklärungen, die Auswahl der Beispiele und zahlreiche Hinweise auf die üblichen Fallen und Tücken direkt an die Lernenden. Da ich davon ausgehe, dass meine hervorragenden Kollegen den Stoff bereits beherrschen, schien mir das ein vernünftiger Weg.

Durch diesen Zugang eignet sich das Buch bestens zum Selbststudium oder für alle Unterrichtsarten, die dieses unterstützen. Ich selbst habe das Buch im ersten Jahrgang einer Lernbüroklasse der Abteilung für Elektrotechnik am TGM höchst erfolgreich eingesetzt. Ich möchte bei dieser Gelegenheit den Schülerinnen und Schülern der 1AHET danken. Sie waren meine besten Korrekturleser und haben mich nicht nur auf Fehler, die sich eingeschlichen haben, aufmerksam gemacht, sondern mir auch aufgezeigt, wo meine Formulierung zu knapp oder umständlich war.

Selbstverständlich ist das Buch aber auch im herkömmlichen Regelunterricht so wie jedes andere Lehrbuch für Angewandte Mathematik verwendbar. Auch dies habe ich vorab ausprobiert. Und so möchte ich mich auch bei der Parallelklasse der 1BHET bedanken. Vor allen Dingen bei den Aufgabenteilen konnten sie mich immer wieder auf die ein oder andere Ungereimtheit hinweisen.

Das führt mich direkt zu den Aufgaben und zu LeTTo. Am Ende jedes Kapitel findet sich ein Abschnitt mit zahlreichen Aufgaben. So gut wie alle dieser Aufgaben sind online als LeTTo-Beispiele abrufbar. Das bedeutet, dass jede Aufgabe mit einer Vielzahl von Datensätzen und kleinen Variationen zu Verfügung steht. Die Richtigkeit der Lösung wird direkt nach der Eingabe angezeigt. Dadurch wird die Anzahl der Aufgaben vervielfacht und die Lernenden haben einen schier unermesslichen Pool an Übungsmaterial.

Der Zugang zu LeTTo ist über *https://plus.hanser-fachbuch.de* möglich. Für das Hosting der LeTTo-Aufgaben bedanke ich mich herzlichst bei der LeTTo GmbH und für die damit einhergehende technische Unterstützung bei Thomas Mayer und Werner Damböck. Sind sie der geniale und kreative Kopf von LeTTo, so ist Daniel Asch-Goiser, in seiner unschlagbaren Begeisterungsfähigkeit und nie enden wollenden Energie, dessen Seele. Auch ihm gilt mein großer Dank.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Kollegen Christian Kral, der mir den Weg zu diesem Buch ebnete und mir immer – und ich meine immer – mit Rat und Tat zur Seite stand.

Meinen Lektoren Frank Katzenmayer und Christina Kubiak vom Carl Hanser Verlag danke ich für die Geduld und für die gute und stets konstruktive Zusammenarbeit.

Wien, im Juni 2025 Nina Maderner

## Zusatzmaterial

Der Zugang ist unter *https://plus.hanser-fachbuch.de* möglich. Dort gibt man den am Anfang des Buches abgedruckten Code ein, um zu folgenden Inhalten zu gelangen:

### Beweise und Herleitungen

Einige längere Beweise oder Herleitungen von Formeln habe ich ausgelagert. Wann immer das der Fall ist, wird im Buch an der entsprechenden Stelle darauf hingewiesen.

### LeTTo-Beispiele

Fast alle im Buch gestellten und einige zusätzliche Aufgaben finden sich hier. Sie haben dieselben Aufgabennummern wie die entsprechenden Musteraufgaben im Buch und sind auch genau so gegliedert. Sie können wiederholt geübt werden, wobei jedes Mal auf einen anderen Datensatz zurückgegriffen werden kann. Dadurch ändern sich die Werte und Grafiken der Beispiele, sodass eine sehr umfangreiche Beispielsammlung entsteht. Ist die Eingabe der Lösung richtig, erscheint ein grünes Kästchen, was für die meisten sehr motivierend ist.

In jedem Kapitel gibt es zu Beginn des Aufgabenteils eine kurze Anleitung zu der Eingabe in LeTTo.

# Inhalt

# Teil 1

# x-beliebig

# 1 Und oder Oder oder Nicht: die Sprache der Mathematik

Bevor wir wirklich loslegen, sollten wir uns auf eine gemeinsame Sprache und die dazugehörigen Schriftzeichen einigen. Du wirst dir nun denken, was soll das? Die Sprache ist Deutsch und die Schriftzeichen sind die vertrauten Buchstaben, Zahlen und Rechenzeichen. Aber das stimmt nicht ganz. Die deutsche Sprache ist viel zu ungenau und mit den herkömmlichen Zeichen werden wir nicht auskommen. Einen ersten Ansatz, dieses Problem zu beheben, liefert das folgende Kapitel.

## 1.1 Aussagenlogik

### 1.1.1 Wahr oder Falsch

Ich habe behauptet, die deutsche Sprache wäre nicht exakt genug. Nehmen wir eine einfache, alltägliche Aussage. Ich sehe zum Beispiel aus dem Fenster und stelle fest: „Heute regnet es."

Das ist doch eine klare Aussage! Regen bedeutet, dass Wasser vom Himmel fällt. Das stimmt oder es stimmt nicht. Ist das so? Was ist mit Nieselregen. Zählt das schon? Oder Schneeregen? Ist das noch Regen? Und was hat es mit dem Wörtchen „heute" auf sich? Bedeutet dies, dass es den ganzen Tag regnet? Oder doch eher, dass es irgendwann im Laufe des Tages geregnet hat oder regnen wird. Genügt es, wenn es im Moment regnet? Stimmt der Satz noch, wenn es aufhört zu regnen?

Um klar festlegen zu können, ob diese Aussage nun wahr oder falsch ist, müssen wir unsere Sprache genauer gestalten. Das kann durchaus zu Verwirrung führen. Wenn dich jemand nach dem Wetter fragt und du antwortest: „Heute zwischen 11:23 h und 12:48 h regnete es in der Wiener Innenstadt stark, da eine Niederschlagsmenge von 6,2 l/m$^2$ pro Stunde niederging. Zwischen 12:48 h und 13:59 h regnete es leicht, da …", wird die fragende Person wahrscheinlich an deinem Verstand zweifeln.

In der Mathematik allerdings können wir uns keine Zweideutigkeiten erlauben. Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch. Dazwischen gibt es nichts. Wenn doch, so handelt es sich eben nicht um eine Aussage im Sinne der Mathematik. Wir definieren daher:

Eine **Aussage** ist ein Satz, dessen Wahrheitsgehalt entweder **wahr (w)** oder **falsch (f)** ist.

**Beispiel 1.1** Welche der folgenden Sätze sind Aussagen? Ordne diesen gegebenenfalls auch ihren Wahrheitsgehalt zu. Ergänze unvollständige Aussagen, sodass sie wahr sind.

1. $3 \geq 0$
2. Schokolade schmeckt gut.
3. $2{,}1 < 2$
4. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der Katheten gleich dem Quadrat der Hypotenuse.
5. Der Siedepunkt von Wasser beträgt 100 °C.

*Lösung:* Wir gehen schrittweise vor.

1. $3 \geq 0$ ist wahr.
2. Schokolade schmeckt gut, würden die meisten Menschen als wahr bezeichnen. Es gibt allerdings Sonderlinge, denen Schokolade wirklich nicht schmeckt und andere, die, so wie ich, nur Bitterschokolade mögen. Der Satz ist daher im Sinne der Aussagenlogik keine Aussage, da der Wahrheitsgehalt nicht eindeutig gegeben ist.
3. $2{,}1 < 2$ ist eine falsche Aussage.
4. Hier handelt es sich um den Pythagoräischen Lehrsatz und um eine wahre Aussage.
5. Diesen Satz müssen wir präzisieren. Der Siedepunkt von Wasser hängt nämlich vom Luftdruck ab. Richtig gestellt lautet der Satz: Der Siedepunkt von Wasser bei Normaldruck beträgt 100 °C. Nun handelt es sich tatsächlich um eine wahre Aussage. ■

### 1.1.2 Verneinung

Auch die Verneinung einer Aussage ist nicht ganz so klar, wie es im ersten Moment scheint. Stell dir vor, du sitzt an deinem Schreibtisch und deine Mutter fragt dich: „Hast du deine Hausübungen schon gemacht?“ Du antwortest: „Nein, ich habe sie noch nicht gemacht.“

Das ist eine klare Antwort auf eine klare Frage. Hausübungen sind gemacht oder nicht, oder? Eben nicht. Deine Antwort könnte bedeuten, du hast noch nicht einmal damit angefangen oder auch, dass du schon so gut wie fertig bist.

Ist $a$ eine Aussage, so schreibt man $\neg a$, sprich **Nicht a**, für deren Negation.

Es gilt: Aus $a$ ist wahr, folgt $\neg a$ ist falsch, und aus $a$ ist falsch, folgt $\neg a$ ist wahr.

| $a$ | $\neg a$ |
|---|---|
| w | f |
| f | w |

**Tabelle 1.1** Zur Veranschaulichung eignet sich eine **Wahrheitstafel**. Dort wird jeweils w für eine wahre Aussage und f für eine falsche Aussage eingetragen. Hier ist leicht zu erkennen: Wenn $a$ wahr ist (w), so ist $\neg a$ falsch (f) und umgekehrt.

**Beispiel 1.2** Finde die richtige Verneinung zu den folgenden Aussagen.

1. $a$: Die gegebene Zahl ist größer als $\pi$.
2. $b$: Bei zehn Versuchen treffe ich mindestens ein Mal.
3. $c$: Ich liebe alle Eissorten, außer Schokolade.

*Lösung:* Das erfordert schon einige Denkarbeit.

1. Die Zahle $\pi$ selbst ist nicht größer als $\pi$. Die Verneinung lautet daher:

   $\neg a$: Die Zahl ist kleiner **oder gleich** $\pi$.
2. Ich treffe mindestens ein Mal bedeutet, ich treffe ein Mal, zwei Mal, drei Mal bis zehn Mal. Das ist alles, außer kein Mal. Die Verneinung lautet daher:

   $\neg b$: Bei zehn Versuchen treffe ich **kein Mal**.
3. Der dritte Punkt ist nicht ganz einfach. Man muss ein wenig darüber nachdenken, wann die Aussage $c$ nicht richtig ist. Das ist eindeutig der Fall, sobald ich auch Schokoladeneis liebe. Es ist aber auch der Fall, wenn ich irgendeine andere Eissorte nicht liebe, ganz unabhängig von meiner Vorliebe für Schokolade. Die Verneinung lautet daher:

   $\neg c$: Ich liebe Schokoladeneis **oder** nicht alle anderen Eissorten. ■

Der letzte Punkt im Beispiel führt uns direkt zum nächsten Abschnitt, zu verknüpften Aussagen. $\neg c$ aus dem obigen Beispiel verbindet die Aussage „Ich liebe Schokoladeneis“ mit der Aussage „Ich liebe nicht alle anderen Eissorten“.

### 1.1.3 Verknüpfungen

Es gibt zwei Möglichkeiten Aussagen logisch zu verknüpfen: „UND“ oder „ODER“. Auch hier ist der Sprachgebrauch für uns Mathematikerinnen viel zu ungenau.

Es gibt auf der einen Seite das **aufzählende** UND. Ein Satz wie: „Ich wünsche mir zum Geburtstag einen neuen Computer und ein Fahrrad und einen Goldbarren und Tickets für das Champions League-Finale und eine Reise nach Las Vegas“ macht im deutschen Sprachgebrauch durchaus Sinn. Es ist gemeint, dass du dir möglichst viel von all dem wünschst. Aber selbst das Kind eines Millionärs wird nicht erwarten, alles zu bekommen. Im mathematischen Sinn wäre aber das UND nur in diesem Fall erfüllt.

In der Aussagelogik bedeutet UND, dass alle verknüpften Aussagen erfüllt sein müssen. Es gilt also das **einschließende** UND. Antwortet eine Mathematikerin auf die Frage „Wie trinkst du deinen Tee?“ mit dem Satz „Mit Milch und Zucker“ bedeutet dies, dass unbedingt beides in den Tee muss.

Sind $a$ und $b$ Aussagen so ist $a \wedge b$, sprich **a UND b**, erfüllt, falls **beide** wahr sind.

| $a$ | $b$ | $a \wedge b$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

**Tabelle 1.2** Wahrheitstafel für das **logische UND**: Es ist leicht zu erkennen, dass $a \wedge b$ nur dann wahr ist, wenn sowohl $a$ als auch $b$ wahr ist. In allen anderen Fällen, also wenn $a$ oder $b$ oder beide falsch sind, ist auch $a \wedge b$ falsch.

Mit dem wohl bekannten Wörtchen ODER verhält es sich ähnlich. Man kennt das **ausschließende** ODER wie bei dem Satz: „Möchtest du heute Abend lieber in die Pizzeria gehen oder zu Hause essen?“ Hier muss eine Entscheidung zwischen zwei Möglichkeiten getroffen werden. Die andere Möglichkeit ist das **einschließende** ODER wie bei dem Satz: „Möchtest du Senf oder Ketchup?“ Hier ist die Option, beides zu wollen, durchaus möglich und – so habe ich mir sagen lassen – auch recht beliebt.

Im Sinn der Aussagenlogik existiert nur das einschließende ODER.

Sind $a$ und $b$ Aussagen, so ist $a \vee b$, sprich **a ODER b**, erfüllt, falls **die eine, die andere oder beide Aussagen** wahr sind.

| $a$ | $b$ | $a \vee b$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

**Tabelle 1.3** Wahrheitstafel für das **logische ODER**: Es ist leicht zu erkennen, dass $a \vee b$ nur dann falsch ist, wenn sowohl $a$ als auch $b$ falsch sind. In allen anderen Fällen, also wenn entweder $a$ oder $b$ oder beide wahr sind, ist auch $a \vee b$ wahr.

**Beispiel 1.3 Mit alles ohne scharf**

An einem Kebabstand kannst du folgende Zutaten zu deinem Kebab auswählen: Tomaten, Kraut, Zwiebel, Joghurt und eben „scharf“. (Richtig erkannt: Das war jetzt ein aufzählendes UND, also im aussagenlogischen Sinn gar kein UND.) Der Auswahl kann man folgende Aussagen zuordnen:

$t$: Ein Kebab mit Tomaten.
$k$: Ein Kebab mit Kraut.
$z$: Ein Kebab mit Zwiebel.
$j$: Ein Kebab mit Joghurt.
$s$: Ein Kebab mit scharf(em Gewürz)

1. Wie würde die Bestellung $(j \wedge t \wedge s) \wedge \neg z \wedge \neg k$ als deutscher Satz formuliert lauten?
2. Wie würde die Bestellung „Mit alles ohne scharf" als korrekter deutscher Satz lauten, und wie als logisch verknüpfte Aussage?
3. Wie könnte die Bestellung $(k \vee z) \wedge \neg t$ aussehen? Ist diese Bestellung eindeutig?
4. Wie sieht die Bestellung $(t \wedge j \wedge s) \wedge \neg(k \wedge z)$ aus? Ist diese Bestellung eindeutig?

*Lösung:*

1. Die Bestellung $(j \wedge t \wedge s) \wedge \neg z \wedge \neg k$ als deutscher Satz formuliert lautet: Ein Kebab mit Joghurt, Tomaten und scharfem Gewürz, aber ohne Zwieben und ohne Kraut.
2. Die Bestellung „Mit alles ohne scharf" als korrekter deutscher Satz lautet: „Ich hätte bitte gerne ein Kebab mit allen Zutaten, außer dem scharfen Gewürz." Als logisch verknüpfte Aussage lautet das dann
   $(t \wedge k \wedge z \wedge j) \wedge \neg s$
3. Die Bestellung $(k \vee z) \wedge \neg t$ lautet, ein Kebab mit Kraut oder Zwiebel, aber ohne Tomaten. Diese Bestellung ist keinesfalls eindeutig, da $k \vee z$ erfüllt ist, wenn Kraut oder Zwiebel oder beides im Kebab ist. Dies ergibt also drei Möglichkeiten, mit Kraut, aber ohne Tomaten und ohne Zwiebel, mit Zwiebel, aber ohne Kraut und ohne Tomaten oder mit Kraut und Zwiebel und ohne Tomaten.
4. Die Bestellung $(t \wedge j \wedge s) \wedge \neg(k \wedge z)$ ist schon etwas komplizierter. Klar ist, es müssen Tomaten, Joghurt und das scharfe Gewürz ins Kebab. Aber wie sieht es mit den andern Zutaten aus? Dazu ist es hilfreich, sich die Wahrheitstabelle zu $\neg(k \wedge z)$ anzusehen:

| $k$ | $z$ | $k \wedge z$ | $\neg(k \wedge z)$ |
|---|---|---|---|
| w | w | w | f |
| w | f | f | w |
| f | w | f | w |
| f | f | f | w |

**Tabelle 1.4** Wahrheitstafel zu nicht Kraut und Zwiebel: $\neg(k \wedge z)$ ist wahr, wenn $k \wedge z$ falsch ist und falsch, wenn $k \wedge z$ wahr ist. Wie du der Tabelle entnehmen kannst, ist $\neg(k \wedge z)$ nur dann falsch, wenn sowohl $k$ als auch $z$ wahr sind, wenn also sowohl Kraut als auch Zwiebel im Kebab sind.

Wer immer dieses Kebab bestellt, mag nur die Kombination aus Kraut und Zwiebel nicht. Eines alleine wäre durchaus in Ordnung. Die Bestellung lautet also, ein Kebab mit Tomaten, Joghurt und scharfem Gewürz, aber keinesfalls mit Kraut und Zwiebeln in Kombination. ∎

## 1.2 Mengenlehre

### Grundlagen

Die Grundsätze der Mengenlehre solltest du bereits in der Unterstufe kennengelernt haben. Deswegen begnügen wir uns damit, diese hier zu wiederholen.

Es gibt verschiedene Arten, Mengen darzustellen:

Mengen werden in **Mengenklammern** $\{\quad\}$ dargestellt.

Ist $x$ in einer Menge $M$ enthalten, so sagt man, $x$ ist **Element der Menge** und schreibt $x \in M$. Ist $x$ kein Element der Menge, so schreibt man $x \notin M$. Die Elemente einer Mengen können, müssen aber keine Zahlen sein.

Enthält eine Menge keine Elemente, so spricht man von der **leeren Menge** und schreibt $\{\quad\}$ oder $\emptyset$.

Wir unterscheiden:

Das **aufzählende Verfahren:** Die Elemente der Menge werden aufgezählt.

Das **beschreibende Verfahren:** Die Elemente der Menge werden beschrieben.

Beispiele für das aufzählende Verfahren sind:

- die Menge der Zahlen auf einem Würfel: $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- die Farben einer Ampel: $B = \{\text{rot, gelb, grün}\}$

Beispiele für das beschreibende Verfahren sind:

- die Menge aller geraden Zahlen, also aller Zahlen, die ein Vielfaches von zwei sind: $C = \{x = 2 \cdot z \text{ für } z \in \mathbb{Z}\}$
- die Menge aller Säugetiere: $D = \{\text{Alle Tiere, die ihren Nachwuchs säugen}\}$,

In unseren Beispielen gilt: $4 \in C$ oder „Wal“ $\in D$, der Menge aller Säugetiere, aber $7 \notin A$ und „blau“ $\notin B$.

Ist jedes Element einer Menge $N$ auch Element der Menge $M$, so sagt man, $N$ ist **Teilmenge** von $M$ und schreibt, $N \subseteq M$.

Gibt es zumindest ein Element aus $M$, dass nicht gleichzeitig ein Element aus $N$ ist, so spricht man von einer **echten Teilmenge** und schreibt, $N \subset M$.

In unseren Beispielen hieße das: $\{-4; -2; 6; 8\} \subset C$, da dies alles gerade Zahlen sind oder $\{\text{Delfin, Hund, Katze}\} \subset D$, da dies alles Säugetiere, aber bei weitem nicht alle Säugetiere sind.

Betrachte die Menge alle Mädchen in einer Schulklasse. Diese sind in jedem Fall eine Teilmenge aller Schüler und Schülerinnen in dieser Klasse. In den meisten Fällen, wenn es nämlich auch Burschen in dieser Klasse gibt, ist das eine echte Teilmenge, in anderen Fällen, wenn nur Mädchen diesen Jahrgang besuchen, nicht.

## Verknüpfung von Mengen

Wenn du das vorhergehende Kapitel über Aussagenlogik aufmerksam durchgearbeitet hast, sollte dir das Folgende bekannt vorkommen.

Der **Durchschnitt** oder die Schnittmenge zweier Mengen $A$ und $B$ besteht aus allen Elementen, die in beiden Mengen enthalten sind. Man schreibt:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Dabei steht der senkrechte Strich | für die Phrase „für die gilt". Ins Deutsche übersetzt, heißt das dann: „Der Durchschnitt aus den Mengen $A$ und $B$ enthält alle $x$, für die gilt, dass $x$ ein Element der Menge $A$ ist UND $x$ ein Element der Menge $B$ ist." Das UND ist hier selbstverständlich ein UND im Sinne der Aussagenlogik.

Die **Vereinigung** zweier Mengen $A$ und $B$ besteht aus allen Elementen, die in mindestens einer der beiden Mengen enthalten sind. Man schreibt:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Ins Deutsche übersetzt heißt das: „Die Vereinigung aus den Mengen $A$ und $B$ enthält alle $x$ für die gilt, dass $x$ ein Element der Menge $A$ ist ODER $x$ ein Element der Menge $B$ ist." Das ODER ist hier selbstverständlich ein ODER im Sinne der Aussagenlogik.

Die **Differenzmenge** zweier Mengen $A$ und $B$ besteht aus allen Elementen, die in der Menge $A$, aber nicht in $B$ enthalten sind. Man schreibt:

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ins Deutsche übersetzt heißt das: „Die Differenz aus den Mengen $A$ und $B$ enthält alle $x$ für die gilt, dass $x$ ein Element der Menge $A$ ist UND $x$ kein Element der Menge $B$ ist."

Ich denke, es ist Zeit für Beispiele. Dabei wirst du **Venn-Diagramme** kennenlernen. Das ist eine sehr einfache Möglichkeit, Mengen darzustellen und Schnitte oder Vereinigungen zu bestimmen. In einem Venn-Diagramm illustriert man die Mengen in sich überlappenden Kreisen. Jeder Kreis stellt eine der Mengen dar. Du fügst die Elemente der Mengen an passender Stelle ein. Die Schnittmenge ist dann jener Teilbereich, wo sich die entsprechenden Kreise überlappen.

Wir wollen dazu ein Beispiel machen, bei dem die Elemente der Mengen Zahlen sind. Ein Klassiker dafür ist der sechsseitige Würfel.

**Beispiel 1.4** Es wird mit einem sechsseitigen Würfel gewürfelt. Dabei beschreibt $X$ die gewürfelte Augenzahl. Wir betrachten folgende Mengen:

$$A = \{X \text{ ist durch drei teilbar}\}$$
$$B = \{3; 4; 5; 6\}$$
$$C = \{X \text{ ist höchstens } 3\}$$

1. Stelle alle drei Mengen sowohl in aufzählendem Verfahren als auch im beschreibenden Verfahren mit Hilfe von Gleichungen und Ungleichungen dar.
2. Erstelle ein Venn-Diagramm.
3. Gib die Menge $B \cap C$ an.
4. Gib die Menge $C \setminus A$ an.
5. Gib die Menge $A \cup B$ an. Erkläre, warum sich diese nicht von $B$ unterscheidet.

*Lösung:* Definiere zunächst die Grundmenge $G = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ als die Menge aller möglichen Würfe.

1.

$$A = \{X \in G | X \text{ ist durch drei teilbar}\} = \{3; 6\}$$
$$B = \{3; 4; 5; 6\} = \{X \in G | X \geq 3\} = \{X \in G | X \text{ ist mindestens } 3\}$$
$$C = \{X \in G | X \text{ ist höchstens } 3\} = \{1; 2; 3\} = \{X \in G | X \leq 3\}$$

2. Das Venn-Diagramm für die Mengen $A$, $B$ und $C$ ist in Bild 1.1 dargestellt.

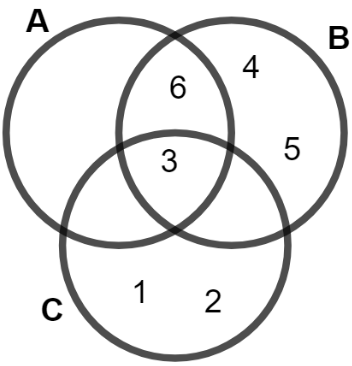



**Bild 1.1** Venn-Diagramm für Teilmengen des sechsseitigen Würfels

3. Nur 3 ist zugleich mindestens und höchstens 3.

$$B \cap C = \{3\}$$

4. Alle Zahlen, die höchstens 3 sind, aber nicht durch 3 teilbar sind.

$$C \setminus A = \{1; 2\}$$

5. Da $A \subset B$ ist kann die Menge $A$ zu $B$ nichts hinzufügen.

$$A \cup B = \{3; 4; 5; 6\} = B$$ ■

## 1.3 Zahlenräume

Es folgt eine Geschichte der Mathematik oder genauer gesagt der Zahlen im Schnellverfahren. Wie hat alles begonnen? Zunächst hatten die Menschen das Bedürfnis, etwas zu zählen und in weiterer Folge zu vergleichen und zu rechnen. „Ich habe sieben Kühe und mein Nachbar nur fünf. Folglich habe ich mehr Kühe, als mein Nachbar.“ Oder: „In meiner Herde waren zwanzig Schafe. Zwei hat der Wolf gerissen. Wie viele Schafe habe ich nun noch?“ Oder: „Ich habe drei Kinder und zwölf Äpfel. Wie teile ich diese gerecht auf?“

Du wirst dir denken, na eh klar, $7 > 5$ und $20 - 2 = 18$ und $12 : 3 = 4$. Doch bis es so weit war, hat es ziemlich lange gedauert und wahrscheinlich kann man mit gutem Gewissen behaupten, dass die Fähigkeit zählen und rechnen zu können, eines der Dinge ist, die uns von den anderen Säugetieren unterscheidet. Was war also geschehen?

Die natürlichen Zahlen waren erfunden:

Die Menge der **natürlichen Zahlen ohne Null** ist gegeben durch:

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$$

Die Menge der **natürlichen Zahlen mit Null** ist gegeben durch:

$$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$$

Wir wollen die natürlichen Zahlen auch im **Zahlenstrahl** darstellen. Den Zahlenstrahl kannst du dir als eine x-Achse ohne y-Achse in einem Koordinatensystem vorstellen, so wie es in Bild 1.2 dargestellt ist. Je weiter du nach rechts gehst, desto größer werden die Zahlen. Am Ende des Pfeils und darüber hinaus liegt dann Unendlich.

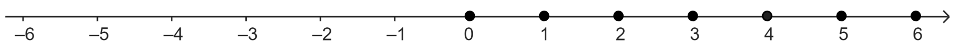



**Bild 1.2** Die Menge der natürlichen Zahlen mit Null: $\mathbb{N}_0$

Wir sollten uns nun die Frage stellen, was alles in diesem Zahlenraum schon funktioniert. Wir können addieren – die Summe zweier natürlicher Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl – und wir können multiplizieren – das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl. Das war’s aber auch schon. Wollen wir subtrahieren, stoßen wir schnell an die Grenzen, denn

$$5 - 3 = 2 \in \mathbb{N} \quad \text{aber} \quad 3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}$$

Was tun? Wir machen nun, was wir immer machen werden, wenn wir an die Grenzen eines Systems stoßen: Wir erweitern das System. Das ist im Prinzip dasselbe wie die

Erweiterung eines Spiels, egal ob es sich nun um UNO, die Siedler von Catan, Yugioh oder ein beliebiges anderes Spiel handelt. Man fügt neue Möglichkeiten – Spielzüge, Karten, Regeln etc. – hinzu. Wichtig dabei ist stets, dass die alten Regeln wie bisher gelten. Es darf keine Änderung des Spiels sein, sondern lediglich eine Erweiterung. In unserem Fall bedeutet das, dass alle Rechenregeln weiterhin gelten müssen.

Angeblich haben die Römer, die Aquädukte, Fußbodenheizungen und mehrstöckige Gebäude gebaut und ganz nebenbei ein Weltreich höchst erfolgreich verwaltet haben, weder die Null noch negative Zahlen gekannt. Ich kann das nicht ganz glauben. Aber auf jeden Fall war beides in ihrem Zahlensystem nicht darstellbar.

Wir fügen also den natürlichen Zahlen die negativen ganzen Zahlen hinzu, damit wir auch subtrahieren können, ohne aus dem Raum zu fallen:

Die Menge der **ganzen Zahlen** ist gegeben durch:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots - 2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$$

Der Zahlenstrahl wird nun einfach nach links erweitert, wie es in Bild 1.3 gezeigt wird.

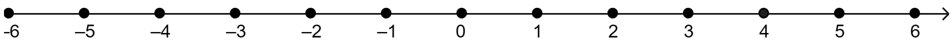



**Bild 1.3** Die Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z}$

Nun funktioniert auch die Subtraktion, aber noch immer nicht die Division:

$$15 : 3 = 15/3 = 5 \in \mathbb{Z} \quad \text{aber} \quad 3 : 15 = 3/15 = 1/5 \notin \mathbb{Z}$$

Du ahnst, was wir machen werden. Wir fügen den ganzen Zahlen alle Zahlen, die sich durch einen Bruch darstellen lassen, hinzu und erhalten die rationalen Zahlen. Dabei müssen wir darauf achten, dass der Nenner ungleich Null ist, da die Division durch Null keinen Sinn ergibt und daher nicht definiert ist.

Die Menge der **rationalen Zahlen** ist gegeben durch:

$$\mathbb{Q} = \{z = \frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$$

Vergiss niemals: **Es ist nicht möglich, durch Null zu dividieren.**

Das schaut jetzt echt super kompliziert aus. Aber wenn du die letzten beiden Kapiteln aufmerksam gelesen hast, erkennst du, dass sich dies mit Hilfe der Aussagenlogik leicht in einen verständlichen deutschen Satz übersetzen lässt. Zunächst erkennst du natürlich an den Mengenklammern $\{\quad\}$, dass es sich hier um eine Menge handelt. Und zwar um die Menge aller Zahlen $z$, die sich als Bruch $p/q$ darstellen lassen. Der senkrechte Strich sagt dir, dass für diesen Bruch einige Bedingungen gelten müssen. Diese sind hier in drei Aussagen gepackt: Der Zähler muss eine ganze Zahl sein, $p \in \mathbb{Z}$, der Nenner muss eine ganze Zahl sein, $q \in \mathbb{Z}$, und darf nicht gleich Null sein, $q \neq 0$. Da diese drei Aussagen mit einem logischen UND, $\wedge$, verbunden sind, müssen sie alle drei gleichzeitig gelten. Nochmals in einem:

„Die Menge der rationalen Zahlen ist die Menge aller Brüche für die gilt, dass sowohl der Zähler als auch der Nenner Elemente der Menge der ganzen Zahlen sind und der Nenner ungleich Null ist."

Siehst du, du sprichst schon mathematisch.

Auch die rationalen Zahlen sollten wir durch den Zahlenstrahl darstellen.

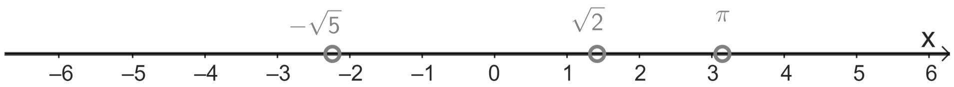



**Bild 1.4** Die Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q}$

Nun sieht der Zahlenstrahl in Bild 1.4 doch schon ziemlich komplett aus. Doch wenn du etwas genauer hinsiehst, erkennst du, dass da ganz leicht eingezeichnet Lücken bei $-\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$ und bei $\pi$ sind. Der Grund dafür ist, dass diese Zahlen sich nicht als Brüche darstellen lassen. Sie sind folglich keine rationalen Zahlen. Solche Zahlen nennt man **irrationale Zahlen**. Die Frage, die wir uns nun stellen sollten ist, ob es noch mehr von diesen gibt.

Um das herauszufinden, zeichnen wir den Zahlenstrahl zu den rationalen Zahlen nochmals in Bild 1.5. Aber nun zeichnen wir überall dort, wo eine irrationale Zahl ist, eine Lücke ein.


**Bild 1.5** Die Menge der rationalen Zahlen ohne irrationale Zahlen

Siehst du etwas? Nicht? Der Grund dafür ist, dass es wesentlich mehr irrationale als rationale Zahlen gibt. Wir mussten also so viele Lücken einzeichnen, dass dadurch alles andere ausgeblendet wurde.

Es ist an der Zeit, sich über den Begriff der Unendlichkeit Gedanken zu machen. Es gibt nämlich verschiedene Arten von unendlich. Das allein ist schon erstaunlich.

Die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen genauso wie die rationalen Zahlen, haben **abzählbar unendlich** viele Elemente. Das bedeutet, man kann ein System finden, sie zu zählen. Jede abzählbar unendlich große Menge ist daher äquivalent zu der Menge der natürlichen Zahlen. Es gibt also gleich viele ganze Zahlen oder rationale Zahlen wie natürliche Zahlen. Auch das ist schon verwunderlich, sollte man doch meinen, dass es doppelt so viele ganze Zahlen wie natürliche Zahlen gibt. Aber das Doppelte von unendlich ist nun mal wieder unendlich.

Im Gegensatz dazu gibt es **überabzählbar viele** irrationale Zahlen. Das sind viel, viel mehr. Es wird dir also nicht gelingen, ein System zu finden, diese zu zählen.

Wie aber erkennt man, ob eine Zahl rational oder irrational ist? Das ist eigentlich sehr einfach:

Jede **endliche** oder **periodische** Kommazahl kann als Bruch dargestellt werden und ist daher rational.

Jede **unendliche nicht periodische** Kommazahl kann nicht als Bruch dargestellt werden und ist daher irrational.

**Beispiel 1.5** Welche der folgenden Zahlen ist rational? Stelle sie, falls möglich, als Bruch dar. Der Einfachheit halber, habe ich die Lösung gleich neben die Angabe geschrieben.

1. $0{,}23 = \frac{23}{100} \in \mathbb{Q}$
2. $\sqrt{7} = 2{,}645751311 \cdots \notin \mathbb{Q}$
3. $-0{,}3333 \cdots = -0,\dot{3} = -\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$
4. $3{,}5 = \frac{7}{2} \in \mathbb{Q}$
5. $\pi = 3{,}141592654 \cdots \notin \mathbb{Q}$
6. $\sqrt{2.25} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ ■

Eine kleine Bemerkung am Rande, zu $3{,}5 = \frac{7}{2}$. Bitte komm niemals auf die Idee, solch eine Zahl als gemischten Bruch darzustellen. Unter uns: Gemischte Brüche haben sehr gemeine Menschen erfunden, um kleine Kinder zu quälen. Du möchtest Technikerin oder Techniker werden. Daher liest du in Zukunft eine Zahl vor einem Bruch als Multiplikation, also $3\frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ und das ist gewiss nicht dasselbe wie 3,5.

Wir gehen genau so wie bisher vor. Wir ergänzen die Menge, sodass sie unseren Anforderungen entspricht. Wir fügen den rationalen Zahlen die irrationalen Zahlen hinzu, um die **reellen Zahlen** zu erhalten:

Die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ ist die Vereinigung aller rationalen und irrationalen Zahlen.

Nun ist der Zahlenstrahl, Bild 1.6, lückenlos geschlossen.

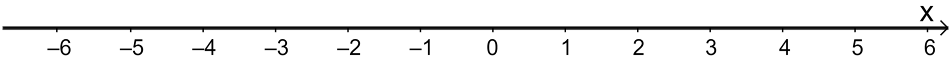



**Bild 1.6** Die Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R}$

Sind wir nun fertig? Wir können addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren und sogar Wurzel ziehen, ohne aus der Menge zu fallen.

Können wir das? Nun versuche, die Wurzel aus $-1$ zu ziehen. Das ist jene Zahl, die quadriert $-1$ ergibt. Da wir aber wissen, dass „Minus Mal Minus gleich Plus“ ist, kann das niemals der Fall sein.

**Die Wurzel aus einer negativen Zahl ist nicht reell.**

Der logische Schritt wäre nun, die Wurzeln aus negativen Zahlen den reellen Zahlen hinzuzufügen. Mit dieser Vorgangsweise sind wir bis jetzt ganz gut gefahren. Das Problem ist aber, dass der Zahlenstrahl voll ist.

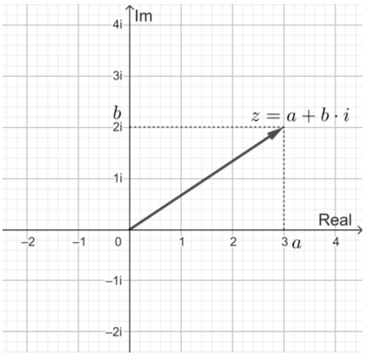
Die Lösung dieses Problems hat der deutsche Mathematiker **Carl Friedrich Gauss (1777–1855)** gefunden. Gauss war wahrscheinlich einer der klügsten Menschen aller Zeiten. Er wird uns im Laufe der nächsten fünf Jahre immer wieder begegnen. Im speziellen Fall war seine Lösung unseres Problems genauso genial wie einfach. Er dachte sich, wenn eine Dimension nicht reicht, füge ich eine zweite Dimension hinzu:

Die Menge der **komplexen Zahlen**:

$$\mathbb{C} = \{z = a + b \cdot \mathrm{i} | a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge \mathrm{i}^2 = -1\}$$

Die Zahl i, die zum Quadrat $-1$ ergibt, heißt die **imaginäre Zahl**.

Nun folgt zumeist die durchaus berechtigte Frage, wozu brauchen wir das und – hoffentlich auch – wie kann man damit rechnen? Die Antwort auf die erste Frage ist einfach. Grob gesagt, brauchst du die komplexen Zahlen, sobald du irgendetwas mit Strom zu tun hast, also, sobald du das Licht andrehst, deine Getränke kühlst, mit der U-Bahn fährst oder ein Spiel am Computer installierst. Du wirst nun argumentieren, dass du das alles bisher getan hast, ohne von der Existenz der komplexen Zahlen zu




$a$ heißt der **Realteil** der komplexen Zahl $z$.

$b$ heißt der **Imaginärteil** der komplexen Zahl $z$.

In der Gaussschen Zahlenebene stellst du den Realteil auf der horizontalen und den Imaginärteil auf der vertikalen Achse dar. Jeder Punkt aus der Ebene symbolisiert eine komplexe Zahl.

Im nebenstehenden Bild wurde die Zahl $z = 3{+}2\mathrm{i}$ dargestellt.

**Bild 1.7** Die Gaussche Zahlenebene und die komplexen Zahlen

wissen. Aber besuchst du nicht eine technische Schule, um ein wenig hinter die Dinge zu blicken? Möchtest du nicht wissen, wie und warum das alles funktioniert?

Um die zweite Frage, wie man damit rechnen kann, zu beantworten, muss ich dich leider auf die zweite Klasse vertrösten. Dort wirst du dich ausführlich mit den komplexen Zahlen beschäftigen. Für den Moment genügt es für dich zu wissen, dass es sie gibt.

## 1.4 Alles in einen Topf: Teilmengen

Zum Abschluss des ersten Kapitels werfen wir alles in einen großen Topf, rühren einmal um und kombinieren das erlangte Wissen. Dabei beschränke ich mich hauptsächlich auf Teilmengen der natürlichen und der reellen Zahlen, so wie du sie im Laufe des ersten Jahrgangs kennenlernen wirst.

### 1.4.1 Primzahlen

Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl ungleich 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Die ersten Primzahlen sind $\mathbb{P} = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; \ldots\} \subset \mathbb{N}$.

Es lässt sich recht leicht zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Gäbe es nämlich nur endlich viele Primzahlen, müsstest du sie lediglich alle miteinander multiplizieren und 1 addieren, um eine weitere geschaffen zu haben. Damit hättest du aber gezeigt, dass es immer noch eine weitere Primzahl gibt.